А. И. ХУДОБИН
Н. И. ХУДОБИН
М. Ф. ШУРШАЛОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ по АЛГЕБРЕ и ЭЛЕМЕНТАРНЫМ ФУНКЦИЯМ

А. И. ХУДОБИН, Н. И. ХУДОБИН,
М. Ф. ШУРШАЛОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ И ЭЛЕМЕНТАРНЫМ ФУНКЦИЯМ

Пособие для учащихся
9—10 классов

ИЗДАТЕЛЬСТВО „ПРОСВЕЩЕНИЕ“
Москва 1966

По конкурсу Министерства просвещения РСФСР настоящее пособие удостоено второй премии.

$\frac{6-6}{423-66}$

1

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА V—VIII КЛАССОВ

§ 1. АРИФМЕТИКА

1. Одно слагаемое увеличили на 98 единиц. Как надо изменить другое слагаемое, чтобы сумма: 1) увеличилась на 18 единиц; 2) уменьшилась на 28 единиц?

2. Если каждое из двух слагаемых не делится на 3, то верно ли утверждение, что и сумма их не делится на 3?

3. Четным или нечетным числом будет сумма 9 слагаемых, если: 1) 4 слагаемых четные, остальные нечетные; 2) 5 слагаемых четные, остальные нечетные?

4. Вычитаемое увеличили на 23 единицы. Как надо изменить уменьшаемое, чтобы разность: 1) увеличилась на 14 единиц; 2) уменьшилась на 5 единиц?

5. Как изменится произведение двух сомножителей, если один из сомножителей: 1) увеличить в 5 раз; 2) увеличить на 3 единицы; 3) уменьшить на одну единицу?

6. Как изменится частное и остаток, если к делимому прибавить делитель?

7. При делении числа на 108 в остатке получилось 90. Как изменится частное и сколько получится в остатке, если то же число разделить на 36?

8. На основании зависимости между компонентами и результатом действий найти x из следующих равенств:

1) $(8 - x) \cdot 15 = 75;$ 2) $[(3x - 54) \cdot 8 - 159] : 21 = 21;$

3) $\dfrac{4}{[(48 - 5x) : 7] \cdot 3 - 3} = 1;$ 4) $1{,}2 - \dfrac{3x}{1{,}4} = 0{,}9;$

5) $\left[\dfrac{(87 - 24x) : 3}{29} + 15\right] : 4 = 4;$ 6) $\left(\dfrac{55}{84} : x + 1\dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{5}{33} = 2\dfrac{1}{2};$

7) $[1{,}7 : (23 - x)] \cdot 21{,}25 = 2\dfrac{5}{6};$

8) $\left[1{,}7:\left(1\frac{2}{3}\cdot x-3{,}75\right)\right]:\frac{8}{85}=1\frac{5}{12}.$

9*. Дописать к числу 523 три цифры справа так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9.

10. Дробь $\frac{a}{b}$ несократима. Будет ли несократимой дробь $\frac{ab}{a+b}$?

11. Найти несократимую дробь, которая от прибавления знаменателя к числителю увеличится в 5 раз.

12. Доказать, что:

1) $\frac{171\,717}{252\,525}=\frac{1717}{2525}=\frac{17}{25}$; 2) $\frac{313\,131}{757\,575}=\frac{3131}{7575}=\frac{31}{75}$.

13. Между какими приближенными значениями, вычисленными с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 по недостатку и по избытку, заключено число $\frac{22}{7}$? Результаты записать в виде двойных неравенств.

14. Произвести указанные действия.

1) $$\frac{10\left(47\frac{1}{5}:12-20:6\frac{3}{7}\right)-1\frac{35}{36}}{6-1\frac{13}{15}\cdot\left(\frac{31}{42}+\frac{47}{56}+\frac{25}{48}\right)};$$

2) $$\frac{14-\left(49\frac{1}{3}:16-14:8\frac{1}{6}\right)\cdot 7}{1\frac{17}{18}\cdot\left(1\frac{59}{70}+\frac{37}{42}+2\frac{19}{30}\right)-10};$$

3) $$\frac{\left(13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}\right)\cdot 230{,}04+46{,}75}{0{,}01};$$

4) $$\frac{9\frac{1}{6}-1\frac{9}{14}-\frac{1}{30}\cdot 3\frac{1}{3}+\frac{1}{63}}{\frac{19}{96}+\left(8\frac{4}{15}-6\frac{7}{24}\right):0{,}8-1\frac{1}{2}:2{,}25}.$$

15. Поезд идет с постоянной скоростью. Он проходит мост длиной 450 *м* за 45 *сек* и за 15 *сек* проходит мимо телеграфного столба. Найти длину поезда и его скорость.

16*. Автомобиль прошел расстояние между двумя городами за $4\frac{1}{2}$ *ч*, причем первую половину пути он проходил со скоростью 60 *км/ч*, а вторую — со скоростью 75 *км/ч*. Определить расстояние между городами.

---

* Здесь и далее звездочкой отмечены задачи и упражнения повышенной сложности. В ответах к ним сделаны указания.

Составить числовые формулы решения задач № 17, 18 и решить их.

17. Струг (прицепная землеройная машина Д-264) движется со скоростью 1,5 *км/ч*, срезая пласт грунта шириной 3 *м* и толщиной 35 *см*. Определить, сколько железнодорожных вагонов можно загрузить грунтом, вынутым стругом за 8 *ч*, если в один вагон вмещается 20 *куб. м* грунта.

18. Сколько железнодорожных эшелонов загрузит один экскаватор ЭШ-14/65 в сутки, если по норме за 6 *ч* нужно вынуть 225 ковшей, а бригада, обслуживающая экскаватор, выполняет норму на 200% ? Ковш вмещает 14 *куб. м* грунта, эшелон состоит из 60 вагонов емкостью по 20 *куб. м* каждый.

19. Точное число 9752 руб. 52 коп. округлено до 9800 руб. Найти абсолютную и относительную погрешности округления.

20. Определенный опытным путем удельный вес железа оказался равным 7,6 *Г/см*^{3}. Сравнив полученный результат с табличным, найти абсолютную и относительную погрешности измерения.

21. Выполнить указанные действия над приближенными числами:

1) $12{,}31 + 4{,}2 + 1{,}003 + 0{,}329$; 2) $21{,}04 - 9{,}2379$;
3) $10{,}2 - 9{,}837$; 4) $17{,}0032 - 0{,}043 + 2{,}256 - 0{,}94$;
5) $12{,}32 \cdot 0{,}321$; 6) $0{,}291 \cdot 2{,}32 \cdot 2{,}3$;
7) $2{,}345 \cdot 1{,}45 \cdot 0{,}56$; 8) $0{,}52 : 1{,}324$;
9) $0{,}3215 : 12{,}2$; 10) $2{,}91 \cdot 3{,}2 + 3{,}35 \cdot 2{,}6 - 3{,}14 \cdot 4{,}2$.

22. Участок сада прямоугольной формы имеет длину $a \approx 38{,}6$ *м* и ширину $b \approx 20{,}5$ *м*. Известно, что 10% его площади занимают постройки, 60% — плодовые деревья, остальную площадь занимают ягодные посадки. Какую площадь занимают постройки, плодовые деревья и ягодные посадки?

23. Вычислить при помощи логарифмической линейки:

1) $1{,}55 \cdot 2{,}25$; $2{,}2 \cdot 4{,}23$; $2{,}02 \cdot 1{,}66$; $2{,}83 \cdot 5{,}05$; $0{,}184 \cdot 12{,}5$; $65{,}5 \cdot 0{,}0214$; $0{,}0015 \cdot 0{,}0173$;

2) $2{,}46 : 1{,}82$; $4{,}33 : 2{,}72$; $11{,}5 : 4{,}25$; $30{,}2 : 7{,}02$; $41{,}5 : 0{,}185$; $0{,}456 : 7{,}13$; $0{,}0528 : 0{,}0195$;

3) $1{,}75 \cdot 1{,}23 \cdot 1{,}56$; $2{,}37 \cdot 1{,}04 \cdot 2{,}08$; $12{,}5 \cdot 4{,}23 \cdot 0{,}308$; $13{,}1 \cdot 0{,}0285 \cdot 0{,}652 \cdot 25{,}8$;

4) $\frac{18{,}3 \cdot 0{,}125}{0{,}018}$; $\frac{35{,}2 \cdot 1{,}08}{128}$; $\frac{0{,}108 \cdot 220}{567}$; $\frac{0{,}0428 \cdot 0{,}505}{0{,}0135}$; $\frac{51{,}8 \cdot 0{,}00103}{0{,}0272}$; $\frac{1{,}55 \cdot 0{,}254}{0{,}0467 \cdot 2{,}08}$.

24. Найти длину окружности, если диаметр ее равен:

1) 23,5 *см*; 2) 4,05 *см*; 3) 0,128 *м*; 4) 0,208 *м*.

25. Определить вес еловой балки прямоугольного сечения 168 *мм* × 113 *мм*, длиной 4 *м* 29 *см*, если 1 *дм*^{3} ели весит 0,5 *кГ*.

26. Решить следующие пропорции при помощи логарифмической линейки:

1) $\frac{x}{2,15}=\frac{3,28}{4,15}$; 2) $\frac{12,8}{x}=\frac{0,505}{0,722}$;

3) $\frac{0,012}{x}=\frac{0,0062}{0,085}$; 4) $\frac{15,2}{31,4}=\frac{3x}{7,15}$;

5) $\frac{0,63}{1,5}=\frac{2,3}{0,5x}$; 6) $\frac{0,063}{1,35x}=\frac{5,28}{6,35}$.

27. Найти x_1, x_2, x_3 и x_4 из условия:

$$\frac{x_1}{12,8}=\frac{x_2}{0,308}=\frac{x_3}{1,75}=\frac{x_4}{202}=\frac{1,15}{2,24}.$$

28. Вычислить при помощи логарифмической линейки:

1) $1,27^2$; $0,408^2$; $0,082^2$; $0,00108^2$; π^2;

2) $2,35\cdot 1,56^2$; $0,254^2\cdot 18,5$; $0,0306^2\cdot 25,5$;

3) $\frac{1,92^2}{0,756}$; $\frac{2,58^2}{12,4}$; $\frac{0,72^2}{0,55}$; $\frac{0,0563^2}{0,0605}$.

29. Найти площадь круга, если радиус его равен:

1) 1,15 *см*; 2) 0,128 *м*; 3) 32,4 *см*; 4) 7,5 *см*.

30. Вычислить при помощи логарифмической линейки:

1) $\sqrt{1,28}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{0,006}$; $\sqrt{0,06}$; $\sqrt{0,6}$; $\sqrt{\pi}$;

2) $\frac{\sqrt{0,5}}{0,5}$; $\frac{\sqrt{12,5}}{1,17}$; $\frac{\sqrt{0,135}}{0,023}$; $\frac{\sqrt{0,035}}{0,01}$; $\frac{\sqrt{238}}{10,5}$;

3) $\frac{3,5\cdot\sqrt{3,5}}{53}$; $\frac{5,46\cdot\sqrt{13,8}}{0,287}$; $\frac{0,175\cdot\sqrt{0,05}}{0,0234}$.

§ 2. АЛГЕБРА

Рациональные числа. Алгебраические выражения

31. Даны два числа: $-1,6$ и $-1,5$. Указать и отметить на числовой оси какое-либо: 1) отрицательное число, превосходящее каждое из данных чисел; 2) число, меньшее каждого из данных чисел; 3) число, заключенное между данными числами; 4) положительное число, превосходящее каждое из данных чисел.

32. Указать какие-либо рациональные числа, заключенные между двумя данными рациональными числами: 1) 3 и 5; 2) -4 и -3; 3) 0 и 0,8; 4) m и n, где $m<n$.

33. Доказать, что сумма, разность, произведение и частное (если делитель отличен от нуля) двух рациональных чисел $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ — рациональное число.

34. Назвать числа, противоположные и обратные каждому из следующих чисел: 1) -1; 2) 0,1; 3) $a-b$; 4) $\frac{a}{b}$.

35. Какое число надо вычесть из числа $(a-b)$, чтобы получить противоположное ему число?

36. Верно ли, что $-a$ всегда изображает отрицательное число?

37. Известно, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Верно ли в этом случае утверждение, что $x+y \neq 0$?

38. В каком случае: 1) $a+b=0$; 2) $a \cdot b=0$; 3) $\frac{a}{b}=0$; 4) $\frac{a}{b}=-1$; 5) $a \cdot b=a$?

39. Какое из чисел больше: 1) a или $-a$; 2) a или $2a$; 3) a или $\frac{1}{a}$?

40. 1) Может ли сумма $a+b$ быть: а) меньше разности $a-b$; б) равной разности $a-b$?

2) Найти $a-b$, если $b-a=m$.

41. 1) Какой смысл имеет выражение a^2; a^3?

2) Вычислить выражения $-x^2$, $(-x)^2$, $-x^3$ и $(-x)^3$ при $x=-1\frac{1}{3}$.

3) При каких значениях a справедливо равенство:

а) $-a^2=(-a)^2$; б) $-a^3=(-a)^3$; в) $a^2=a^3$; г) $a^2+a^3=0$?

4) Почему при возведении в квадрат несократимой дроби не может получиться целое число; сократимая дробь?

42. 1) Какой цифрой не может оканчиваться квадрат натурального числа?

2) В каких случаях квадрат натурального числа является числом четным; нечетным?

3) Какими цифрами оканчиваются кубы последовательных натуральных чисел? В какой последовательности повторяются эти цифры?

4) Найти двузначное число, куб которого равен: а) 21 952; б) 185 193; в) 571 787; г) 238 328.

43. Проверить справедливость равенств:

1) $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$;

2) $108^2+109^2+110^2=133^2+134^2$;

3) $3^3+4^3+5^3=6^3$; 4) $1^3+6^3+8^3=9^3$;

5) $3^3+10^3+18^3=19^3$; 6) $14^3+23^3+70^3=71^3$;

7) $11^3+12^3+13^3+14^3=20^3$.

44. Используя равенства предыдущей задачи, вычислить:

1) $\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}$; 2) $\frac{108^2+109^2+110^2-133^2-134^2}{365}$;

3) $\frac{3^3+4^3+5^3+6^3}{216}$; 4) $\frac{11^3+12^3+13^3+14^3+20^3}{1000}$.

45. Найти наименьшее значение каждого из следующих выражений и указать, при каких значениях a оно достигается:

1) a^2; 2) $(a-1)^2$; 3) $(a+5)^2$; 4) $(a-2)^3$.

46. Указать наибольшее значение выражения $\frac{1}{a^2+1}$.

47. Найти числовое значение выражения:

1) $a^2-86a+13$ при $a=87$;
2) $a^2+32a-300$ при $a=68$.

48. При каких значениях a дробь $\frac{2a^2+3a-2}{3}$:

1) равна 0; 2) равна 1; 3) равна -1?

49. При каких значениях a теряют смысл следующие выражения:

1) $\frac{1}{a-3}$; 2) $\frac{3}{a+5}$; 3) $\frac{5a}{2a-5}$;
4) $\frac{5a+3}{3a-5}$; 5) $\frac{3a}{a^2+2a+1}$; 6) $\frac{2a}{a^2-7a+12}$?

50. Где на числовой оси лежит точка, изображающая данное число x, если: 1) $|x|=3$; 2) $|x|>2$; 3) $|x|<5$?

51. 1) $a=b$. Верно ли утверждение, что $|a|=|b|$?

2) $|a|=|b|$. Верно ли утверждение, что $a=b$?

52. 1) Может ли число быть: а) больше своей абсолютной величины; б) равным своей абсолютной величине?

2) Какой знак неравенства следует поставить между числами a и $|a|$?

53. Упростить следующие выражения при значениях $a<0$, $a=0$ и $a>0$:

1) $a+|a|$; 2) $a-|a|$; 3) $\frac{|a|}{a}$.

Тождественные преобразования алгебраических выражений

54. Если n — натуральное число, то какие числа изображают следующие алгебраические выражения:

1) $2n$; 2) $2n+1$; 3) $3n$; 4) $3n\pm1$.

55. Доказать, что: 1) сумма двух последовательных натуральных чисел—число нечетное, а произведение их—число четное; 2) сумма двух любых нечетных чисел есть число четное, а произведение их — число нечетное; 3) произведение двух любых последовательных четных чисел делится на 8; 4) сумма любого двузначного числа и числа, изображенного теми же цифрами, но написанными в обратном порядке, делится на 11.

56. Доказать, что если к двузначному числу приписать такое же число и полученное четырехзначное число разделить на 101, то в частном получится первоначальное число.

57*. Упростить следующие выражения:

1) $x+|1-x|+2\cdot|x-2|$, если $1<x<2$;

2) $|x|+|x+1|+|x-2|$ при $x<2$;

3) $|x-1|+\frac{x}{|x|}-|x+1|$ при $x>-2$.

58. Доказать тождества и привести словесные формулировки:

1) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;

2) $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$;

3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

4) $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$.

59. 1) Верно ли, что $(a-b)^2=(b-a)^2$?

2) Какое выражение надо прибавить к квадрату разности двух чисел, чтобы получить квадрат суммы тех же чисел?

3) Какое выражение надо вычесть из куба суммы чисел a и b, чтобы получить сумму кубов тех же чисел?

60. Для каких значений a и b справедливы равенства:

1) $(a-b)^3=(b-a)^3$; 2) $(a+b)^2=a^2+b^2$?

61. Могут ли квадраты двух неравных чисел быть равными между собой?

62*. Объяснить, почему квадраты двух натуральных чисел, у которых сумма последних цифр равна 10, оканчиваются одной и той же цифрой.

63. Вычислить (устно), применяя формулы сокращенного умножения:

1) 21^2; 41^2; 71^2; 91^2; 101^2; 22^2; 32^2; 52^2; 62^2;

2) 19^2; 29^2; 59^2; 99^2; 98^2; 48^2; 58^2;

3) $19\cdot 21$; $39\cdot 41$; $69\cdot 71$; $89\cdot 91$; $18\cdot 22$; $28\cdot 32$;

4) 47^2-46^2; 83^2-82^2; 68^2-67^2; 24^2-21^2; 32^2-29^2.

64. 1) Доказать справедливость приближенных равенств при достаточно малом x: а) $(1\pm x)^2\approx 1\pm 2x$; б) $(1\pm x)^3\approx 1\pm 3x$.

В каждом случае указать абсолютную погрешность, допускаемую при пользовании этими формулами.

2) Вычислить по формулам приближения и найти абсолютную погрешность результата: а) $1{,}003^2$; $1{,}0025^2$; $1{,}015^2$; $0{,}998^2$; $2{,}008^2$; $5{,}042^2$; б) $0{,}999^3$; $1{,}002^3$; $1{,}997^3$.

65. 1) Доказать, что при $x=a-1$ выражение x^2+x+a является точным квадратом.

2) Найти такое натуральное значение x, при котором численное значение трехчлена x^2+x+41 окажется точным квадратом.

66. Найти числовое значение выражения:

1) $a^3-b^3-3ab(a-b)$ при $a=-27$ и $b=-33$;

2) $a^2-32a+260$ при $a=28$;

3) x^3-3x^2+3x при $x=1, 2, 3, 4, 5, 6$.

67*. Доказать, что: 1) квадрат нечетного натурального числа есть число нечетное; 2) квадрат всякого нечетного числа, уменьшенный на 1, делится на 8; 3) разность между кубом натурального числа и самим числом делится на 6; 4) сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

68. Выделить из данного трехчлена квадрат суммы (или разности) двух чисел:

1) $x^2+6x+16$; 2) $x^2-10x+16$;
3) x^2-x+1; 4) x^2+5x-4.

69. Найти наименьшее численное значение выражения $x^2-6x+34$.

70. При каких значениях a трехчлен $10a-23-a^2$ принимает наибольшее значение? Найти это наибольшее значение трехчлена.

71. Доказать, что выражение $(x-1)(x-3)+1$ при любых значениях x принимает неотрицательные значения.

72. В следующих примерах по двум данным величинам найти третью:

Таблица 1

№	Множимое	Множитель	Произведение
1	$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$	$\frac{b}{a}-\frac{a}{b}$	
2		$n+1$	$n^3+1+3n(n+1)$
3	x^2+2x+2	x^2-2x+2	
4	$\frac{1}{4}(x^2+2x+4)$		$\frac{1}{8}x^3-1$
5		a^n+b^{2n}	$a^{3n}+b^{6n}$
6	a^2+3a+3		a^4-3a^2+9

Разложить на множители.

73. 1) $18a^3b^2-2ab^4$; 2) $4a^2-4b^2-4a+1$.

74. 1) $9a^2-b^2+2b-1$; 2) $a^2+b^2+2a-2b-2ab$.

75. 1) $(a+1)(a^2-b^2)-(a+b)(a^2-1)$;
2) $(a+b)(a^3-b^3)-(a-b)(a^3+b^3)$.

76. 1) $x^4-x^2(a^2+1)+a^2$; 2) $x^3+(a-1)x+a$.

77. 1) a^4-1; 2) $8-x^6$; 3) a^6+1; 4) a^4+4b^4.

78*. 1) $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+2xyz$;
2) $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+3xyz$.

79*. 1) a^4+a^2+1; 2) $x^4+x^2y^2+y^4$.

80*. Доказать, что: 1) сумма трех любых последовательных натуральных степеней числа 2 делится на 14; 2) произведение квадрата целого числа на число, предшествующее этому квадрату, всегда делится на 12; 3) при всяком нечетном значении x числовое значение выражения x^3+3x^2-x-3 делится на 48; 4) при всяком натуральном x числовое значение выражения $(x^2+3x+1)^2-1$ делится на 24.

81. Доказать, что если к произведению трех последовательных натуральных чисел прибавить среднее из них, то полученная сумма будет равна кубу среднего числа.

82*. Доказать, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$.

83. Сократить дроби:

1) $\frac{x^2+x-12}{x^2+8x+16}$; 2) $\frac{a^2+6a+9}{a^2+a-6}$; 3) $\frac{m^2-12m+35}{m^2-2m-35}$;

4) $\frac{4a^2+12a+9}{2a^2-a-6}$; 5) $\frac{a^n+2a^{n-1}-3a^{n-2}}{a^2+5a+6}$; 6) $\frac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}$.

84. Найти числовые значения следующих выражений, предварительно упростив их:

1) $\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}\right):\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ при $x=-3\frac{3}{4}$;

2) $\frac{a^2-2a+1}{a-3}\cdot\left[\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\frac{3}{a^2-a}\right]$ при $a=-0{,}01$.

Произвести указанные действия.

85. 1) $\left(\frac{2}{2a-b}+\frac{6b}{b^2-4a^2}-\frac{4}{2a+b}\right):\left(1+\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}\right)$;

2) $\left(\frac{a-2b}{a^3+b^3}+\frac{b}{a^3-a^2b+ab^2}\right)\cdot\frac{a^3-ab^2}{a^2+b^2}+\frac{2b^2}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$;

3) $\left\{\left[\left(\frac{a-c}{a+c}\right)^2-\left(\frac{a+c}{a-c}\right)^2\right]:\frac{8a^3+8ac^2}{a^3+a^2c-ac^2-c^3}+\frac{c}{a+c}\right\}\times\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)$;

4) $\left[\frac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)}+\frac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)}\right]:\left[\frac{5}{x^2+1}+\frac{3}{2(x+1)}-\frac{3}{2(x-1)}\right]$.

86. 1) $\left(\frac{x}{a+x}+a\right)\left(\frac{a}{a-x}-x\right)-\left(\frac{a}{a+x}+x\right)\left(\frac{x}{a-x}-a\right)$;

2) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$.

87. 1) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$;

2) $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$.

88*. 1) $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a}{a^2+b^2}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}+\frac{8a^7}{a^8+b^8}$;

2) $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}$.

89. 1) $\frac{a^4-(a-1)^2}{(a^2+1)^2-a^2}+\frac{a^2-(a^2-1)^2}{a^2(a+1)^2-1}+\frac{a^2(a-1)^2-1}{a^4-(a+1)^2}$;

2) $\frac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{\frac{a}{bc}(c-b)+\frac{b}{ac}(a-c)+\frac{c}{ab}(b-a)}$.

90*. Доказать, что если $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, то

$$(a+b)(a+c)(b+c)=0.$$

91*. Доказать, что если $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, то $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2}{b^2}$.

92*. Определить A и B так, чтобы имело место тождество:

1) $\frac{3x}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$;

2) $\frac{x^2+3}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x+1}$.

Уравнения. Равносильность уравнений

93. В записи стерт коэффициент при неизвестном в одном из членов уравнения $2\cdot|x-1|+x=\ldots x-3$. Восстановить его, зная, что корень уравнения равен -5.

94. В записи квадратного уравнения стерт коэффициент при x в одном из членов уравнения $\ldots x^2-\frac{x}{3}-1=5x^2$. Зная, что один из корней уравнения равен $-0{,}1$, восстановить стертый коэффициент и найти второй корень уравнения.

95. Составить уравнение наименьшей степени с рациональными коэффициентами, корнями которого были бы числа: 1) $-\frac{3}{4}$ и 0; 2) 0,3; 3) $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$. Сколько таких уравнений можно составить в каждом случае?

96. Составить уравнение второй степени, которое: 1) совсем не имеет корней; 2) удовлетворяется произвольными (допустимыми) значениями неизвестного.

97. Равносильны ли следующие уравнения:

1) $x-2+\frac{1}{x^2+1}=2-x+\frac{1}{x^2+1}$ и $x-2=2-x$;

2) $5-3x-\frac{1}{x-1}=2x-\frac{1}{x-1}$ и $5-3x=2x$;

3) $(x+3)(x-3)=0$ и $x+3=0$;

4) $(2x-1)(x-2)=2(x-2)$ и $2x-1=2$;

5) $\frac{x-4}{x-5}=\frac{6-x}{x-5}$ и $x-4=6-x$?

Обосновать свои ответы.

98. В каких случаях прибавление к обеим частям уравнения одного и того же алгебраического выражения приводит к уравнению, не равносильному данному? Привести примеры.

99. Обе части уравнения $4-x^2=2+x$ умножили на $\frac{1}{2+x}$ и получили уравнение $2-x=1$. Выяснить, какие корни имеют данное и получившееся уравнения. Являются ли эти уравнения равносильными?

100. В каких случаях при умножении обеих частей данного уравнения на выражение, содержащее неизвестное, может произойти потеря корней? Привести примеры.

Уравнения первой степени с одним неизвестным

101. Решить уравнения:

1) $3(x-1)-4=2(x-1)$;

2) $4(x+3)-3(x+2)-2(x+1)+x=0$;

3) $(x-1)+2(x-2)+3(x-3)=6\left(x-2\frac{1}{3}\right)$;

4) $\frac{2}{x-1}+1=\frac{3}{x-1}$; 5) $\frac{x-3}{4}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-1}{2}-x=\frac{x}{12}$.

102. Решить уравнение $S=2d(n-2)$ относительно n.

103. Уравнение $I=\frac{E}{R+r}$ решить относительно 1) E; 2) R; 3) r.

104. Уравнение $\frac{1}{f}+\frac{1}{d}=\frac{1}{F}$ решить относительно 1) f; 2) d; 3) F.

105. Уравнение $S=\frac{(a+l)\,n}{2}$ решить относительно n и назвать несколько таких численных значений S, a и l, при которых n будет целым положительным числом.

106. По аллее парка два мальчика катят обручи. Длина окружности одного обруча 3,2 *м*, а другого — 2,8 *м*. Найти длину аллеи, если известно, что второй обруч сделал на этом расстоянии десятью оборотами больше, чем первый.

107. При паровозной тяге расстояние между станциями Пенза и Ртищево поезд проходит за 3 *ч* 20 *мин*. Использование тепловозов повысило скорость движения поездов на 15 *км/ч*, поэтому то же расстояние поезд стал проходить за 2 *ч* 30 *мин*. Определить расстояние между станциями Пенза и Ртищево.

108. Рабочий отправился на велосипеде из совхоза в город. За первый час он проехал на $2\frac{1}{2}$ *км* меньше половины всего пути, за второй час — $\frac{4}{5}$ того расстояния, которое он проехал за первый час, а за третий час — оставшиеся $7\frac{1}{2}$ *км*. Найти расстояние от совхоза до города.

109. В 5 часов утра из города *А* в город *Б*, находящийся от *А* на расстоянии 210 *км*, вышел пассажирский поезд. В 5 *ч* 40 *мин* утра из *Б* в *А* вышел товарный поезд и через $2\frac{1}{4}$ *ч* после своего выхода встретился с пассажирским. Определить скорость каждого поезда, зная, что скорость товарного поезда на 10 *км/ч* меньше, чем скорость пассажирского.

110. На элеватор поступило 350 *т* пшеницы двух сортов. Первый сорт пшеницы содержал 2% отходов, а второй — 3% отходов. После очистки получили 341 *т* чистой пшеницы. Сколько пшеницы каждого сорта поступило на элеватор?

111. Смешивают 20 *кг* воды при температуре 15° С и 8 *кг* воды при 100° С. Определить температуру смеси.

112. Определить ширину реки, зная, что звук с другого берега приходит по воздуху на 2 *сек* позже, чем по воде. Скорость звука в воздухе принять равной 340 *м/сек*, а в воде — 1450 *м/сек*.

113. Сосуд, наполненный маслом, весит на 200 *Г* больше, чем тот же сосуд, наполненный керосином. Найти емкость сосуда, если удельный вес масла 0,90 $Г/см^3$ и удельный вес керосина 0,80 $Г/см^3$.

114. Разделить число a на две части так, чтобы отношение между ними было равно $\frac{m}{n}$.

Система уравнений первой степени с двумя неизвестными

Решить следующие системы уравнений:

115. 1) $$\begin{cases} 3y+1-\dfrac{3(x-5y)}{4}=x-\dfrac{27y+22}{8}, \\ x+3-\dfrac{5x-9y}{6}=3y-\dfrac{3-5x}{9}; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{2(3x-y)}{5}=\dfrac{3y-10x}{3}+2x+1, \\ \dfrac{4x-3y}{3}+\dfrac{8x-3y}{2}=y+1; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \dfrac{x+2y}{4}-\left(x-\dfrac{1}{3}y\right)=1+y, \\ \dfrac{y+3}{6}+\dfrac{2-x}{2}=3; \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3}-\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{2(x-y)}{5}, \\ \dfrac{x-3}{4}-\dfrac{y-3}{3}=2y-x. \end{cases}$$

116. 1) $\begin{cases} 0{,}5-y=\left\{\frac{1}{2}\,[x-3\,(y-0{,}4)]+1{,}4\right\}\cdot 0{,}75, \\ 2\left[1-\frac{1-2\,(x-y)}{5}\right]-1{,}4=3\,(2x+3); \end{cases}$

2) $2-\frac{x+2y}{5}=7x-5y+4=-\frac{1}{3}\,[5+3\,(x-3)-y].$

117. Решить графически системы уравнений.

1) $\begin{cases} x+y=-5, \\ 3x-y=-7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-2y=4, \\ 1{,}5x-y=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 4x-2x=6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=3, \\ y-2=0. \end{cases}$

118. Решить следующие системы уравнений и дать графическую иллюстрацию решений:

1) $\begin{cases} x-2y=7, \\ 3x+2y=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=4, \\ 2x-4y=8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+3y=6, \\ 2x+6y=7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=-2, \\ 2x-y=-4. \end{cases}$

119. На двух параллельных железнодорожных путях находится 80 вагонов. Если с первого пути перевести на второй 8 вагонов, то на втором пути вагонов будет в $1\frac{2}{3}$ раза больше, чем на первом. Сколько вагонов было на каждом пути?

120. Сумма цифр двузначного числа равна 6. Если цифры этого числа переставить, то получится число, составляющее $\frac{4}{7}$ первоначального. Найти это двузначное число.

121. От дома до почты колхозник шел со скоростью 4 *км/ч*, а от почты до станции ехал на автомобиле со скоростью 30 *км/ч* и затратил на весь путь от дома до станции 1 *ч*. Обратно от станции до почты он ехал на автомобиле со скоростью 36 *км/ч*, а от почты до дома он шел со скоростью 3 *км/ч* и затратил на обратный путь 1 *ч* 5 *мин*. Найти расстояние от дома колхозника до почты и от почты до станции.

122. Если длину прямоугольного участка уменьшить на 20 *м*, а ширину увеличить на 20 *м*, то площадь участка увеличится на 0,1 *га*; если же длину увеличить на 30 *м*, а ширину уменьшить на 10 *м*, то площадь участка увеличится на 0,2 *га*. Определить площадь земельного участка.

123. За 4 *ч* катер прошел 50 *км* по течению реки и 24 *км* против течения. В другой раз тот же катер за 6 *ч* прошел 70 *км* по течению и 40 *км* против течения. Определить скорость катера в стоячей воде и скорость течения реки.

Квадратные уравнения

Решить следующие уравнения:

124. 1) $2x^2+5x=0$; 2) $4x^2-49=0$; 3) $5x^2-5x=x^2+4x$.

125. 1) $\frac{(2x+1)^2}{4}+\frac{1}{24}-\frac{(x+3)x}{2}=\frac{(2x-1)^2}{6}$;

2) $\frac{x(2-x)}{6}-\frac{(x-3)^2}{2}=\frac{5}{6}-\frac{(4-x)^2}{3}$;

3) $x=\frac{(3-x)^2}{9}-\frac{x(x-12)}{18}+\frac{(3-x)(x-12)}{36}$;

4) $2(1-x)=\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(x+1)(x-1)}{6}$.

126. 1) $0{,}2-\frac{x-2}{x+2}=\frac{2(2x-5)}{x-2}-\frac{3x+1}{x^2-4}$;

2) $\frac{5}{x-1}+\frac{3(x-1)}{2x+2}=\frac{2(x^2+4)}{x^2-1}$.

127*. 1) $\frac{x}{x-5}-\frac{35}{x-2}=\frac{15}{x^2-7x+10}$;

2) $\frac{x}{x-10}-\frac{8}{x-6}=\frac{4x}{x^2-16x+60}$;

3) $\frac{x-3}{x+1}=\frac{8-x}{x-4}+\frac{20}{4+3x-x^2}$;

4) $\frac{x^3+3x^2+5x+3}{x^2+3x+2}=\frac{2x^2+x+3}{2x+1}$.

128. Найти с точностью до 0,01 корни следующих уравнений:

1) $x^2+x-225=0$; 2) $2x^2+9x+5=0$;

3) $11x^2-10x+2=0$; 4) $25x^2+18x-11=0$.

129. При совместной работе двух подъемных кранов различной мощности самоходная баржа была загружена за 4 *ч* 12 *мин*. Сколько потребуется времени на загрузку такой же баржи каждым краном в отдельности, если более мощным краном баржу можно загрузить на 8 *ч* быстрее, чем одним краном меньшей мощности.

130. Мотоциклист проезжает 1 *км* на 4 *мин* скорее, чем велосипедист. Сколько километров проезжает каждый из них за 5 *ч*, если известно, что мотоциклист проезжает за это время на 100 *км* больше велосипедиста?

131. Катер отошел от пристани в тот момент, когда мимо нее проходил плот, движимый течением реки. Пройдя вниз по реке 24 *км*, катер повернул обратно и через некоторое время на расстоянии 8 *км* от пристани снова встретил плот. Определить собственную скорость катера, если скорость движения плота 4 *км/ч*.

132. Из города A в город $Б$, расстояние между которыми равно 250 *км*, выехал автомобиль. Через 48 *мин* из города A в том же направлении выехал второй автомобиль, который в 1 *ч* проезжал на 2,5 *км* больше, чем первый. Найти скорость каждого автомобиля, если второй автомобиль догнал первый, не доезжая 30 *км* до города $Б$.

133. С прямоугольного поля размером 1,2 *км* × 0,9 *км* комбайном убирают пшеницу, причем комбайн идет по периметру нескошенного участка, постепенно приближаясь к середине его. На каком расстоянии от края поля следует остановить агрегат для передачи его другой бригаде, чтобы оставить ей площадь, равную убранной?

Функции и графики

134. Дана функция $y = ax + b$.

1) Почему эта функция называется линейной?

2) Какой геометрический смысл имеют коэффициенты a и b?

3) Какое положение относительно координатных осей занимает график данной функции, если: а) $b = 0$, $a \neq 0$ (рассмотреть случаи, когда $a > 0$ и $a < 0$); б) $a = 0$, b — произвольное действительное число.

135. Построить графики функций:

1) $y = x + 2$; 2) $y = 5 - 0{,}5x$; 3) $y = |x|$; 4) $y = |3 - x|$.

136. Написать уравнение прямой, 1) пересекающей оси координат в точках $(-5; 0)$ и $(0; -2)$; 2) проходящей через точку $A(2; -1)$ и параллельной прямой $y = 1 - 2x$.

137. Вычислить площадь треугольника, ограниченного графиками функций $y = |x|$ и $y = 1{,}5 - 0{,}5x$.

138. Дана функция $y = x^2$.

1) Указать, какие значения может принимать аргумент x и какие значения принимает при этом функция y.

2) Выяснить, имеет ли данная функция наибольшее или наименьшее значение и при каком значении x оно достигается.

3) Доказать, что функция $y = x^2$: а) убывает в интервале $(-\infty; 0)$; б) возрастает в интервале $(0; +\infty)$.

4) Убедиться в том, что при замене произвольного значения аргумента x противоположным ему значением $-x$ значение функции не изменяется (свойство четности). Как это свойство функции влияет на ход ее графика?

5) Исходя из установленных свойств функции, построить схематически ее график. Уточнить график функции, вычисляя значения функции при некоторых значениях аргумента.

139. Дана функция $y = -x^2$. Не вычерчивая графика функции,

1) описать вид и положение кривой (графика функции) относительно координатных осей;

2) найти значение x, при котором функция имеет наибольшее или наименьшее значения;

3) указать промежутки возрастания и убывания функции.

140. 1) Написать уравнение каждой из парабол, полученных путем следующих изменений данной параболы:

а) парабола $y=x^2$ сдвинута на 3 единицы масштаба вправо и на 4 единицы масштаба вниз;

б) парабола $y=x^2$ сдвинута на 1 единицу влево и на 2 единицы вниз и подвергнута растяжению по оси OY в 2 раза;

в) парабола $y=-x^2$ сдвинута на $2\frac{1}{2}$ единицы вправо и на $4\frac{1}{2}$ единицы вверх и подвергнута сжатию по оси OY в 3 раза.

2) Для каждого из приведенных случаев:

а) найти те значения x, при которых функция y обращается в 0;

б) определить наименьшее или наибольшее значение функции;

в) построить график функции.

141. Исследовать следующие функции и построить их графики:

1) $y=x^2+1$; 2) $y=x^2-2$; 3) $y=(x-2)^2$;
4) $y=(x+3)^2$; 5) $y=(x-2)^2-1$; 6) $y=2x^2$;
7) $y=0{,}5x^2$; 8) $y=1-x^2$; 9) $y=5-(x-4)^2$;
10) $y=5x-0{,}5x^2$; 11) $y=x^2+2x-3$;
12) $y=1{,}5+x-0{,}5x^2$.

142. Решить графически уравнения:

1) $x^2=x+2$; 2) $x^2+x=2$; 3) $x^2+|x|=2$;
4) $3-x^2=|x-1|-x$.

143. Дана функция $y=x^3$.

1) Указать, какие значения может принимать аргумент x и какие значения принимает при этом функция y.

2) Определить, при каких значениях x данная функция принимает положительные значения; отрицательные значения; значение, равное нулю. Имеет ли функция наибольшее или наименьшее значение?

3) Доказать, что функция $y=x^3$ возрастает при всех значениях аргумента x.

4) Убедиться, что при замене произвольного значения аргумента x противоположным ему значением $-x$ значение функции y также заменяется ему противоположным значением $-y$ (свойство нечетности). Как это свойство функции влияет на ход ее графика?

5) Исходя из установленных свойств функции $y=x^3$, построить ее график.

144. На одном и том же чертеже построить графики функций:

$$y = x, \quad y = x^2 \text{ и } y = x^3.$$

Пользуясь чертежом, определить, при каких значениях x имеют место соотношения:

1) $x^3 = x$; 2) $x^3 > x$; 3) $x^3 < x$; 4) $x^3 > x^2$; 5) $x^3 < x^2$.

145. Построить график функции $y = -x^3$. Чем отличается график этой функции от графика функции $y = x^3$?

Тригонометрические функции острого угла

146. Построить острый угол, если:

1) синус его равен: а) 0,6; б) $\frac{3}{4}$; в) 0,5;

2) косинус его равен: а) $\frac{5}{8}$; б) 0,5; в) 0,75;

3) тангенс его равен: а) $\frac{2}{3}$; б) 1; в) 1,5;

4) котангенс его равен: а) 0,8; б) $\frac{4}{3}$; в) 2.

147. Построить острый угол, синус которого втрое больше косинуса этого угла.

148. Может ли синус острого угла быть равным:

1) $\frac{2}{3}$; 2) 0,5; 3) $\frac{5}{3}$; 4) $\frac{8}{11}$; 5) 1,2; 6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $\sqrt{3}$;
8) $\frac{3}{4}$ *см*; 9) π; 10) $m + \frac{1}{m}$?

149. Какие из данных чисел 0,1; $\frac{2}{3}$; 1; $\frac{5}{2}$; 2,2; $\frac{3}{11}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sqrt{2}$; π могут быть: 1) косинусом острого угла; 2) тангенсом острого угла.

150. Найти сумму квадратов косинусов острых углов прямоугольного треугольника.

151. Как изменяются тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ при уменьшении угла x от 90° до 0°?

152. Что больше и почему:

1) $\sin 30^\circ$ или $\sin 31^\circ$; 2) $\cos 25^\circ$ или $\cos 26^\circ$;
3) $\operatorname{tg} 45^\circ$ или $\operatorname{tg} 46^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 60^\circ$ или $\operatorname{ctg} 61^\circ$;
5) $\sin 50^\circ$ или $\cos 50^\circ$; 6) $\cos 35^\circ$ или $\sin 55^\circ$?

153. Определить знак каждой из следующих разностей:

1) $\sin 45° - \sin 20°$; 2) $\cos 60° - \cos 30°$;
3) $\operatorname{tg} 20° - \operatorname{tg} 21°$; 4) $\sin 45° - \operatorname{tg} 45°$.

154. Расположить в порядке возрастания следующие значения тригонометрических функций:

$\cos 0°$; $\sin 0°$; $\operatorname{tg} 55°$; $\sin 30°$; $\cos 61°$; $\operatorname{tg} 30°$.

155. Объяснить, почему:

1) $a \sin \alpha \leqslant a$;
2) $\frac{a}{\sin \alpha} \geqslant a$, где $a > 0$ и $0° < \alpha \leqslant 90°$.

156. Точка M лежит на дуге AB, равной четверти окружности (рис. 1). Известно, что $OK = 8{,}5$ *см*; $\angle OKN = 50°30'$. Найти радиус окружности.

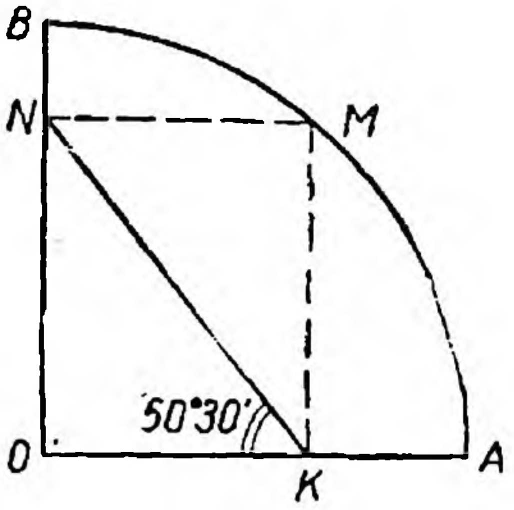


Рис. 1.

157. В окружность, радиус которой равен 8,4 *см*, вписан угол, содержащий 140°. Определить длину хорды, на которую опирается угол.

2

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ[1]

§ 3. УРАВНЕНИЕ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

158. Проверить, что:

1) уравнение $\frac{2x-1}{3}-\frac{4-x}{2}-x=1+\frac{x-3}{6}$ не имеет решений;

2) уравнение $5x+(x-1)^2=(x+2)(x-2)+3x+5$ имеет бесчисленное множество решений.

159. Решив уравнение $\frac{6-x}{x-5}=6+\frac{1}{x-5}$, ученик нашел, что $x=5$. 1) Является ли число 5 корнем уравнения? 2) Имеет ли корни данное уравнение?

160. Решить уравнения:

1) $2x-3=3x-(1+x)$; 2) $\frac{2(x-2{,}5)}{x-3}+1=\frac{1}{x-3}$;

3) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{2(x+1)}{3x-3}=\frac{1}{3}$;

4) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+2}{x+3}+\frac{4}{x^2+2x-3}=0$;

5) $\frac{x+2}{x+1}+\frac{3}{x-2}=\frac{3}{x^2-x-2}+1$;

6) $\frac{x+6}{x-5}+\frac{x-5}{x+6}=\frac{2x^2+23x+61}{x^2+x-30}$.

161. Решить уравнения и дать геометрическую иллюстрацию в каждом случае.

1) $|x|-x=2$; 2) $|x|=2x+1$; 3) $|x|=0{,}5x-1$.

162. Уравнение с одним неизвестным приведено к виду $ax+b=0$. В каком случае это уравнение: 1) имеет единственное решение;

---

[1] Изучение темы начать с решения задач на повторение из главы I.

2) не имеет решений; 3) имеет бесконечное множество решений? Дать геометрическую иллюстрацию в каждом случае.

163. При каких значениях a уравнение $(x+2)(a-1)+1=a^2$: 1) имеет единственное решение; 2) имеет бесконечное множество решений?

164. Определить, при каких значениях a уравнение $(a-2)(x-1)=a^2$: 1) имеет нулевое решение; 2) не имеет решений.

165. При каких значениях k следующие уравнения имеют нулевое решение:

$$1)\ \frac{26x}{3}+5=2\left(k+\frac{x}{3}\right);\quad 2)\ \frac{k}{2}(1-x)=1+\frac{3}{2}x?$$

166. При каких значениях a, b, m и n уравнение $ax+b=mx+n$: 1) не имеет решений; 2) имеет бесконечное множество решений?

167. Решить уравнение $n(x+a)=x+b$. Рассмотреть случаи: 1) $n\neq 1$; 2) $n=1$, $a\neq b$; 3) $n=1$, $a=b$.

168. Решить уравнения:

$$1)\ ax+b^2=bx+a^2;\quad 2)\ \frac{x-a}{x-1}+\frac{x-1}{x-a}=2;$$

$$3)\ \frac{a}{x-a}-\frac{1}{x+a}+\frac{3a^2-4a+3}{a^2-x^2}=0;$$

$$4)\ \frac{a-x}{x-1}+\frac{x-b}{1+x}=\frac{b(x-1)-2}{1-x^2}.$$

169. В какой системе счисления: 1) число 23 запишется как 35; 2) число 52 запишется как 44?

170. В какой системе счисления будет верно равенство:

1) $33-14=14$; 2) $12\cdot 3=40$?

171. Пешеход, идущий к поезду, прошел за первый час 3,5 *км*; затем он рассчитал, что, двигаясь дальше с той же скоростью, он опоздает на один час. Поэтому остальной путь пешеход проходит со скоростью 5 *км/ч* и приходит за 30 *мин* до отхода поезда. Определить, какой путь прошел пешеход.

172. 1) Всегда ли положительный корень уравнения, составленного по условию задачи, дает ответ на вопрос задачи? Привести примеры.

2) Всегда ли отрицательный корень уравнения, составленного по условию задачи, указывает на невозможность задачи? Привести примеры.

3) На что указывает нулевое решение, если оно получено при решении уравнения, составленного по условию задачи? Привести примеры.

173. Сумма цифр двузначного числа равна 15. Если прибавить к нему 32, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти двузначное число.

Почему заранее можно сказать, что положительное решение уравнения, составленного по условию задачи, не дает ответа на ее вопрос?

174. От двух кусков сплава в 6 *кГ* и 12 *кГ* с различным процентным содержанием меди отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих кусках стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

§ 4. НЕРАВЕНСТВА

Числовые неравенства и их свойства

175. Поставить знак неравенства между числами a и b, если известно, что: 1) $(a-b)$ — положительное число; 2) $(a-b)$ — отрицательное число; 3) $(a-b)$ — число неотрицательное.

176. Где на числовой оси лежит точка, изображающая число x, если:

1) $x>0$; 2) $x<0$; 3) $1<x$; 4) $x>-3{,}2$?

177. Записать при помощи знаков неравенства, что: 1) x — положительное число; 2) y — отрицательное число; 3) $|a|$ — число неотрицательное; 4) среднее арифметическое двух положительных чисел a и b не меньше их среднего геометрического; 5) абсолютная величина суммы двух рациональных чисел a и b не больше суммы абсолютных величин слагаемых.

178. Что можно сказать о знаках чисел a и b, если:

1) $a\cdot b>0$; 2) $\frac{a}{b}>0$; 3) $a\cdot b<0$; 4) $\frac{a}{b}<0$?

179. 1) Расположить следующие числа в порядке возрастания, соединив их знаком неравенства: 0; -5; 2. Как прочитать эту запись?

2) Расположить следующие числа в порядке убывания, соединив их знаком неравенства: -10; 0,1; $-\frac{2}{3}$. Как прочитать эту запись?

180. Выписать в порядке возрастания все трехзначные числа, каждое из которых содержит цифры 2; 0; 5, и соединить их знаком неравенства.

181. 1) При однократном измерении некоторой длины l нашли, что она больше 217 *см*, но меньше 218 *см*. Записать результат измерения, взяв эти числа в качестве границ значения длины l.

2) При взвешивании предмета оказалось, что он тяжелее 19,5 *Г*, но легче 20,0 *Г*. Записать результат взвешивания с указанием границ.

182. При взвешивании некоторого предмета с точностью до 0,05 *кГ* получили вес $P\approx 26{,}4$ *кГ*. Указать границы веса этого предмета.

183. Где на числовой оси лежит точка, изображающая число x, если: 1) $3<x<10$; 2) $-2<x<7$; 3) $-1>x\geqslant-6$?

184. Найти и указать на числовой оси целые значения x, удовлетворяющие неравенствам:

1) $0{,}2<x<4$; 2) $-3\leqslant x<2$;

3) $\frac{1}{2}<x\leqslant 5$; 4) $-1\leqslant x<3$.

185. Какое число, кратное 9, заключено между числами 141 и 152? Дать иллюстрацию на числовой оси.

186. Определить, какое из двух чисел больше, если известно, что каждое из них больше 103 и меньше 115, причем первое число кратно 13, а второе кратно 3. Привести геометрическую иллюстрацию.

187. Между какими ближайшими целыми числами заключаются правильные дроби? Можно ли указать два целых числа, между которыми заключены все неправильные дроби?

188. Куплено 6 книг по математике, физике и истории. Сколько книг куплено по каждому предмету, если по математике книг куплено больше, чем по истории, а по физике меньше, чем по истории?

189. На уроке алгебры были проверены знания трех учеников. Какую оценку получил каждый ученик, если известно, что первый получил балл больше второго, а второй больше, чем третий, и число баллов, полученных каждым учеником, больше двух?

190. В шахматном турнире лучших результатов добились шахматисты A, B, C и D. Можно ли узнать, какое место занял каждый из участников турнира, если известно, что A набрал больше очков, чем D, а B меньше, чем C?

191. Дано неравенство $a > b$. Всегда ли $a \cdot c > b \cdot c$? Привести примеры.

192. Дано неравенство $a < b$. Верно ли неравенство $-a > -b$?

193. Можно ли, не изменяя знака неравенства, умножить обе части его на выражение x^2+1, где x — любое рациональное число?

194. Умножить обе части неравенства на указанный в скобках множитель.

1) $-3 < 1$ (5); 2) $2 < 5$ (-1); 3) $x > 2$ (x);
4) $a < -1$ (a); 5) $b < -3$ $(-b)$; 6) $x - 2 > 1$ (x).

195. Привести к целому виду неравенства:

1) $\frac{x-1}{x-2} > 0$, где $x \neq 2$;

2) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$;

3) $\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1} > 0$, где $x \neq \pm 1$.

196. Дана функция $y = kx$, где $k \neq 0$. Как изменяются значения функции y с возрастанием аргумента x, если: 1) $k > 0$; 2) $k < 0$? Обосновать ответы.

197. Дана функция $y = kx + b$, где $k \neq 0$, $b \neq 0$. Как изменяются значения функции y с убыванием значений аргумента x, если:

1) $k > 0$; 2) $k < 0$? Обосновать ответы.

198. Доказать, что если $a > b$ и $c > 0$, то $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$; если $a > b$ и $c < 0$, то $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

199. Разделить обе части неравенства на указанные в скобках числа:

1) $-6 < 3$ $\left(\frac{1}{3}\right)$; 2) $4 > -1{,}5$ (-1); 3) $a < -2a^2$ (a);

4) $a > a^2$ (a); 5) $a^3 > a^2$ $(-a)$.

200. Сложить почленно неравенства:

1) $12 > 11$ и $1 > -3$; 2) $-5 < 2$ и $4 < 8{,}2$;

3) $a - 2 < 8 + b$ и $5 - 2a < 2 - b$;

4) $x^2 + 1 > 2x$ и $x - 3 < 9 - x^2$.

201. Доказать, что каждая диагональ выпуклого четырехугольника меньше его полупериметра.

202. Доказать, что сумма двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника меньше суммы его диагоналей.

203. Вычесть почленно второе неравенство из первого:

1) $5 > 2$; $-3 < 1$; 2) $0{,}2 < 3$; $0{,}3 > -2$;

3) $7 < 11$; $-4 < -3$; 4) $2a - 1 > 3b$; $2b > 3$.

204. Доказать, что если $|x| < a$, то $-a < x < a$.

205. Следующие неравенства записать в виде двойных неравенств: 1) $|m| < 1$; 2) $|x - 2| < 2$.

206. Указать на числовой оси множество всех значений x, удовлетворяющих неравенствам: 1) $|x| < 2$; 2) $|x| \leqslant 1$; 3) $|x| > 3$; 4) $|x - 1| < 1$.

207. Доказать, что если $-a < x < a$, то $|x| < a$.

208. Заменить сокращенной записью двойные неравенства:

1) $-2 \leqslant a \leqslant 2$; 2) $-1 \leqslant 2n \leqslant 1$; 3) $1 < x < 3$.

209. Приближенное значение длины $l = 24{,}08\,(\pm 0{,}01)$ *мм*. Установить границы длины l.

210. Пятикратное измерение одного и того же расстояния при помощи метровой линейки дало следующие результаты: 21,56; 21,60; 21,59; 21,55; 21,61 (*м*). Найти среднее арифметическое результатов измерения с указанием границ абсолютной и относительной погрешностей.

211. При взвешивании груза получено $P = 16{,}7\,(\pm 0{,}4\%)$ *кГ*. Найти границы веса P.

212. $a \approx 16{,}4$, относительная погрешность $\varepsilon = 0{,}5\%$. Найти абсолютную погрешность Δa и установить границы, между которыми находится приближенное число.

213. Определить границу относительной погрешности приближенного значения каждого из следующих чисел, если приближенное значение взять с указанным количеством верных цифр: 1) $\frac{11}{6}$ с тремя верными цифрами; 2) $\sqrt{5}$ с четырьмя верными цифрами.

214. При измерении по карте расстояния между двумя городами нашли, что оно больше 24,4 *см*, но меньше 24,8 *см*. Найти действительное расстояние между городами и абсолютную погрешность вычисления, если масштаб карты 1 : 2 500 000.

215. Произвести вычисления и определить абсолютную и относительную погрешности результата: $x = a + b - c$, если $a = 7{,}22\ (\pm 0{,}01)$; $3{,}14 < b < 3{,}17$; $c = 5{,}4\ (\pm 0{,}05)$.

216. Перемножить почленно неравенства:

1) $7 > 5$ и $3 > 2$; 2) $3 < 5$ и $\frac{2}{3} < 2$;

3) $-6 < -2$ и $-3 < -1$; 4) $a > 2$ и $b < -2$.

217. Дано неравенство $a > b$. Всегда ли $a^2 > b^2$? Привести примеры.

218. Если $a > b > 0$ и n — натуральное число, то $a^n > b^n$. Доказать.

219. Что больше: $(0{,}3)^{20}$ или $(0{,}1)^{10}$?

220. Если $a > b > 0$ или $b < a < 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Доказать.

221. Вычислить площадь земельного участка прямоугольной формы длиной 437 *м* и шириной 162 *м*, если при измерении длины участка возможна погрешность ± 2 *м*, а при измерении ширины — погрешность ± 1 *м*.

Доказательство неравенств

222. Доказать неравенства:

1) $a + \frac{1}{a} < 1$ при $a < 0$;

2) $|a| - \frac{1}{a} > 1$ при $a < -1$;

3) $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} > 2$ при $-1 < a < 0$.

223. Доказать неравенства при $x > 1$:

1) $1 + \frac{1}{x} < 2$; 2) $\frac{4}{x^2} - \frac{x}{2} < 3\frac{1}{2}$; 3) $3x - \frac{2}{x^2} > 1$.

224. Если $a < b$, то $a < \frac{a+b}{2} < b$. Доказать.

225. Что больше:

1) $\frac{7}{\sqrt{195}}$ или $\frac{1}{2}$; 2) $\sqrt{5} + \sqrt{6}$ или $\sqrt{21}$;

3) $\sqrt{11} + \sqrt{15}$ или $\sqrt{12} + \sqrt{14}$?

226. 1) Если $x > 2$, то $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} > \frac{1}{2}$. Доказать.

2) Если $x > 12$, то $\frac{x+3}{3} + \frac{x+2}{2} < x$. Доказать.

227. Доказать неравенства:

1) $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\geqslant 2$, где $p>0$, $q>0$;

2) $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\geqslant 2$; 3) $\frac{a^2}{a^4+1}\leqslant\frac{1}{2}$;

4) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$, где $a>0$, $b>0$.

228. Доказать, что сумма квадратов двух неравных положительных чисел больше удвоенного произведения их.

229. Доказать, что среднее арифметическое двух положительных чисел a и b не меньше их среднего геометрического. Привести геометрическое пояснение для случаев: 1) $a=b$; 2) $a\neq b$.

230. Доказать, что в треугольнике сумма стороны с высотой, опущенной на эту сторону, больше полупериметра.

231. Доказать, что произведение суммы трех положительных чисел на сумму обратных величин этих чисел не менее девяти.

232. Дано: $a>0$, $b>0$. Как изменится величина дроби $\frac{a}{b}$, если и числитель, и знаменатель ее увеличить на одно и то же положительное число? Рассмотреть случаи: 1) $a<b$; 2) $a>b$.

233. Теплоход совершил путь AB по течению реки и путь BA против течения. Доказать, что средняя скорость теплохода в этом движении меньше его собственной скорости (собственную скорость теплохода и скорость течения реки считать постоянными).

234*. Самолет пролетел путь от A до B по ветру и путь от B до A против ветра, причем скорость ветра не изменялась. Затем самолет совершил рейс по тому же маршруту в безветренную погоду. В обоих случаях моторы самолета развивали одинаковую мощность. В каком случае на весь полет ушло меньше времени? Как зависит время, расходуемое на весь полет, от скорости ветра?

235*. Катер проплыл расстояние AB по течению реки и вернулся обратно, причем во время движения катера дул ветер в направлении течения.

1) Показать, что время, затраченное катером на этот рейс, больше того времени, которое потребуется ему на такой же рейс в безветренную погоду. Скорости течения и ветра, а также собственную скорость катера считать постоянной.

2) Выяснить, как изменится время, необходимое на этот рейс, если ветер направлен против течения и имеет ту же скорость.

236*. Два трактора могут вспахать поле за T_1 дней. Если бы первый трактор вспахал половину поля, а затем второй остальную часть, то потребовалось бы T_2 дней. Доказать, что $T_2\geqslant 2T_1$.

237*. Велосипедист должен был проехать в определенный срок некоторое расстояние, двигаясь с постоянной скоростью и без остановок. Однако он на одной части пути a увеличил скорость на m, а на остальной части на столько же уменьшил ее, причем прибыл к месту назначения своевременно. Доказать, что увеличение скорости m меньше предполагаемой постоянной скорости велосипедиста и что путь a более половины всего пути.

238*. Катер должен был проплыть путь AB по течению и путь BA против течения в определенный срок с постоянной собственной скоростью. На пути AB он уменьшил собственную скорость, а на пути BA на столько же километров в час увеличил ее. Опоздал ли катер?

Доказать неравенства.

239. 1) $a^2+b^2+c^2+3>2(a+b+c)$, если $a\neq 1$, $b\neq 1$, $c\neq 1$;

2) $x^2y^2+x^2+y^2+1>4xy$, если $x\neq 1$, $y\neq 1$;

3) $a^4+b^4\geqslant a^3b+ab^3$, где $a>0$, $b>0$;

4) $(m+n)(mn+1)>4mn$, если $m>0$, $n>0$, $m\neq n$.

240*. В треугольнике ABC дано: $a^3=b^3+c^3$, где a, b и c — длины сторон треугольника. Может ли быть угол A прямым или тупым?

Неравенства первой степени с одним неизвестным

241. Какие из чисел 5; —2; $1\frac{1}{4}$; 0; 2 являются решением неравенства:

1) $2(1-x)>5-3x$; 2) $\frac{2x}{2x-9}\leqslant 1$?

242. Равносильны ли неравенства:

1) $2x+5>0$ и $2x>-5$;

2) $-3x+4<0$ и $3x-4>0$;

3) $4x-5<0$ и $4x>5$;

4) $\frac{x-1}{2}+\frac{x+1}{3}<1$ и $3(x-1)+2(x+1)<6$;

5) $(x+2)(x^2+1)>0$ и $x+2>0$;

6) $x-1>2$ и $x-1+\frac{1}{x-4}>2+\frac{1}{x-4}$;

7) $x-2<1$ и $x-2-\frac{1}{x}<1-\frac{1}{x}$?

243. Может ли неравенство первой степени с одним неизвестным: а) быть противоречивым; б) удовлетворяться тождественно?

244. Каково множество всех решений непротиворечивого неравенства первой степени с одним неизвестным? Как это множество изображается на числовой оси?

245. Может ли неравенство первой степени с одним неизвестным иметь единственное решение?

246. Построить графики следующих функций:

1) $y=x+2$; 2) $y=0{,}5x-1$;

3) $y=-x-3$; 4) $y=3-2x$.

Определить по чертежу, при каких значениях аргумента x каждая из данных функций принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения; в) обращается в нуль.

Проверить ответы путем решения соответствующих неравенств (уравнений).

247. Даны две функции: $y_1 = x + 1$ и $y_2 = 3 - x$. Построить на одном и том же чертеже графики этих функций и определить, при каких значениях аргумента x выполняются соотношения: 1) $y_1 = y_2$; 2) $y_1 > y_2$; 3) $y_1 < y_2$.

Проверить ответы путем решения уравнения и соответствующих неравенств.

Решить следующие неравенства и указать, какие точки числовой оси изображают решения каждого из данных неравенств:

248. 1) $3 - 2x < 12 - 5x$; 2) $2x - 3 < 7(1 + x)$;

3) $3{,}5(x + 1) > 4x - \frac{x-1}{2}$; 4) $\frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < 2 + \frac{x}{6}$.

249. 1) $\frac{3x+5}{4} - 1 \leqslant \frac{x-2}{3} + x$;

2) $4(x + 1) + 3x > 7x + 2$;

3) $\frac{37-3x}{2} + 9 < \frac{2x-7}{4} - 2x$;

4) $\frac{x+1}{x-2} - \frac{1}{2} > \frac{3}{x-2}$.

250. 1) $(x - 2)(x^2 + 2) > 0$; 2) $\frac{2x-1}{x^2 - 5x + 7} < 0$.

251. Решить графически следующие неравенства:

1) $|x| > 2$; 2) $|x - 1| < 2$;

3) $|x + 2| < 3$; 4) $\left|\frac{x}{2} + 3\right| > 2{,}5$.

252. Дана система двух неравенств первой степени с одним неизвестным, каждое из неравенств непротиворечиво и не удовлетворяется тождественно. Какого вида промежутки могут получиться в результате решения этой системы (пояснить геометрически).

253. Решить системы неравенств и указать, где на числовой оси располагаются точки, изображающие решения:

1) $\begin{cases} 3x - 5 > 23 - 4x, \\ 7x + 3 < 9x - 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 1 > 3x + 4, \\ 5x + 3 \geqslant 8x + 21; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x - 2 \geqslant 2x + 1, \\ 2x + 3 < 18 - 3x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 1 > 2x - 3, \\ 4x + 5 > x + 17; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 10(x - 1) + 11 > 4x + 5(x + 1), \\ 3x - 5 < 2(x - 1). \end{cases}$

254. Найти целые решения следующих систем:

1) $\begin{cases} 2(3x-4) < 3(4x-3)+16, \\ 4(1+x) < 3x+5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x > 2-\dfrac{2x-13}{11}, \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{2}{3}(x-7) < \dfrac{3x-20}{9}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3} \geqslant \dfrac{x-3}{4}-x, \\ 1-0{,}5x > x-4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x+2}{3} \leqslant \dfrac{x-3}{4}, \\ 1{,}5x-5{,}05 < x. \end{cases}$

255. Равносильны ли следующие неравенства:

$$(x-1)(x+2) > 0, \quad \frac{x-1}{x+2} > 0, \quad \frac{x+2}{x-1} > 0?$$

Решить неравенства.

256. 1) $(x+1)(x-2) > 0$; 2) $x(3-x) > 0$;
3) $(x-4)(1-3x) < 0$; 4) $(1-x)(6-x) < 0$.

257. 1) $(x-1)(x+2) > x+2$;
2) $(x+4)(x+6) < 6(x+6)$;
3) $(2x+3)(3x-2)(x^2+2) < 0$;
4) $(x-8)(8-5x)(x-2)^2 > 0$.

258. 1) $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$;
2) $(6-x)(x+5)(x+4) < 0$;
3) $(10-x)(11-x)(12-x) > 0$;
4) $(x+2)(x+4)(x-5)(x-3) > 0$.

259. 1) $\dfrac{2x-5}{x-2} > 0$; 2) $\dfrac{x+3}{7-x} < 0$;
3) $\dfrac{3-0{,}5x}{4-\dfrac{2}{3}x} > 0$; 4) $\dfrac{7x+4}{5(x+1)} < 0$.

260. 1) $\dfrac{x+1}{x+2} > 3$; 2) $\dfrac{4-3x}{3-2x} < 1$;
3) $\dfrac{9x}{10+x} > 4$; 4) $\dfrac{5-x}{x-6} < \dfrac{2}{3}$.

261. Найти область определения функции.

1) $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{1-3x}}$; 2) $y=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x-3}}$.

262. Решить неравенства:

1) $|2x-3|<2$; 2) $|0{,}5x+1|>1{,}5$;

3) $|x-1|+x<1$; 4) $|x|-|x-1|>0$.

Привести геометрическую иллюстрацию в каждом случае.

263. В двузначном числе цифра единиц на два больше цифры десятков, само число больше 30 и меньше 40. Найти это число.

264. Если бы велосипедист проезжал в день на 5 *км* больше того, что он в действительности проезжает, то за 6 дней он проехал бы меньше 400 *км*. Если бы он проезжал на 10 *км* менее, чем на самом деле, то за 12 дней он проехал бы более 400 *км*. Сколько километров проезжает в день велосипедист?

---

265. Найти положительные решения следующих уравнений:

1) $(n+1)(x-1)+2=0$; 2) $a^2(x-1)+4=4x(a-1)$;

3) $\frac{5}{x-11}+\frac{6(x+2)}{11-x}=b$; 4) $\frac{2}{2x-m}+\frac{1}{mx-2}=0$.

266. Найти отрицательные решения следующих уравнений:

1) $(a-1)(x-1)=1$; 2) $s(s+1)-2(sx+1)=s^2(x+1)$;

3) $\frac{5}{2x-k}=\frac{3}{4-kx}$; 4) $a-5+\frac{2a+5}{x-2}=0$.

267. При каких целых значениях a уравнение $a+\frac{2}{x+1}=3$ имеет положительное решение? Найти это положительное решение уравнения.

268. При каких целых значениях a уравнение $a+5+\frac{2}{x-1}=0$ имеет отрицательное решение? Найти это отрицательное решение уравнения.

269. При каких значениях a уравнение $\frac{1}{a}+\frac{1}{ax}=1$ имеет решение, бо́льшее, чем 2?

270. Определить, при каких значениях a уравнение $(x-1)(a-2)=1$ будет иметь решение, заключенное в промежутке от 1 до 2.

271. Определить, при каких значениях параметров a и b следующие уравнения имеют: а) положительное решение; б) отрицательное решение; в) бесконечное множество решений; г) совсем не имеют решений:

1) $\frac{a}{3a+x}=\frac{2}{b+x}$; 2) $ab+x=b(x+2)$.

Решить следующие задачи и исследовать полученную формулу решения. При исследовании решения: 1) определить множество допустимых значений параметров и соотношения между ними, при которых задача имеет смысл; 2) установить множество допустимых значений искомой величины, удовлетворяющих условию задачи; 3) отобрать те решения, которые дают ответ на вопрос задачи.

272. Один рабочий обрабатывает в день на 5 деталей больше, чем второй. Если первый будет каждый день обрабатывать на 1 деталь, а второй на 9 деталей больше, чем они обрабатывают, то за 6 дней первый обработает столько деталей, сколько обработает второй за a полных дней. Сколько деталей обрабатывает каждый рабочий в день?

273. На школьной математической олимпиаде было предложено для решения 5 задач. За каждую правильно решенную задачу засчитывалось 5 очков, а за каждую нерешенную задачу списывалось 3 очка. Сколько задач было решено учеником, который при окончательном подсчете получил n очков?

274. Переднее колесо повозки имеет в окружности a *м*, а заднее — b *м*. Как велик путь, на котором переднее колесо сделает одним оборотом больше заднего?

275. Камень весит в воде P *кГ*; удельный вес его d *Г/см*^{3} $(d > 1)$. Сколько килограммов весит камень в воздухе?

276. По дороге стоят три селения: A, B и C, причем B находится между A и C. Расстояние от A до B равно 8 *км*, от B до C — 20 *км*. Из A и B одновременно в C отправились велосипедист и пешеход. Скорость велосипедиста v_1 *км/ч*, скорость пешехода v_2 *км/ч* $(v_1 > v_2)$. Каковы должны быть соотношения между скоростями v_1 и v_2, чтобы велосипедист догнал пешехода, не доезжая до селения C? в селении C?

277. Два пешехода отправились одновременно из пункта A в пункт B: один — по шоссе со скоростью v *км/ч*, другой — ближайшим путем, по тропинке, со скоростью 4 *км/ч* и пришел в пункт B на 1 *ч* раньше первого. Определить расстояние от пункта A до пункта B по тропинке, если путь по шоссе на 6 *км* длиннее. При каких значениях v задача имеет определенное решение?

278. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно отправились пешеход и велосипедист. После встречи пешеход продолжал свой путь в B, а велосипедист же повернул назад и тоже поехал в B. Пешеход, вышедший из A, пришел в B на t *ч* позже велосипедиста. Сколько времени прошло до встречи, если известно, что скорость велосипедиста в k раз больше скорости пешехода?

279*. Два тела движутся по окружности в одном направлении и встречаются через каждые a *сек*. Если эти тела будут двигаться навстречу друг другу, то они будут встречаться через каждые b *сек*. За сколько секунд каждое тело пробегает окружность?

§ 5. СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

280. Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными приведена к виду:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

При каком условии эта система: 1) имеет единственное решение; 2) несовместна; 3) имеет бесконечное множество решений? Дать геометрическую иллюстрацию для каждого случая.

281. Не решая следующих систем, определить, имеет ли каждая из них единственное решение, бесконечное множество решений или совсем не имеет решений:

$$1)\ \begin{cases} x+2y=5, \\ 2x+3y=8; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 3x+4y=5, \\ 6x+8y=10; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 2x-5y=3, \\ 4x+10y=6; \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} 9x-6y=3, \\ 3x-2y=2; \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} x-y-3=0, \\ -x+y+3=0; \end{cases} \qquad 6)\ \begin{cases} x-0{,}1y+2=0, \\ 10x-y+3=0. \end{cases}$$

282. К каждому из следующих уравнений присоединить второе уравнение так, чтобы полученная система: а) имела единственное решение; б) была несовместной; в) имела бесконечное множество решений:

1) $x-y+10=0$; 2) $0{,}2x=5-2y$; 3) $4x-y=0$.

283. Может ли быть несовместной система уравнений:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=0, \\ a_2x+b_2y=0? \end{cases}$$

284. Решить графически следующие системы:

$$1)\ \begin{cases} x-2y=1, \\ y-x=1; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x+2y-3=0, \\ 2x+4y+2=0; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x-y=3, \\ 2x-2y=6; \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x-y+3=0, \\ 2x+y-3=0; \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} 3x+3y=6, \\ x+y=2; \end{cases} \qquad 6)\ \begin{cases} 3x-y=3, \\ 2y-6x=6. \end{cases}$$

285. При каких значениях a и b прямые $3x-y+b=0$ и $ax-2y-10=0$: 1) пересекаются в точке (2; —1); 2) параллельны между собой; 3) сливаются в одну прямую?

286. При каких значениях m система уравнений

$$\begin{cases} 2x - 5y = 10, \\ 3x - 2y = m \end{cases}$$

имеет решение: 1) $x > 0$, $y > 0$; 2) $x < 0$, $y < 0$; 3) $x > 0$, $y < 0$; 4) $x < 0$, $y > 0$?

287. При каких значениях n система уравнений

$$\begin{cases} 3x + ny = 3, \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$$

имеет решение: 1) $x > 0$, $y > 0$; 2) $x < 0$, $y < 0$; 3) $x > 0$, $y < 0$; 4) $x < 0$, $y > 0$?

288. Определить, при каких значениях a и b следующие системы уравнений: а) имеют бесконечное множество решений; б) не имеют решений:

$$1)\ \begin{cases} 5x + (a-1)\,y = 3b, \\ x - 2y = 3; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x + 8y = b, \\ \dfrac{x}{a-1} + (a-3)\,y = a+1. \end{cases}$$

289. Определить, при каких значениях k следующие системы уравнений: а) имеют бесконечное множество решений; б) не имеют решений:

$$1)\ \begin{cases} (k+2)\,x + 6y = 30 - 5k, \\ 6x + (k+7)\,y = 30; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} kx + 2y = k + 2, \\ (2k-1)\,x + (k+1)\,y = 2(k+1). \end{cases}$$

290. Исследовать следующие системы относительно параметра m:

$$1)\ \begin{cases} (m+3)\,x - 2y = 5, \\ (m+1)\,x + y = 7; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} (m-5)\,x - 2y = m - 7, \\ (m+1)\,x + my = 3m. \end{cases}$$

291. Если разделить двузначное число на сумму его цифр, то в частном получим 6, а в остатке 3. Если же разделить это число на сумму его цифр, увеличенную на 2, то в частном и в остатке получим по 5. Найти это двузначное число.

292. Дорога из A в B длиной 11,5 *км* идет сначала в гору, потом по ровной местности и затем под гору. Пешеход, идя из A в B, прошел всю дорогу за 2 *ч* 54 *мин*, а на обратную дорогу затратил 3 *ч* 6 *мин*. Скорость пешехода в гору 3 *км/ч*, по ровной местности 4 *км/ч*, под гору 5 *км/ч*. На каком протяжении дорога идет по ровной местности?

293. Три города A, B и C не расположены на прямой. Расстояние от A до C, через B, в 4 раза более прямого пути от A до C; расстояние от B до A, через C, на 5 *км* более прямого пути от B до A; расстояние от C до B, через A, равно 85 *км*. Определить расстояние между городами.

294*. На прокормление нескольких лошадей и коров отпускали ежедневно 162 *кг* сена: на каждую лошадь по 9 *кг*, а на каждую корову — по 6 *кг* в день. Если бы число коров увеличилось на $\frac{1}{3}$, а число лошадей — на $\frac{1}{4}$ первоначального количества голов, то при той же норме пришлось бы отпускать ежедневно свыше 208 *кг* сена. Сколько было лошадей и сколько было коров?

Решить следующие задачи и исследовать полученное решение.

295. Всадник отправился из пункта A в пункт B, отстоящий от A на 60 *км*. Его лошадь шла 4 *ч* рысью и 3 *ч* шагом. На обратном пути лошадь шла рысью a полных часов, а шагом на 2 *ч* больше, чем рысью. Определить скорость движения лошади рысью и шагом.

296. Один покупатель купил a *м* сукна и b *м* шелка и за всю покупку заплатил d руб.; другой покупатель по той же цене купил m *м* сукна и n *м* шелка и заплатил также d руб. Сколько стоил метр сукна и метр шелка отдельно?

297. На участке в c *км* поезд шел x *ч* со скоростью 50 *км/ч* и y *ч* со скоростью 60 *км/ч*. Известно, что если бы поезд шел x *ч* со скоростью 60 *км/ч* и y *ч* со скоростью 50 *км/ч*, то он прошел бы путь в 210 *км*. Найти x и y. При каких значениях c задача имеет решение?

298*. Кусок сплава из двух металлов весом P *кГ* выталкивается из воды силой a *кГ*. Кусок такого же веса P *кГ* первого из двух составляющих металлов выталкивается из воды силой b *кГ*, а второго — c *кГ*. Найти вес составляющих металлов и исследовать возможность решения задачи в зависимости от величин P, a, b, c.

299*. Из пункта A в пункт B выезжают одновременно автомобиль, мотоциклист и велосипедист. Доехав до пункта B, автомобиль снова отправляется в A и встречает сначала мотоциклиста на расстоянии a *км* от пункта B, а затем велосипедиста на расстоянии b *км* от пункта B. На обратном пути мотоциклист встречает велосипедиста на расстоянии c *км* от пункта B. Найти расстояние между пунктами A и B.

3

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 6. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Измерение отрезков

300. 1) Дан отрезок a (рис. 2). Построить отрезки, длины которых равны соответственно $3a$; $1\frac{2}{3}a$; $0{,}6a$; $1{,}75a$. Каким числом выразится длина каждого из построенных отрезков, если за единицу измерения принять отрезок, равный: а) $\frac{1}{3}a$; б) $2a$; в) $\frac{3}{4}a$?

Рис. 2.

2) Пользуясь масштабной линейкой, построить отрезок, длина которого равна 1,3 *дм*; 0,74 *дм*; 12,8 *см*.

301. 1) Выразить десятичной дробью длину отрезка, равную $2\frac{7}{40}$; $1\frac{10}{11}$; $3\frac{8}{15}$; $\frac{5}{6}$; $4\frac{2}{7}$ линейных единиц.

2) Выразить обыкновенной дробью длину отрезка, равную 0,375; 5,16; 1,555...; 0,2333...; 2,4(09) линейных единиц.

Привести рассуждения, подтверждающие существование отрезков длиной 1,555...; 0,2333...; 2,4(09) линейных единиц.

3) Приняв некоторый отрезок за единицу длины, построить отрезки, равные $2\frac{2}{3}$; 1,6; 0,75; 3,25; 2,333...; 3,454545...; 2,1666...; 0,4(9) линейных единиц.

Лабораторная работа № 1

1) Изготовить из плотной бумаги набор линеек с делениями в $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$ и $\frac{1}{12}$ *дм*.

2) Начертить в тетради пять различных отрезков и, подбирая подходящую для измерения линейку, найти наиболее точно длину каждого отрезка.

3) Построить параллелограмм с углом в 60° и сторонами, равными $\frac{5}{4}$ *дм* и $\frac{5}{12}$ *дм*, и найти измерением (с помощью набора изготовленных линеек) высоту параллелограмма и длину каждой его диагонали.

302. Седьмая часть единицы длины укладывается в измеряемом отрезке 13 раз.

1) Конечной или бесконечной периодической десятичной дробью выразится длина этого отрезка?

2) Найти приближенные значения длины отрезка с точностью до 1; 0,1; 0,01 по недостатку и по избытку и записать с помощью знаков неравенства, что эта длина заключена между соответствующими ее приближениями.

3) Дать геометрическую иллюстрацию на числовой оси процесса сближения точек, изображающих приближенные значения длины отрезка.

303. 1) При измерении некоторого отрезка оказалось, что единица длины отложилась на измеряемом отрезке 4 раза с остатком, меньшим этой единицы; 0,1 единицы длины отложилась в остатке 5 раз с новым остатком, меньшим 0,1 единицы; 0,01 единицы длины отложилась во втором остатке 3 раза с остатком, меньшим 0,01 единицы. Найти длину измеряемого отрезка по недостатку и по избытку с точностью до 0,01 единицы длины.

2) Найти длину отрезка по недостатку и по избытку с точностью до 0,001 единицы длины, если известно, что 0,1 единицы уложилась в измеряемом отрезке 2 раза с остатком, меньшим 0,1 единицы; 0,01 единицы длины уложилась в остатке 7 раз с новым остатком, меньшим 0,01 единицы; 0,001 единицы длины уложилась в новом остатке 3 раза с остатком, меньшим 0,001 единицы.

304*. Доказать, что при десятичном измерении отрезков никогда не может получиться бесконечная десятичная дробь, в которой, начиная с некоторого места, стоят одни девятки.

Понятие об иррациональном числе

305. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 60°.

1) Приняв меньший катет этого треугольника за единицу, найти длину гипотенузы.

2) Доказать, что при выбранной единице измерения длину большего катета этого треугольника нельзя выразить никаким рациональным числом.

3) Найти приближенные значения длины большего катета треугольника с точностью до 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 по недостатку и по избытку и записать при помощи знаков неравенства, что эта длина заключена между соответствующими ее приближениями.

4) Дать геометрическую иллюстрацию на числовой оси процесса сближения точек, изображающих приближенные значения длины большего катета треугольника.

306. Даны числа $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$.

1) Доказать, что значение каждого из этих корней нельзя выразить никаким рациональным числом.

2) Найти приближенное значение каждого корня с точностью до 0,001.

307. Какие из следующих чисел являются рациональными и какие иррациональными:

1) $\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{11}$; 3) $\sqrt{18}$; 4) $\frac{2}{7}$; 5) 0; 6) —15,6; 7) $-\sqrt{5}$; 8) 0,666...; 9) 0,313313331...; 10) 0,2424442777...; 11) 1,3131252525...; 12) 3,030030003...; 13) 0,277000...; 14) 2,34234223422234...; 15) 5,1511555...?

308. Иррациональное число π, выражающее величину отношения длины окружности к своему диаметру, равно 3,1415926535....

Записать при помощи знаков неравенства приближенные значения числа π с точностью до 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 по недостатку и по избытку.

309. Доказать, что не существует рационального числа, 1) квадрат которого равен: а) 3; б) 5; в) P, где P — простое число; 2) куб которого равен: а) 2; б) 3; в) 4.

310. 1) Правильно ли утверждение, что квадратный корень из рационального числа всегда число иррациональное?

2) Привести примеры, показывающие, что квадратный корень из рационального числа может быть выражен: а) целым числом; б) конечной десятичной дробью; в) бесконечной десятичной периодической дробью.

311. Привести примеры таких уравнений, для решения которых требуются иррациональные числа.

312. Дана функция $y = x^2$.

1) Какими числами выражаются абсциссы точек графика этой функции, ординатами которых служат целые числа: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9?

2) Какие из этих абсцисс соизмеримы с единицей масштаба, какие несоизмеримы?

3) Найти приближенные значения иррациональных абсцисс с точностью до 0,01.

313. Длины отрезков (при одной и той же единице измерения) выражаются следующими числами: 3; 1,1; $\sqrt{2}$; 0,7; $2\frac{11}{13}$; $\sqrt{5}$; 0,012(3). Какие из этих отрезков соизмеримы и какие несоизмеримы с единицей длины?

314. Какие из следующих пар отрезков соизмеримы и какие несоизмеримы друг с другом, если длины этих отрезков при одной и той же единице измерения выражаются числами:

1) 2 и $\frac{2}{5}$; 2) 5 и $\sqrt{5}$; 3) $0{,}5\sqrt{2}$ и $\frac{3}{7}\sqrt{2}$;

4) $0{,}1(2)$ и $3\frac{5}{11}$; 5) $2\sqrt{2}$ и $0{,}1\sqrt{0{,}125}$?

315. 1) Если два отрезка несоизмеримы друг с другом, то могут ли оказаться соизмеримыми один из этих отрезков и а) половина второго; б) третья часть второго; в) n-я часть второго?

2) Соизмеримы ли медиана гипотенузы и гипотенуза прямоугольного треугольника?

316. Известно, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной. Как можно, используя это свойство, построить сколько угодно много различных по длине отрезков, несоизмеримых со стороной данного квадрата?

317. Может ли отношение двух отрезков, несоизмеримых с единицей длины, выражаться рациональным числом?

318. Соизмеримы ли отрезки, если их отношение выражается дробью: 1) $0{,}777\ldots$; 2) $2{,}121122111222\ldots$?

319. Рациональным или иррациональным числом выражается длина гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника, если длина каждого его катета: 1) равна 2 линейным единицам; 2) выражается числом $\sqrt{2}$?

320*. Из вершины A квадрата $ABCD$ начали одновременно двигаться с одинаковой постоянной скоростью две точки: одна — по периметру квадрата, без изменения направления движения, а другая — по диагонали, между вершинами A и C, не задерживаясь в них. Определить, встретятся ли когда-либо эти две точки.

Действительные числа. Геометрическое представление действительных чисел

321. Сравнить по величине следующие действительные числа и поставить между ними знак $>$ или $<$:

1) $7{,}5$ и $7{,}498$; 2) $3{,}1416$ и $3{,}14159$; 3) $-54{,}71$ и $-54{,}698$;

4) $1{,}212121\ldots$ и $1{,}21121112\ldots$; 5) $3{,}141592$ и $\frac{22}{7}$;

6) $-\sqrt{10}$ и $-3{,}162$; 7) $3\frac{4}{7}$ и $\sqrt{12{,}8}$; 8) $\sqrt{29}$ и $5\frac{5}{13}$;

9) $-1\frac{41}{56}$; $-\sqrt{3}$ и $-\frac{71}{41}$.

322. Как при помощи построения точек на числовой оси, изображающих приближенные значения какого-либо иррационального числа, например $2{,}757757775\ldots$ по недостатку и по избытку, показать, что этому иррациональному числу соответствует определенная точка числовой оси?

323. Доказать, что: 1) если концы A и B отрезка AB числовой оси изображают рациональные числа, то середина отрезка AB также изображает рациональное число; 2) между каждыми двумя точками числовой оси существует бесконечное множество точек, изображающих: а) рациональные числа, б) иррациональные числа.

324. 1) В каком смысле говорят, что между множеством точек числовой оси и множеством всех действительных чисел существует взаимно однозначное соответствие?

2) Почему соответствие между множеством всех точек числовой оси и множеством всех рациональных чисел нельзя назвать взаимно однозначным? Какие числа необходимо добавить к множеству рациональных чисел, чтобы всякой точке числовой оси соответствовало определенное число?

325. Где на числовой оси лежит точка, изображающая действительное число x, если:

$$1)\ |x| = \sqrt{3};\quad 2)\ |x| < 5;\quad 3)\ |x| > 2?$$

326. Пользуясь схемой (таблица 2), дать описание постепенного расширения понятия числа от множества натуральных чисел до множества действительных чисел.

Таблица 2

<table>
<tr><td>Целые положительные (натуральные) числа</td><td>Дробные положительные числа</td><td rowspan="2">Нуль</td><td>Целые отрицательные числа</td><td>Дробные отрицательные числа</td><td rowspan="2">Положительные иррациональные числа</td><td rowspan="2">Отрицательные иррациональные числа</td></tr>
<tr><td colspan="2">Положительные числа</td><td colspan="2">Отрицательные числа</td></tr>
<tr><td colspan="5">Рациональные числа</td><td colspan="2">Иррациональные числа</td></tr>
<tr><td colspan="7">Действительные (вещественные) числа</td></tr>
</table>

327. Назвать несколько элементов множества: 1) натуральных чисел; 2) положительных чисел; 3) отрицательных чисел; 4) целых чисел; 5) рациональных чисел; 6) иррациональных чисел; 7) действительных чисел.

328. Назвать несколько общих элементов: 1) множества отрицательных чисел и множества рациональных чисел; 2) множества рациональных чисел и множества действительных чисел.

Понятие о действиях над действительными числами

329. Составить таблицу сумм приближенных значений $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, вычисленных с точностью до 1; до 0,1; до 0,01 и т. д. по недостатку и избытку. Пользуясь определением суммы иррациональных чисел, найти четыре десятичных знака бесконечной дроби, выражающей сумму $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

330. Найти первые три десятичных знака бесконечных дробей, выражающих результаты следующих действий:

1) $2+\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$;
5) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; 6) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$; 7) $\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{3}$;
8) $3{,}141592-2\frac{2}{3}$; 9) $0{,}9090090009\ldots-\sqrt{5}$.

331. Может ли сумма или разность двух иррациональных чисел быть числом рациональным? Ответ подтвердить примерами.

332. Почему сумма и разность двух чисел не могут быть рациональными числами, если одно из данных чисел рационально, а другое иррационально? Ответ подтвердить примерами.

333*. Существует ли равносторонний треугольник (рис. 3), вершины которого лежат в вершинах малых квадратов?

334. Что больше: $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ или $\sqrt{3}+\sqrt{19}$?

335. Составить таблицу произведений приближенных значений $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, вычисленных с точностью до 1; до 0,1; до 0,01 и т. д. по недостатку и по избытку. Пользуясь определением произведения иррациональных чисел, найти три первых десятичных знака бесконечной дроби, выражающей произведение $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$.

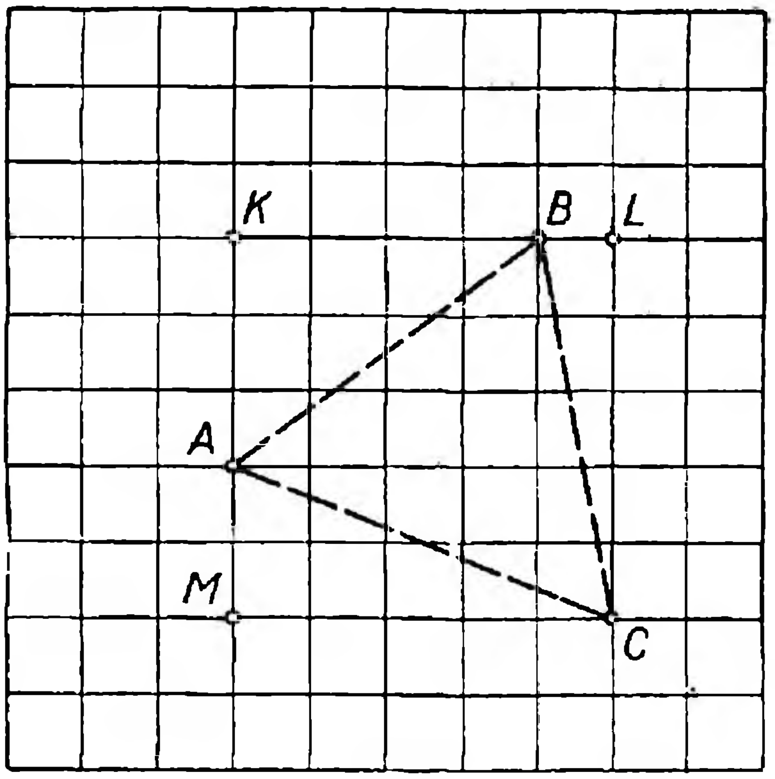


Рис. 3.

336. Найти первые три десятичных знака бесконечных непериодических десятичных дробей, выражающих величину произведения:

1) $3\cdot 0{,}274376\ldots$; 2) $8\cdot\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$.

337. Если x — рациональное число, а y — иррациональное число, то в каком случае $x\cdot y$ и $\frac{x}{y}$ будут рациональными числами?

338. Какое из шести действий — сложение, вычитание, умножение, деление (кроме деления на нуль), возвышение в степень и извлечение корня — выполнимо во множестве всех положительных чисел; рациональных чисел; действительных чисел?

§ 7. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Неполные квадратные уравнения

339. По сторонам прямого угла от его вершины одновременно начинают двигаться два точечных тела: скорость одного тела 3 *см/сек*, другого 4 *см/сек*. Через сколько секунд расстояние между телами будет равно 35 *см*?

340. Утроенное неизвестное число равно квадрату этого неизвестного. Найти число.

341. Написать общий вид квадратного уравнения, в котором: 1) один корень равен нулю; 2) оба корня равны нулю; 3) корни равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Как решается каждое из этих уравнений?

342. Равносильны ли уравнения:

1) $x^2 = -3x$ и $x^2 + 3x = 0$; 2) $0{,}5x^2 - 2 = 0$ и $x^2 = 4$?

343. Показать на графике, что:

1) уравнение $x^2 - 4 = 0$ равносильно совокупности уравнений: $x + 2 = 0$ и $x - 2 = 0$;

2) уравнение $x^2 + 2x = 0$ равносильно совокупности уравнений: $x = 0$ и $x + 2 = 0$.

344. Показать графически, что уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

345. Решить графически следующие уравнения:

1) $x^2 - 2|x| = 0$; 2) $0{,}5x^2 = 2 \cdot |x| + x$;

3) $x^2 = \sqrt{2}$; 4) $x^2 - \sqrt{3} = 0$.

346. Проиллюстрировать на графике, что:

1) уравнение $ax^2 + bx = 0$ ($a \neq 0$ и $b \neq 0$) имеет два действительных корня, из которых один равен нулю, а другой отличен от нуля;

2) уравнение $ax^2 + c = 0$: а) при $\frac{c}{a} < 0$ имеет два действительных корня, равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку; б) при $\frac{c}{a} > 0$ не имеет действительных корней.

Решить уравнения.

347. 1) $(2x + 3)^2 - (x - 2)^2 = 5$;

2) $(5 - 3x)(3x + 5) - 2x(x - 3) = 25$;

3) $\frac{6x}{x+3}+2=\frac{x+3}{x}$; 4) $\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x-9}=1$;

5) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=2\frac{1}{2}$; 6) $2x^2-3\cdot|x|=x$;

7) $x^2-|x|=x\cdot|x-1|$.

348. 1) $(x+a)(x-a)-2ax=a(3a-2x)$;

2) $(x+13a)^2+9(x+3a)^2=4(x+10a)^2$;

3) $(2a+x)(2b-x)+(2a-x)(2b+x)+2a^2+8b^2=0$;

4) $(x-a)(x-b)+(a+b)x=(b-x)(a+x)$.

349. 1) $\frac{x-m}{n}=\frac{m}{x-n}$; 2) $\frac{ax+4}{a}=\frac{a-8}{ax-4}$;

3) $(x+c)(x-c)=a(a+2c)$; 4) $n^2(1+x)^2=(n^2+x)^2$.

350. 1) $\frac{a-x}{1-ax}=\frac{1-bx}{b-x}$; 2) $\frac{x-a}{ax+b}=\frac{x+a}{x-b}$;

3) $\frac{x^2+2ax}{x^3-a^3}+\frac{x}{(x+a)^2-ax}=\frac{1}{x-a}$;

4) $\frac{(a-x)^2+(x-b)^2}{(a-x)^2-(x-b)^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$, $a\neq b$, $a+b\neq 0$.

351. Определить, при каких значениях k один из корней следующих уравнений равен нулю:

1) $2x^2-x+3k-5=0$; 2) $3x^2-kx+2k-0{,}1=0$;

3) $x^2+(k-1)x+k^2-4=0$;

4) $(k+2)x^2-5x-k^2+k=0$.

352. Определить, при каких значениях n следующие уравнения имеют корни, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку:

1) $x^2+n^2(x-1)-x=0$; 2) $2x^2+nx-18+n=0$;

3) $2x^2+x+(n-2)(nx+1)-n-1=0$;

4) $x^2-4x-nx+2n-1=0$; 5) $3x^2+nx-2n+18=0$.

353. Определить, при каких значениях a следующие уравнения имеют двойной корень, равный нулю:

1) $x^2+ax+2a=0$; 2) $x^2-2x+ax-a+2=0$.

354. Составить квадратное уравнение, корнями которого были бы числа: 1) 0 и $\frac{a-b}{2}$; 2) 0 и $\frac{1}{m+n}$; 3) m^2 и $-m^2$; 4) $\frac{1}{n}$ и $-\frac{1}{n}$. Какой член отсутствует в каждом из получившихся уравнений?

355*. В какой системе счисления: 1) число 183 запишется как 503; 2) число 146 запишется как 102?

356*. В какой системе счисления справедливо равенство:

1) $250+70=300$; 2) $21+223+342=606$; 3) $534-351=143$?

Полные квадратные уравнения

357. Из листа жести прямоугольной формы приготовлена открытая сверху коробка таким образом, что по углам листа вырезано по квадрату со стороной в 4 *см* и получившиеся края загнуты (рис. 4). Какого размера был лист жести, если длина его вдвое больше ширины и если объем коробки 768 *куб. см*?

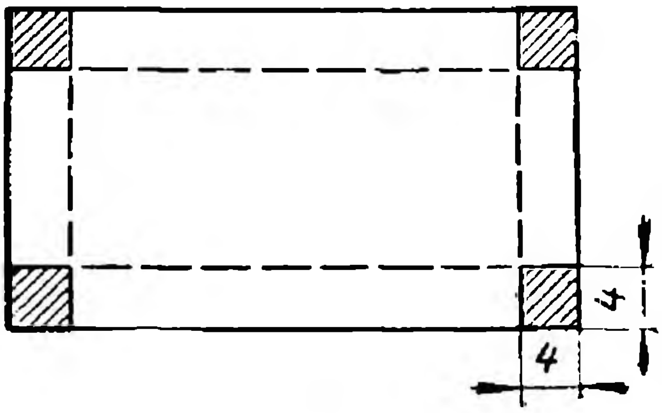


Рис. 4.

358. Доказать, что уравнение $(x-1)\times(x+2)=0$ равносильно совокупности уравнений $x-1=0$, $x+2=0$. Привести графическую иллюстрацию.

359. Решить уравнения:

1) $(x+3)(2x-1)=0$; 2) $(0,1x-0,2)(5x+2)=0$;

3) $(x-2)^2-9=0$; 4) $(3x+1)^2-5=0$.

360. Решить уравнения путем выделения квадрата двучлена:

1) $x^2+6x+8=0$; 2) $x^2-10x+9=0$;

3) $x^2-3x=1,75$; 4) $x^2+x=2$;

5) $x^2+px+\frac{p^2}{4}=m$; 6) $x^2+px+q=0$.

361. При каких значениях x трехчлен $y=x^2-2x-8$: 1) обращается в нуль; 2) принимает значение, равное 7; 3) имеет значение, равное -10; 4) может быть равным двучлену $(4-x)$?

362. Решить уравнения:

1) $x^2-\frac{2}{7}x-47=0$; 2) $x^2-0,1(6)x-8,5=0$;

3) $5x^2-6x+1,75=0$; 4) $\sqrt{2}x^2-10x+8\sqrt{2}=0$;

5) $(x-1)(x-2)-(x-2)(x-3)=2(x-2)(x-4)$.

363. Вычислить с точностью до 0,01 приближенные значения корней следующих уравнений:

1) $x^2+x-5=0$; 2) $2x^2-17x+9=0$;

3) $7x^2+13x-3=0$; 4) $11x^2-10x-9=0$.

364. Вычислить приближенные значения корней следующих уравнений с приближенными коэффициентами, преобразовав их к приведенному виду:

1) $1,2x^2-0,80x-3,1=0$; 2) $0,31x^2+2,3x-3,405=0$;

3) $2,452x^2-8,52x+5,011=0$; 4) $3,219x^2+4,108x+1,234=0$.

365. Равносильны ли следующие уравнения:

1) $x^2=2x+3$ и $x^2-2x-3=0$;
2) $(x-1)(x+5)=2(x-1)$ и $x+5=2$;
3) $(x-1)(x+5)=2(x-1)$ и $(x-1)(x+3)=0$;
4) $\frac{x-1}{x+2}=\frac{2x+1}{x+2}$ и $x-1=2x+1$;
5) $\frac{x-1}{x-2}=\frac{2x-3}{x-2}$ и $x-1=2x-3$?

Решить уравнения.

366. 1) $\frac{x^2-1}{x}+\frac{2x+1}{x}=3$; 2) $\frac{x^2}{x-2}-\frac{x+2}{x-2}=4$;
3) $1+\frac{2}{x-1}-\frac{6}{x^2-1}=\frac{3}{x+1}$; 4) $\frac{x+1}{2x-2}=\frac{x}{x-1}+\frac{7-2x}{2x+2}$.

367. 1) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x(x-4)}{x^2-4}=\frac{x-2}{x+2}-\frac{4(1+x)}{4-x^2}$;
2) $\frac{6}{x-1}+\frac{6}{(x-1)(x-3)}+\frac{3}{3-x}=7$;
3) $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{4}{(x-1)(x-2)}-\frac{x-1}{x-2}$;
4) $\frac{6}{4x^2-1}+\frac{3}{2x+1}=\frac{2}{2x-1}+1$.

368. Решить графически следующие уравнения:

1) $x^2+x-2=0$ (сравнить с рис. 5, *а*, *б*, *в*, *г*);
2) $x^2+2x-3=0$; 3) $2x^2-3x-2=0$;
4) $x^2+|x|-2=0$; 5) $2x^2-|x|-1=0$.

Решить уравнения с буквенными коэффициентами.

369. 1) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$; 2) $x^2-2(a+b)x+4ab=0$;
3) $x^2-3ax+2a^2=0$; 4) $x^2-ax-2a^2=0$.

370. 1) $ax^2-(a+1)x+1=0$; 2) $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$;
3) $abx^2-(a^2-b^2)x+(a-b)^2=0$; 4) $x^2+1=a(x^2-1)-2x$.

371. 1) $x(x+3)+a(a-3)=2(ax-1)$;
2) $(x-a)^2+(x-b)^2=(a-b)^2$;
3) $(x-a)^2+(1-ax)^2-2x=2a(a-2)x$;
4) $(1+ax)x=(1-x)a^2+a+1$.

372. 1) $x+\frac{1}{a}=a+\frac{1}{x}$; 2) $x-\frac{1}{m}=m-\frac{1}{x}$;
3) $x+\frac{bx}{x-2a}=\frac{2ab}{x-2a}$; 4) $\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}=2$.

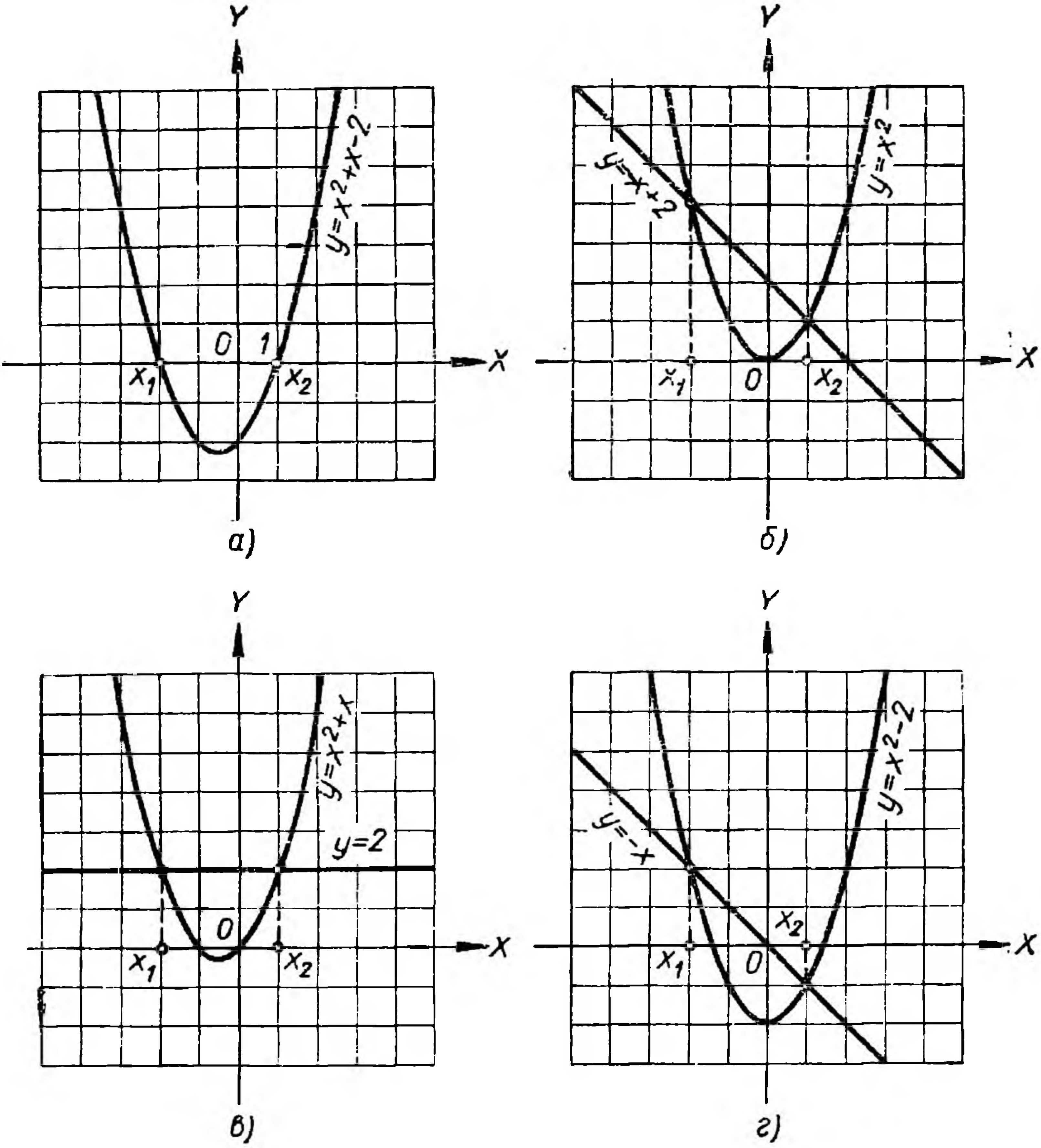


Рис. 5.

373*. 1) $(x-1)(x-2)=(a-1)(a-2)$; 2) $\dfrac{x-4}{(x-5)^2}=\dfrac{a-4}{(a-5)^2}$.

374*. 1) $\dfrac{x-a}{x-b}+\dfrac{x-b}{x-a}+2=0$; 2) $\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{2a}{x+a}=\dfrac{8a^2}{x^2-a^2}$;

3) $\dfrac{x-a}{x-b}-\dfrac{x-b}{x-a}+\dfrac{4ab}{a^2-b^2}=0$;

4) $\dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=1$.

375*. 1) $\dfrac{(a-x)^2+(x-b)^2}{(a-x)^2-(x-b)^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; 2) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a+b+x}$;

3) $\dfrac{a}{a+x}+\dfrac{b}{b+x}=\dfrac{(a+b)^2}{ab}$; 4) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

Свойства корней квадратного уравнения

376. Найти сумму и произведение корней каждого из следующих уравнений:

1) $x^2-9x+20=0$; 2) $x^2+2x-80=0$;
3) $12x^2-x-1=0$; 4) $2x^2+13x+21=0$.

377. Сформулировать и доказать теорему, обратную теореме Виета.

378. Составить квадратное уравнение, если: 1) сумма его корней -7, а произведение 12; 2) сумма корней $\frac{1}{30}$, а произведение $-\frac{1}{30}$.

Составить квадратное уравнение по данным его корням.

379. 1) 5 и 2; 2) $-0{,}1$ и 10; 3) $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{2}{3}$ и $-\frac{2}{3}$.

380. 1) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$; 2) $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{15}$; 3) 0 и $-\sqrt{6}$; 4) $-\sqrt{6}$ и $-\sqrt{6}$.

381. 1) $5-\sqrt{5}$ и $5+\sqrt{5}$; 2) $1+\sqrt{3}$ и $1-\sqrt{3}$;
3) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{2}-1$ и $\sqrt{2}+1$.

382. 1) m и n; 2) $a+b$ и $a-b$; 3) $\frac{p}{q}$ и $\frac{q}{p}$; 4) $\frac{1}{a+b}$ и $\frac{1}{a-b}$.

383. 1) Может ли квадратное уравнение с рациональными коэффициентами иметь своими корнями числа:

а) 5 и $2+\sqrt{3}$, б) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$, в) $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$?

2) Почему иррациональные корни квадратного уравнения с рациональными коэффициентами должны быть сопряженными друг другу?

384. 1) Один из корней квадратного уравнения с рациональными коэффициентами равен $\sqrt{2}-1$. Чему равен второй корень?
2) Один из корней квадратного уравнения с действительными коэффициентами равен $3-\sqrt{2}$. Можно ли найти другой корень? Дать обоснованный ответ.

385. Составить квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, один из корней которого равен $\sqrt{3}-2$.

386. Не решая уравнения $x^2-4x-2=0$, определить, является ли число $\sqrt{2}-2$ корнем этого уравнения.

387. 1) Один из корней уравнения $x^2-x+a=0$ равен 2. Найти второй корень и свободный член этого уравнения.
2) Один из корней уравнения $x^2+kx-5=0$ равен 5. Определить второй корень и коэффициент k.

388. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$. Найти сумму и произведение корней нового квадратного уравнения, если известно, что его корни равны корням данного уравнения, а) умноженным на m; б) сложенным с числом n.

389. Какая существует зависимость между коэффициентами уравнения $x^2+px+q=0$, если известно, что один из его корней равен -1?

390. Один из корней уравнения $x^2+px+q=0$ равен $-p$. Определить q.

391. 1) Не вычисляя корней уравнения $5x^2-7x-34=0$, составить новое уравнение, корни которого были бы обратны корням данного уравнения.

2) Составить квадратное уравнение, корни которого были бы обратны корням уравнения $ax^2+bx+c=0$, $c\neq 0$. Чем отличается полученное уравнение от исходного?

392. Составить квадратное уравнение, корнями которого были бы числа, противоположные корням уравнения $x^2+px+q=0$. Почему в этом случае меняется знак второго члена и не меняется знак свободного члена?

393. Не вычисляя корней уравнения:

1) $x^2+x-56=0$; 2) $x^2-7x-8=0$,

составить новое квадратное уравнение, корни которого были бы противоположны корням данного уравнения.

394. Какая зависимость существует между коэффициентами квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, если известно, что корни его — взаимно обратные числа?

395. При каких значениях a один из корней уравнения $4x^2-15x+4a^3=0$ равен квадрату другого корня?

396. Не вычисляя корней уравнения $2x^2-5x-3=0$, найти сумму и разность: 1) квадратов его корней; 2) кубов его корней.

397. Дано уравнение $x^2+px+q=0$. Выразить через p и q: 1) сумму и разность квадратов его корней; 2) сумму и разность кубов корней этого уравнения.

398. В уравнении $x^2-4x+q=0$ определить то значение q, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию $5x_1+9x_2=0$.

399. Дано уравнение $ax^2+bx+c=0$.

1) Доказать, что корни уравнения $x^2+bx+ac=0$ равны корням данного уравнения, умноженным на a.

2) Используя это свойство, устно решить следующие неприведенные квадратные уравнения:

а) $2x^2-11x+15=0$; б) $5x^2-11x+6=0$;
в) $10x^2-11x+3=0$; г) $3x^2+11x+6=0$;
д) $2x^2-9x+9=0$; е) $2x^2+x-10=0$;
ж) $3x^2+x-4=0$; з) $4x^2+12x+5=0$.

400*. Дано уравнение $ax^2+bx+c=0$.

1) Доказать, что при условии $a+b+c=0$ один из корней данного уравнения равен единице, а другой корень равен отношению коэффициентов $\frac{c}{a}$.

2) Показать, что если $a-b+c=0$, то один из корней уравнения равен -1, а другой корень равен $-\frac{c}{a}$.

3) Решить устно следующие уравнения:

а) $5x^2-7x+2=0$; б) $6x^2+17x+11=0$;
в) $(a^2+b^2)x^2+2abx-(a+b)^2=0$;
г) $3abx^2-(a^2+ab+b^2)x+(a-b)^2=0$;
д) $9x^4-13x^2+4=0$; е) $27x^6-35x^3+8=0$;
ж) $11x^2+17x+6=0$;
з) $2abx^2+(a+b)^2x+a^2+b^2=0$.

Разложить на множители следующие трехчлены:

401. 1) $x^2+7x+10$; 2) $x^2+3x-108$;
3) $x^2-17x+72$; 4) $x^2+5{,}9x+8{,}5$.

402. 1) x^2-6x+4; 2) $x^2-8x+13$;
3) $2x^2+3x-6{,}48$; 4) $30x^2+37x+10$.

403. 1) $y^2-ay-(ab+b^2)$; 2) $z^2-(2ab+c)z+2abc$;
3) $x^2+ax-(a\sqrt{b}+b)$; 4) $(1-a^2)x^2-4ax-(1-a^2)$.

404. Сократить следующие дроби:

1) $\frac{x^2+x-12}{x^2+8x+16}$; 2) $\frac{4m^2+12m+9}{2m^2-m-6}$;
3) $\frac{a^n+2a^{n-1}-3a^{n-2}}{a^2+5a+6}$; 4) $\frac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}$.

Исследование корней квадратного уравнения

405. Уравнение второй степени с одним неизвестным приведено к виду $ax^2+bx+c=0$.

При каких значениях a, b, c и соотношениях между ними это уравнение: 1) имеет различные действительные корни; 2) имеет равные действительные корни; 3) не имеет действительных корней?

406. Написать общий вид квадратного уравнения, заведомо имеющего действительные корни.

407. Не решая квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, найти его корни, зная, что дискриминант этого уравнения равен b^2.

408. 1) Указать условие, при выполнении которого квадратное уравнение с рациональными коэффициентами имеет иррациональные корни.

2) Не решая уравнений, определить, какие из них имеют рациональные и какие иррациональные корни.

а) $x^2+8x-35=0$; б) $x^2-8x+9=0$;
в) $5x^2+7x+2=0$; г) $3x^2+12x+11=0$;
д) $7x^2-5x-2=0$; е) $9x^2-30x+25=0$.

409. При каких значениях m каждое из следующих уравнений имеет два равных корня:

1) $x^2+6x+m=0$; 2) $x^2+mx+25=0$;
3) $mx^2-4x+1=0$; 4) $mx^2-4x+m=0$.

410. При каких значениях k каждое из следующих уравнений имеет два различных действительных корня:

1) $x^2-4x+k=0$; 2) $x^2+kx+9=0$;
3) $(k-4)x^2+2(k-2)x+k=0$;
4) $kx^2+2(k+1)x+k+3=0$.

411. При каких значениях n каждое из следующих уравнений не имеет действительных корней:

1) $x^2-8x+2n=0$; 2) $4x^2+3nx+36=0$;
3) $\frac{4}{5}nx^2-x+5n=0$; 4) $(n-1)x^2+nx+n+1=0$.

412. Не решая следующих уравнений, определить, какие из них имеют действительные корни: а) различных знаков; б) положительные; в) отрицательные:

1) $x^2-18x+31=0$; 2) $x^2+18x+31=0$;
3) $x^2-18x-31=0$; 4) $x^2+18x-31=0$;
5) $x^2-7x+13=0$; 6) $15x^2+17x-8=0$;
7) $3x^2-18x+25=0$; 8) $13x^2+x-120=0$.

413. Не решая данных уравнений, указать, какие из них имеют действительные корни противоположных знаков и какой из этих корней каждого уравнения имеет большую абсолютную величину:

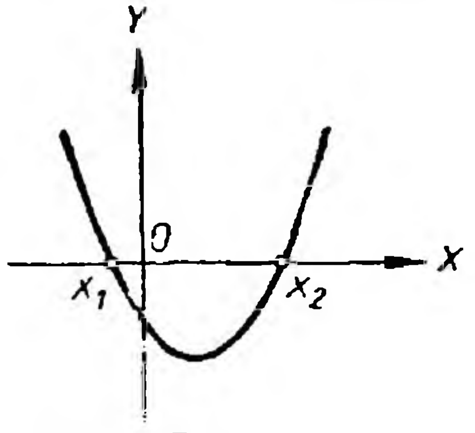
1) $11x^2+6x-6=0$; 2) $x^2-16x+19=0$;
3) $17x^2-15x+4=0$; 4) $3x^2-7x-4=0$;
5) $5x^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{5}=0$; 6) $x^2-(3+\sqrt{2})x+3\sqrt{2}=0$.

414. Дано уравнение $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c — действительные числа, не равные нулю. Принимая $a>0$, исследовать корни x_1 и x_2 этого уравнения по его дискриминанту и коэффициентам. Результаты исследования свести в следующую таблицу (3) и подтвердить примерами.

415. При каких значениях a следующие уравнения будут иметь два положительных неравных корня:

1) $3x^2-6x+a=0$; 2) $ax^2+2(a-6)x+a=0$?

Таблица 3

$D=b^2-4ac$		b	Выводы	Графическая иллюстрация
$D>0$	$c<0$	$b<0$	$x_1<0,\ x_2>0$ $\lvert x_1\rvert<\lvert x_2\rvert$	
		$b>0$		
	$c>0$	$b<0$		
		$b>0$		
$D=0$	$c>0$	$b<0$		
		$b>0$		
$D<0$				

416. Найти значение k так, чтобы каждое из следующих уравнений имело два равных: а) положительных корня; б) отрицательных корня:

1) $5x^2+2kx+5=0$; 2) $kx^2-(k-7)x+9=0$.

417. При каких значениях a уравнение $(a-2)x^2+2(a-3)x+a-5=0$ имеет два действительных корня: 1) положительных; 2) отрицательных; 3) разных знаков, причем отрицательный корень имеет меньшую абсолютную величину; 4) разных знаков, причем положительный корень имеет меньшую абсолютную величину?

418. При каких значениях a уравнение $x^2-2ax+a^2-1=0$ имеет два различных корня, заключенных в интервале $(1,5)$?

419*. 1) Доказать, что значение выражения x^2+px+q при $x=-\frac{p}{2}$ равно дискриминанту уравнения $x^2+px+q=0$, взятому с противоположным знаком. Как воспользоваться этим свойством при исследовании корней приведенного квадратного уравнения?

2) Исследовать уравнения:

а) $x^2-12x+9=0$; б) $x^2+10x+26=0$; в) $x^2-2(a-b)x-2ab=0$.

420. 1) Показать, что координаты точек пересечения прямой $x+y=-p$ и равнобочной гиперболы $xy=q$ (p и q — данные действительные числа) являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$. Пользуясь графиком, выяснить условия существования действительных корней этого уравнения.

2) Применяя доказанную теорему, решить графически следующие уравнения:

а) $x^2-2x-3=0$. Сравнить с графиком (рис. 6);

б) $x^2-5x+4=0$; в) $x^2-2x+2=0$;

г) $x^2-4=0$; д) $2x^2+3x-14=0$.

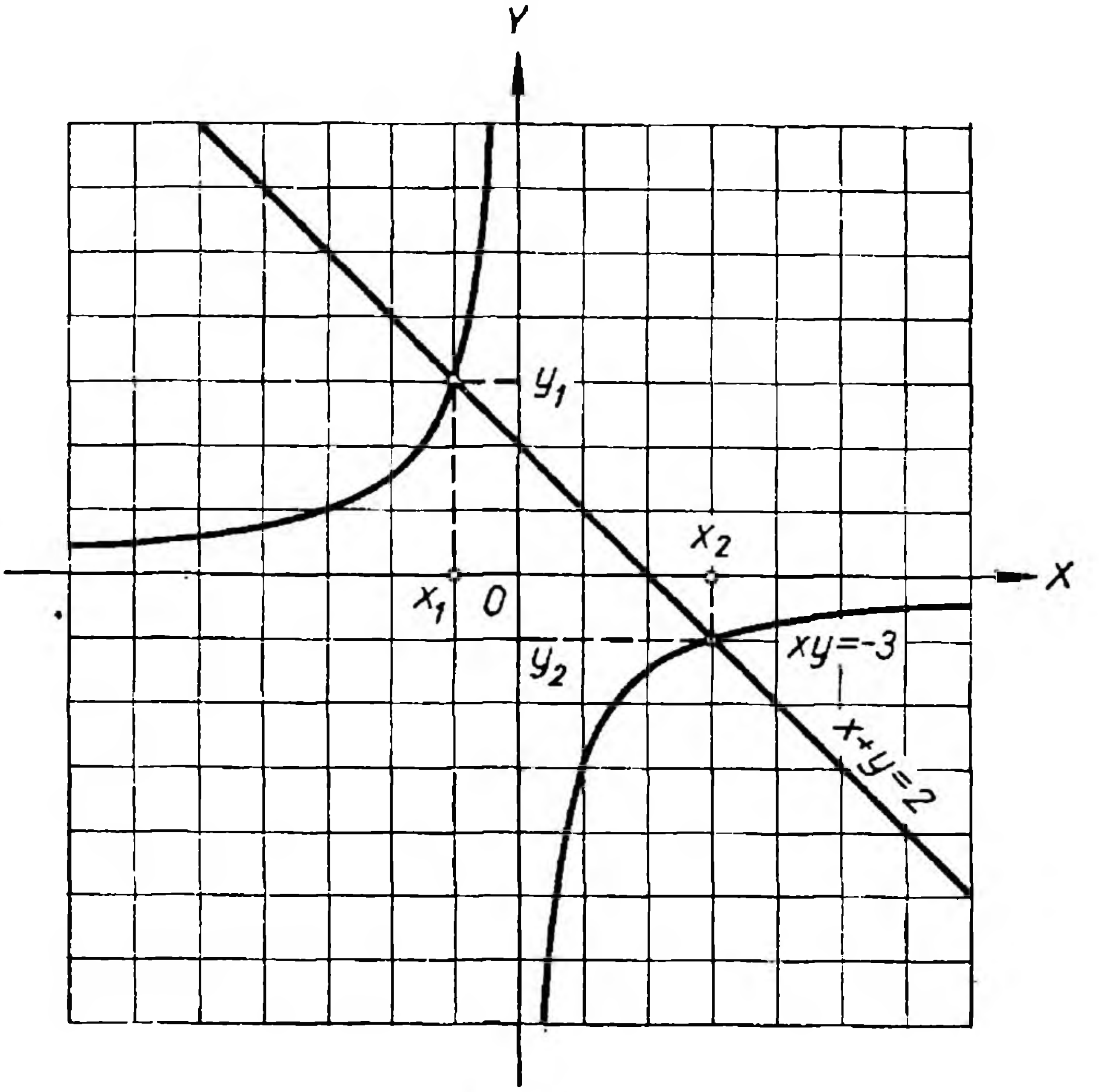


Рис. 6.

421. Показать на графике, что уравнение $x^2-2x+a=0$:

1) при $a<0$ имеет два действительных корня разных знаков, причем абсолютная величина положительного корня больше абсолютной величины отрицательного корня;

2) при $0<a<1$ имеет два различных положительных корня;

3) при $a>1$ не имеет действительных корней.

Исследовать каждый случай путем построения: а) параболы $y=x^2-2x+a$; б) параболы $y=x^2$ и прямой $y=2x-a$; в) параболы $y=x^2-2x$ и прямой $y=-a$; г) прямой $x+y=2$ и гиперболы $xy=a$.

422. Дано уравнение $2x^2+5x+a=0$. Показать на графике, что:

1) при $a<0$ данное уравнение имеет два действительных корня разных знаков, причем абсолютная величина отрицательного корня больше абсолютной величины положительного корня;

2) при $0<a<3\frac{1}{8}$ уравнение имеет два различных отрицательных корня;

3) при $a>3\frac{1}{8}$ уравнение не имеет действительных корней.

Исследование провести одним из способов, указанных в задаче 421.

423. Исследовать графически следующие уравнения:

1) $x^2-0{,}5x+a=0$; 2) $x^2+x+a=0$;
3) $x^2-6x+a=0$; 4) $0{,}5x^2+3{,}5x+a=0$;
5) $x^2+ax+4=0$; 6) $2x^2+3ax+18=0$.

Задачи на составление квадратных уравнений

424. 1) Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел равна 1201. Найти эти числа.

2) Сумма квадратов двух последовательных четных чисел равна 1060. Найти эти числа.

3) Сумма квадратов двух последовательных нечетных чисел равна 1354. Найти эти числа.

425. Возможен ли такой прямоугольный треугольник, стороны которого выражаются: 1) тремя последовательными целыми числами, 2) тремя последовательными четными числами, 3) тремя последовательными нечетными числами?

426. 1) Возможен ли такой выпуклый многоугольник, в котором число всех диагоналей было бы равно 12?

2) В каком выпуклом многоугольнике число сторон равно числу всех его диагоналей?

427*. При каком основании системы счисления число 314 запишется как 222?

428*. При каком основании системы счисления справедливо равенство:

1) $532-244=244$; 2) $15^2=321$?

429. При умножении двух чисел, из которых одно на 10 больше другого, ученик допустил ошибку, уменьшив на единицу цифру сотен в произведении. При делении (для проверки ответа) полученного произведения на меньший из множителей он получил в частном 45, а в остатке 14. Найти множители.

430. От дома до школы 400 *м*. Ученик старшего класса делает на этом пути на 300 шагов меньше, чем ученик младшего класса, так как у него шаги на 30 *см* больше. Определить длину шага каждого ученика.

431. Для перевозки 60 *т* груза за один рейс было затребовано некоторое количество автомашин определенной грузоподъемности. На перевозку были направлены автомашины грузоподъемностью на полтонны меньшей, но на 4 автомашины больше. Какое количество автомашин было затребовано?

432. Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде равна 10 *км/ч*, прошла вниз по течению 91 *км* и вернулась обратно. Определить скорость течения реки, зная, что на весь путь было затрачено 20 *ч*.

433. Поезд должен был пройти 220 *км* в определенное время. Однако через 2 *ч* движения он был задержан на 10 *мин*, и, чтобы прийти вовремя в место назначения, он увеличил скорость на 5 *км/ч*. Определить первоначальную скорость поезда.

434. Из колхоза в город, расстояние между которыми 35 *км*, выехал велосипедист. Через 30 *мин* из того же колхоза по той же дороге в город выехал второй велосипедист, который за час проезжал на 2 *км* больше первого. Сколько километров в час проезжал каждый велосипедист, если известно, что второй догнал первого велосипедиста, не доезжая 5 *км* до города?

435. Время, затрачиваемое автобусом на прохождение расстояния в 325 *км*, в новом расписании сокращено на 40 *мин*. Определить среднюю скорость движения автобуса по новому расписанию, если она на 10 *км/ч* больше средней скорости, предусмотренной старым расписанием.

436. Одна бригада выполняла задание в течение 3,5 дней, затем она была заменена второй, которая закончила работу за 6 дней. За сколько дней каждая бригада в отдельности выполнила бы задание, если известно, что второй бригаде для этого нужно на 5 дней больше, чем первой?

437. Числитель дроби на 2 больше ее знаменателя. Если сложить эту дробь с обратной ей дробью, то получится $2\frac{4}{35}$. Найти исходную дробь.

438. Бак имеет два крана, через первый он наполняется, через второй опоражнивается, причем опоражнивается на 1 *мин* быстрее, чем наполняется. Однажды, когда бак был наполнен до половины, открыли оба крана, и через 10 *мин* бак опорожнился. Определить, за сколько минут первый кран наполнит бак, если второй будет закрыт.

439*. Два автомобиля выехали в одном и том же направлении одновременно из одного пункта. Скорость первого автомобиля 50 *км/ч*, а скорость второго — 40 *км/ч*. Спустя 0,5 *ч* из того же пункта в том же направлении выехал третий автомобиль, который обогнал второй автомобиль, а после этого через 1,5 *ч* догнал первый автомобиль. Определить скорость третьего автомобиля.

440*. По окружности, длина которой 60 *м*, равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна делает полный оборот на 5 *сек* скорее другой и при этом догоняет вторую точку каждую минуту. Определить скорости точек.

441. Два куска латуни имеют массу 30 *кг*. Первый кусок содержит 5 *кг* чистой меди, а второй кусок — 4 *кг*. Сколько процентов меди содержит первый кусок латуни, если второй содержит меди на 15% больше первого?

442. Расстояние между станциями A и B равно 120 *км*. Из A в B отправляется один поезд, а через 3 *ч* другой, проходящий в час на 10 *км* больше первого. Второй поезд прибывает в B на 2 *ч* позже первого. Сколько времени находился в пути первый поезд?

443. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу — первый из A, а второй из B — и встретились через 3 *ч*. За сколько времени прошел расстояние между пунктами каждый пешеход, если первый пришел в B на 2,5 *ч* позже, чем второй пришел в A?

444. Двое рабочих, работая совместно, могут выполнить некоторую работу за 6 *ч*. Если сначала первый рабочий выполнит половину этой работы, а затем другой — остальную ее часть, то работа будет закончена за 12 *ч* 30 *мин*. Во сколько времени каждый рабочий, работая отдельно, может выполнить всю работу?

445. Из шахматного турнира двое участников выбыли, причем один сыграл 10 партий, а второй только одну. Поэтому в турнире было сыграно всего 55 партий. Определить, играли ли выбывшие участники между собой и сколько было участников первоначально.

Решить следующие задачи и исследовать полученные решения.

446. Сколько шахматистов участвовало в турнире, если каждый из них сыграл по одной партии с каждым из остальных участников, а всего было сыграно a партий? Какие значения может принимать параметр a?

447. Для отправки n пионеров в лагерь было заказано несколько автобусов. К назначенному времени один автобус не прибыл, поэтому в каждый автобус пришлось посадить на 5 человек больше, чем предполагалось. Сколько автобусов было занято перевозкой пионеров?

448. Автомобиль должен был пройти S *км* за определенное время. Пройдя 18 *км*, он сделал остановку на 15 *мин* и, чтобы прийти вовремя, увеличил скорость на m *км/ч*. Найти первоначальную скорость автомобиля.

449. Из двух станций, расстояние между которыми a *км*, были отправлены навстречу друг другу два поезда. Один поезд вышел на час раньше другого со скоростью на m *км/ч* меньшей скорости другого поезда. Определить скорость каждого поезда, если известно, что они встретятся на середине пути.

450. Пароход прошел по течению реки m *км* и вернулся обратно, затратив на весь путь 8 *ч*. Найти собственную скорость парохода, зная, что скорость течения реки равна 3 *км/ч*.

451. В раствор, содержащий P *г* соли, добавили 100 *г* воды, после чего концентрация раствора уменьшилась на 25%. Сколько воды содержал раствор?

452. Выпуклый многоугольник имеет всего d диагоналей. Сколько у этого многоугольника внутренних углов?

453. Число всех диагоналей выпуклого многоугольника на a больше числа его сторон. Определить число сторон этого многоугольника. Найти число сторон многоугольника, соответствующее наименьшему положительному значению параметра a.

454. Две силы приложены к телу под прямым углом друг к другу. Одна из этих сил на b *кГ* больше другой, а их равнодействующая на $2b$ *кГ* меньше суммы этих сил. Найти величину каждой составляющей силы.

455. К окружности из одной точки проведены касательная и секущая. Длина секущей равна 20 *см*. Найти длину касательной, если она на a *см* больше внешней части секущей.

456. В прямоугольном листе жести со сторонами a *см* и b *см* $(a > b)$ требуется вырезать прямоугольное отверстие площадью S *см*^{2} так, чтобы его края были на одинаковом расстоянии от краев листа. Определить это расстояние.

457*. Перевозка одной тонны груза от пункта M до пункта N по железной дороге обходится на b коп. дороже, чем водным путем. Сколько тонн груза можно перевезти из M в N по железной дороге на сумму S руб., если водным путем на ту же сумму можно перевезти на k тонн больше, чем по железной дороге?

§ 8. БИКВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решить биквадратные уравнения.

458. 1) $x^4 + x^2 - 2 = 0$; 2) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$;
3) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$; 4) $20x^4 - x^2 - 1 = 0$.

459. 1) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$; 2) $x^4 - 40x^2 + 144 = 0$;
3) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$; 4) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$.

460. 1) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$; 2) $256x^4 - 32x^2 + 1 = 0$;
3) $x^4 - 8x^2 + 20 = 0$; 4) $5x^4 - 4x^2 + 1 = 0$.

461. 1) $x^4 - 9x^2 = 0$; 2) $4x^4 - x^2 = 0$;
3) $x^4 + 0,1x^2 = 0$; 4) $2x^4 + 5x^2 = 0$.

462. Убедиться, что уравнение $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ не имеет действительных корней. Почему этот вывод можно сделать, не решая уравнения?

463. Дано биквадратное уравнение $ax^4+bx^2+c=0$, где a, b, c — данные действительные числа, причем $a>0$. Введя вспомогательное неизвестное $y=x^2$, исследовать корни данного уравнения и результаты исследования занести в таблицу 4.

Таблица 4

c	b		Выводы	
			о корнях вспомогательного уравнения $ay^2+by+c=0$	о корнях данного уравнения $ax^4+bx^2+c=0$
$c<0$	b — любое действительное число		уравнение имеет два действительных корня разных знаков: $y_1<0,\quad y_2>0$	уравнение имеет два действительных противоположных корня: $x_{1,2}=\pm\sqrt{y_2}$
$c>0$	$b<0$	$D>0$		
		$D=0$		
		$D<0$		
	$b\geqslant 0$			
$c=0$	$b>0$			
	$b=0$			
	$b<0$			

464. Решить уравнения:

1) $x^4-(a^2+1)x^2+a^2=0$;
2) $x^4+16m^2=16x^2+m^2x^2$;
3) $x^4+a^2b^2=(a^2+b^2)x^2$;
4) $m^2n^2x^4-(m^4+n^4)x^2+m^2n^2=0$;
5) $x^4-(mn+1)x^2+mn=0$;
6) $x^4+mn=(m+n)x^2$.

465. Почему биквадратное уравнение, имеющее корень, равный m, имеет также и второй корень, равный $-m$?

466. Один из корней биквадратного уравнения равен 2, а другой корень $2\sqrt{2}$. Составить уравнение.

467. Составить биквадратное уравнение, сумма квадратов корней которого равна 26, а произведение корней равно 36.

468. Разложить на множители:

1) x^4-12x^2+32; 2) x^4-20x^2+96;
3) $6x^4-5x^2+1$; 4) $x^4-(1-2a+2a^2)x^2+a^2(a-1)^2$.

469. Сократить дроби:

1) $\dfrac{a^4-11a^2+24}{a^4-17a^2+72}$; 2) $\dfrac{x^4-2(a^2+b^2)x^2+4a^2b^2}{x^4-(2a^2+b^2)x^2+2a^2b^2}$;
3) $\dfrac{x^4+(2a+1)x^2-a^2(a+1)^2}{x^4+a(a+2)x^2-(a+1)^2}$; 4) $\dfrac{36x^4-(9a^2+4b^2)x^2+a^2b^2}{9x^4-(9a^2+b^2)x^2+a^2b^2}$.

470. Решить уравнения посредством введения вспомогательного неизвестного:

1) $(x^2-8)^2+4(x^2-8)-5=0$;
2) $(x^2+6x)^2+8(x^2+6x)-9=0$;
3) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-4=0$;
4) $\dfrac{1}{x^2+2x-3}+\dfrac{18}{x^2+2x+2}=\dfrac{18}{x^2+2x+1}$.

471. Решить уравнения выделением из левой части полного квадрата:

1) $x^4-20x^2+64=0$; 2) $x^4-13x^2+36=0$;
3) $x^4-4x^2+1=0$; 4) $x^4-2x^2+1=0$.

472*. Зная, что m и n — корни уравнения $x^2+px+q=0$, найти биквадратное уравнение, имеющее корни $-m$, $-n$, m и n.

473. Решить уравнения:

1) $\dfrac{x}{3(x^2-1)}+\dfrac{2x}{3(1-x^4)}=\dfrac{1}{x(1+x^2)}$;
2) $\dfrac{1}{2(x^2+1)}+\dfrac{7{,}5}{x^2(1-x^4)}=\dfrac{9}{2x^2(x^2-1)}$;
3) $(x+5)^4-13(x+5)^2x^2+36x^4=0$;
4) $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2=\dfrac{10}{9}$.

474*. В какой системе счисления число 100 запишется в виде 10 201?

475. Сумма площадей двух квадратов равна 4,25 *дм*^{2}. Найти коэффициенты подобия этих квадратов, если известно, что их стороны выражаются взаимно обратными числами.

476. Каким радиусом следует описать дугу с центром на окружности, радиус которой R, чтобы расстояние между точками пересечения этой дуги с данной окружностью было равно a, где $a<2R$.

Применить полученную формулу решения для выражения стороны правильного шестиугольника, восьмиугольника и двенадцатиугольника, вписанных в данную окружность, полагая a соответственно равным $R\sqrt{3}$; $R\sqrt{2}$ и R.

Уравнение второй степени с двумя неизвестными

477. 1) При постоянном напряжении на концах участка электрической цепи сила тока обратно пропорциональна сопротивлению цепи. Составить уравнение, выражающее зависимость между силой тока I в амперах и соответствующим сопротивлением R в омах для участка цепи, находящегося под напряжением в 12 *в*.

2) Составить таблицу частных решений уравнения $I \cdot R = 12$:

R	0,1	1	2	3	4	6	8	10	12
I									

Являются ли решением уравнения $I \cdot R = 12$ значения I и R, равные 0?

3) Построить график изменения силы тока в зависимости от соответствующего сопротивления (сравнить с рис. 7).

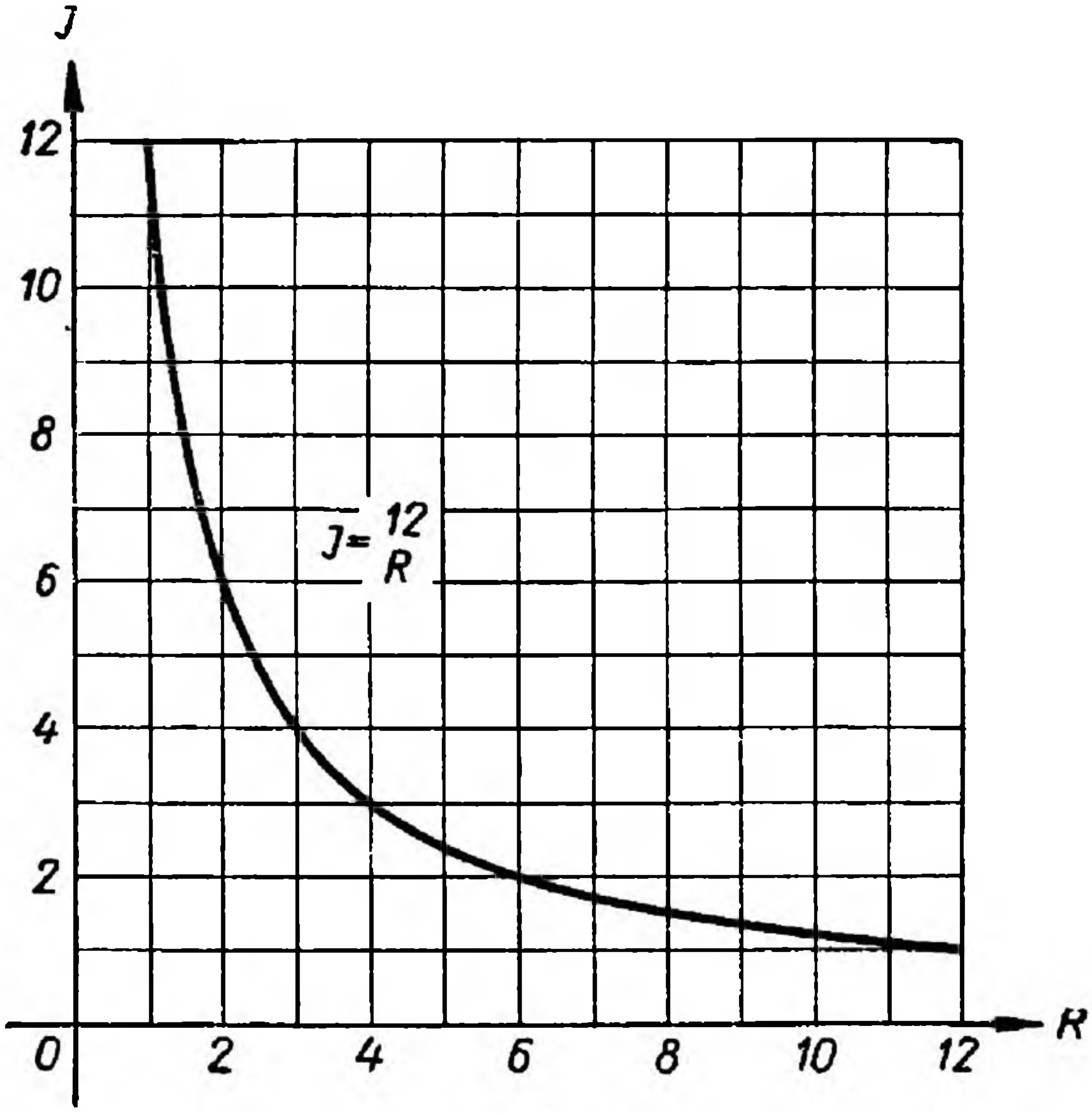


Рис. 7.

4) Определить по графику значения силы I тока при следующих значениях сопротивления R: 2,5; 7; 11 (*ом*).

5) Как называется зависимость между I и R, выраженная уравнением $I \cdot R = 12$? Как называется кривая, изображающая эту зависимость?

478. Дано уравнение $x \cdot y = 6$.

1) Решить уравнение относительно y и указать область определения функции y.

2) Построить график функции $y = \frac{6}{x}$ (сравнить с рис. 8).

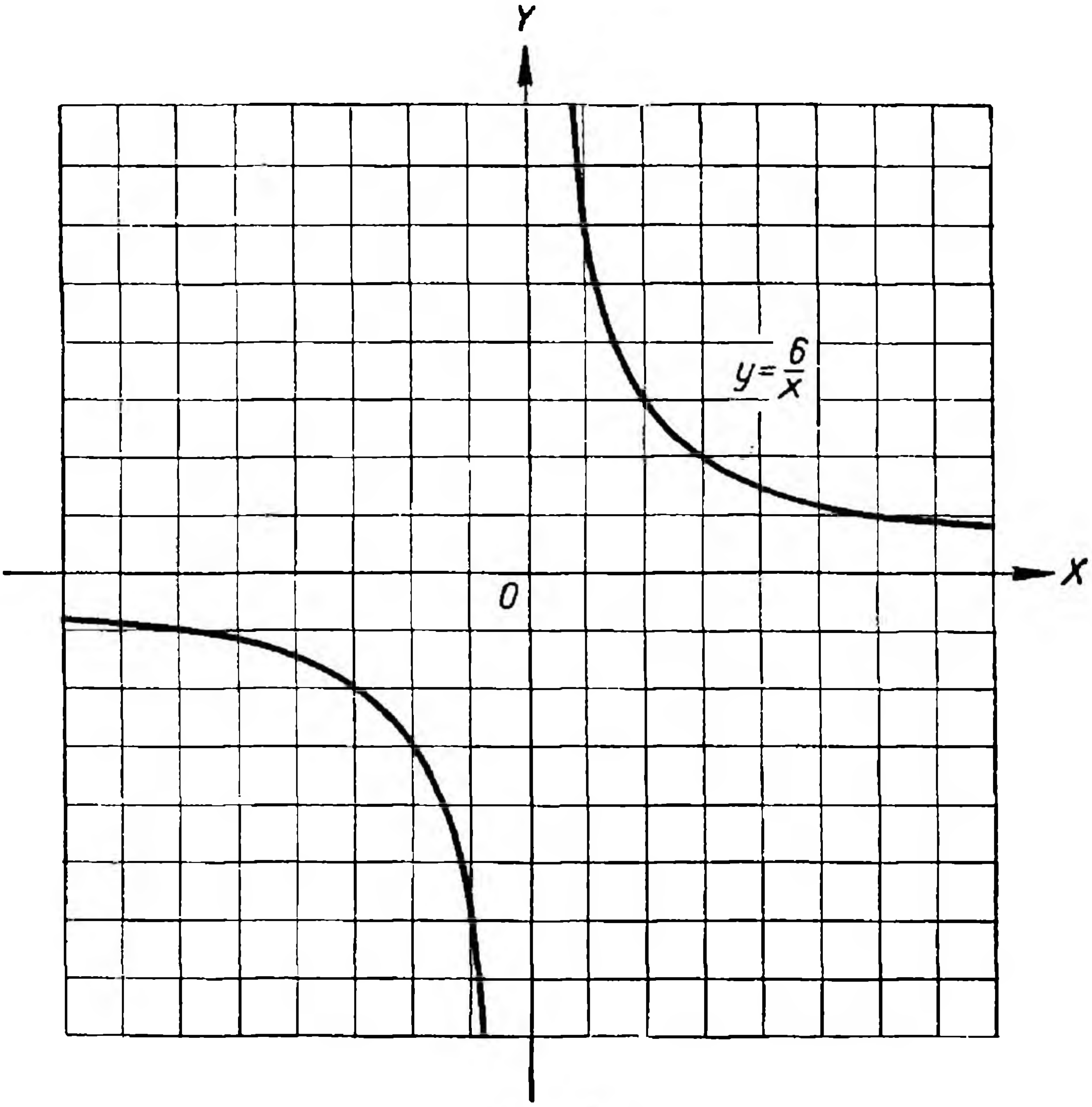


Рис. 8.

3) Как изменяется функция $y = \frac{6}{x}$ при возрастании аргумента x от $-\infty$ до 0 и от 0 до $+\infty$?

4) Сколько осей симметрии имеет график функции $y = \frac{6}{x}$? Написать уравнения этих осей симметрии.

479. 1) Величины x и y связаны соотношением $y = \frac{k}{x}$. Найти k, зная, что при $x = 0{,}8$ функция $y = -2{,}5$.

2) Ответить на вопросы, поставленные в предыдущей задаче, относительно функции $y = \frac{k}{x}$.

3) Выяснить различие в расположении графиков функций $y = -\frac{2}{x}$ и $y = \frac{6}{x}$.

480. Дано уравнение $x^2 - y^2 = 9$.

1) Решить уравнение относительно y и указать область определения функции.

2) Доказать, что: а) каждому допустимому значению x соответствуют два значения функции y, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку; б) функция y обращается в нуль при $x = \pm 3$; в) при неограниченном увеличении абсолютной величины $|x|$ абсолютная величина $|y|$ неограниченно возрастает.

3) Составить таблицу частных решений уравнения $x^2 - y^2 = 9$ (значения y вычислить с точностью до 0,1):

x	−6	−5	−4	−3	3	4	5	6
y								

4) Принимая каждое частное решение уравнения $x^2 - y^2 = 9$ за координаты точки, построить график этого уравнения, учитывая результаты исследования функции (сравнить с рис. 9).

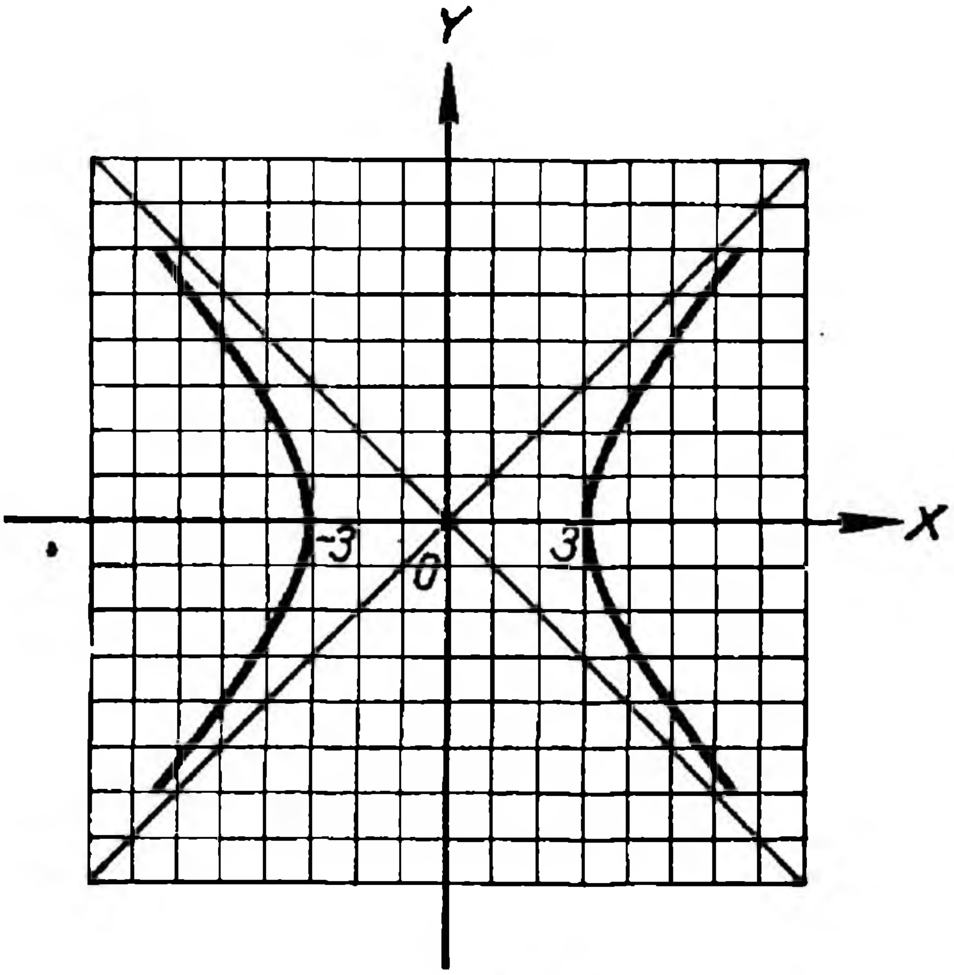


Рис. 9.

5) Установить по графику и проверить по уравнению, что осями симметрии этой гиперболы являются координатные оси. Написать уравнения осей симметрии и найти точки пересечения гиперболы с осями симметрии.

6) Построить прямые $y = x$ и $y = -x$ и установить аналитически и по рисунку, что ветви гиперболы неограниченно приближаются к этим прямым.

481. Дано уравнение $x^2 + y^2 = 25$.

1) Решить уравнение относительно y и указать область определения функции.

2) Составить таблицу частных значений функции y при следующих значениях аргумента x:

x	-5	$-4{,}9$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$4{,}9$	5
y													

3) Построить точки, координаты которых равны найденным в таблице значениям x и y, и соединить эти точки плавной кривой (сравнить с рис. 10).

4) Доказать, что график функции $x^2 + y^2 = 25$ есть окружность радиуса в 5 единиц масштаба и с центром в начале координат.

5) Доказать, что окружность радиуса R с центром в начале координат является графиком функции $x^2 + y^2 = R^2$.

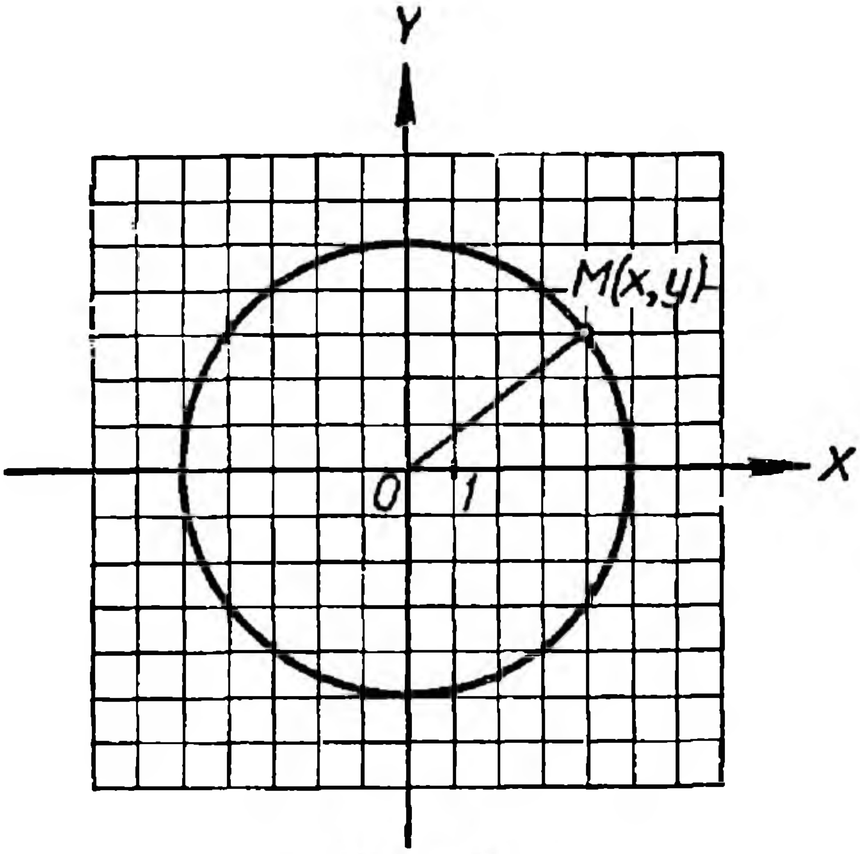


Рис. 10.

482*. Доказать, что каждое из следующих уравнений является уравнением окружности:

1) $x^2 + y^2 = 0{,}64$; 2) $0{,}2x^2 + 0{,}2y^2 = 1{,}8$;

3) $\frac{x^2}{4} - 4 = -\frac{y^2}{4}$; 4) $\frac{x^2}{0{,}1} = 40 - \frac{y^2}{0{,}1}$.

Построить графики этих уравнений.

Системы уравнений, содержащие одно уравнение второй степени и одно — первой степени

483. Решить системы уравнений алгебраически и графически. Объяснить, почему координаты точек пересечения графиков уравнений являются решениями системы:

1) $\begin{cases} y - x^2 = 3, \\ x + y = 5 \end{cases}$ (рис. 11); 2) $\begin{cases} xy = -12, \\ x - y = 7 \end{cases}$ (рис. 12).

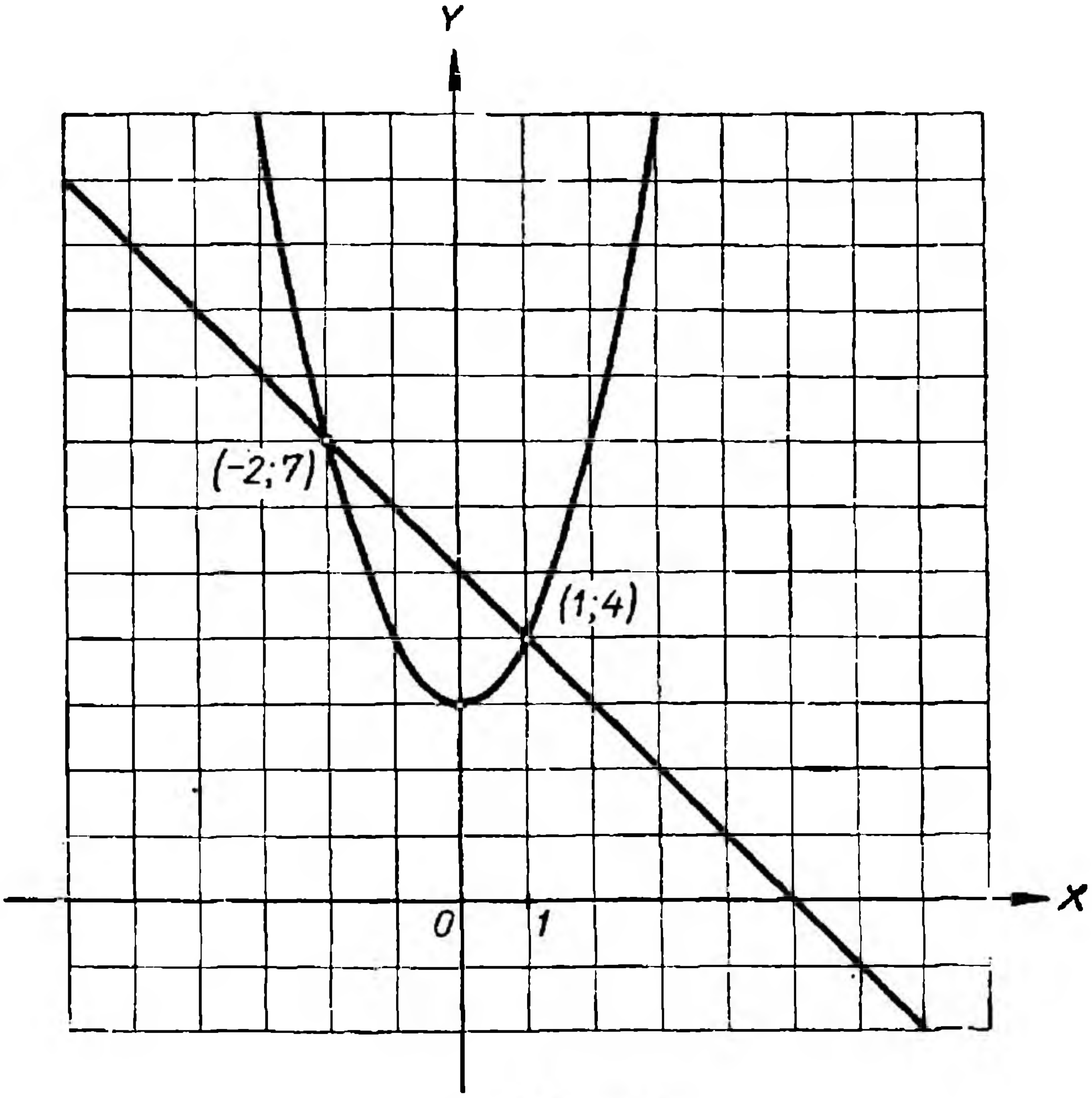


Рис. 11.

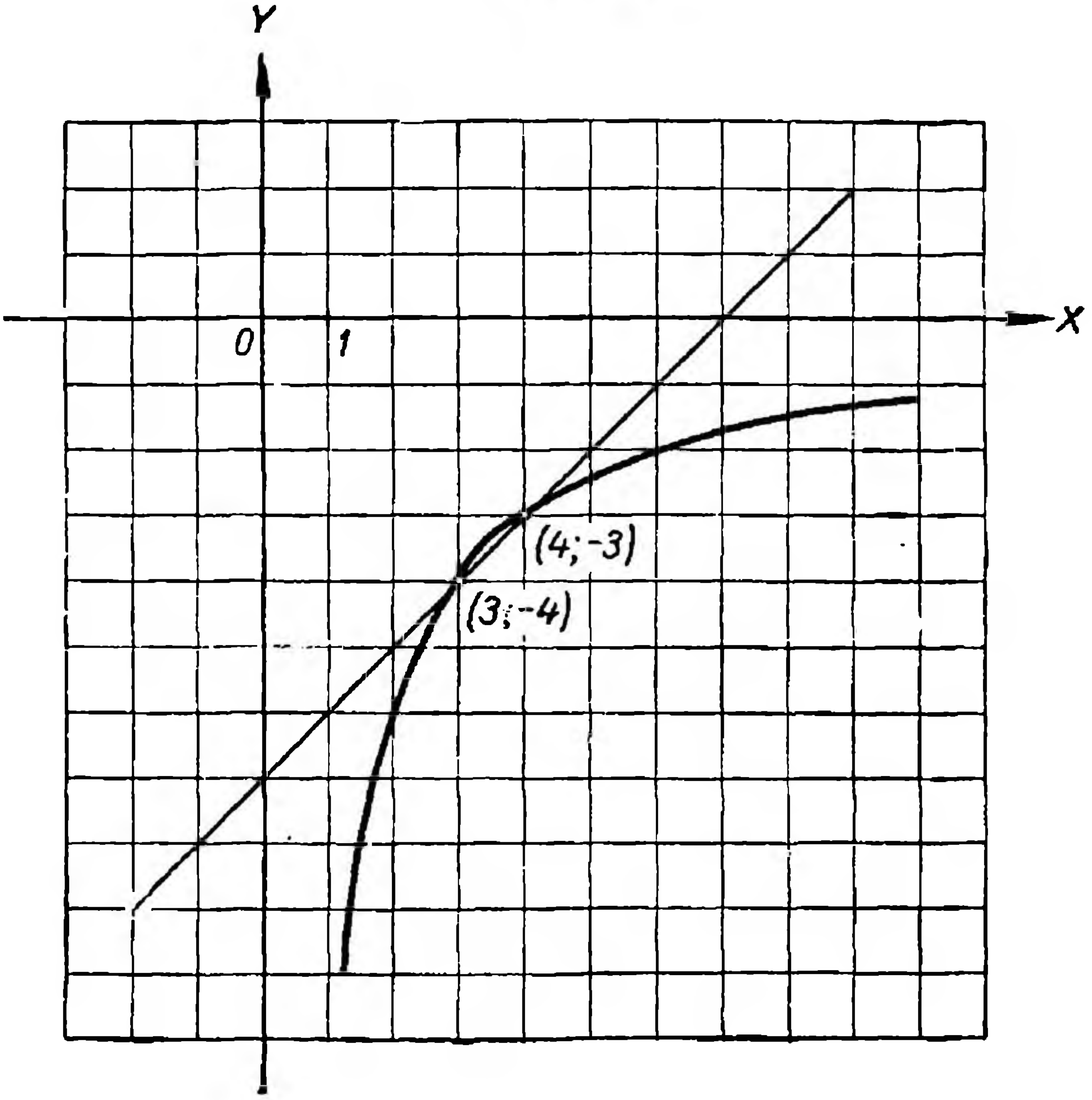


Рис. 12.

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4. \\ x - 2 = 0 \end{cases}$ (рис. 13).

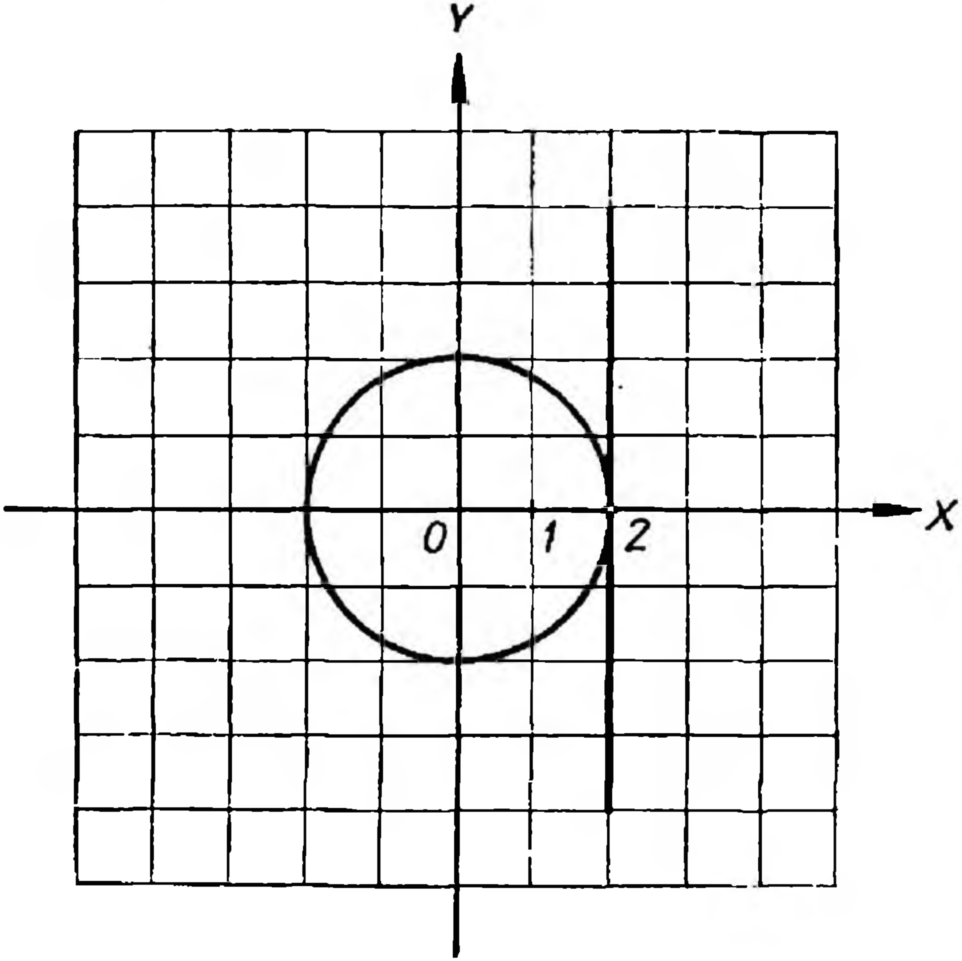


Рис. 13.

Решить системы уравнений.

484. 1) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0{,}3, \\ x + y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = -1\frac{5}{12}, \\ x - y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-1)(y+1) = -2, \\ x + y = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x-1)(y-2) = -8, \\ \frac{x+y}{y-2} = \frac{1}{2}. \end{cases}$

485. 1) $\begin{cases} \frac{1+x+x^2}{1+y+y^2} = \frac{3}{7}, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1-x+x^2}{1-y+y^2} = 2\frac{1}{3}, \\ x + y = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x+2}{(2x-y)(2y-x)} = 1\frac{1}{4}, \\ \frac{x+y}{x-y} = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x-3}{2x+3} + \frac{y-2}{3y+2} = -4\frac{1}{5}, \\ 2x - 3y = -5. \end{cases}$

486. 1) $\begin{cases} \frac{y^2-4x^2}{2xy} = 1{,}5, \\ 10x + y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13, \\ x + y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3x - 2y - 10 = 0, \\ 2x - y - 1 = 0. \end{cases}$

487. 1) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 2xy, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\frac{1}{6}, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$

488. 1) $\begin{cases} x + y = 3m, \\ xy = 2m^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a^2, \\ x - y = 2a; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3a^2, \\ x + y = -a; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5a^2, \\ x + y = -3a. \end{cases}$

489. 1) $\begin{cases} \frac{x-y}{2} = \frac{y}{a-1}, \\ \frac{xy}{a+1} = a - 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x-y+1}{2a} = 1, \\ 2x + y^2 = a^2 + 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{a-b}{x} - \frac{y}{a+b} = 0, \\ x - y = 2b; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{a^2+b^2}{2}, \\ x + y = a. \end{cases}$

Решить следующие системы уравнений, используя свойства корней квадратного уравнения:

490. 1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y - xy = -1, \\ xy = 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y - 2\sqrt{xy} = 0, \\ xy = 64. \end{cases}$

491. 1) $\begin{cases} x - y = 8, \\ xy = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 8, \\ xy = -15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + xy - y = 13, \\ x - y = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - x = -3, \\ xy + x = 1 + y. \end{cases}$

492. 1) $\begin{cases} x + y = -a, \\ xy = -2a^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 2a + b, \\ xy = a^2 + ab; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = a^2 - 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = a^2 - a. \end{cases}$

Системы двух уравнений второй степени

493. 1) Решить аналитически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 + y = 13. \end{cases}$$

2) На одном чертеже построить графики уравнений данной системы и найти координаты точек пересечения этих графиков (сравнить с рис. 14).

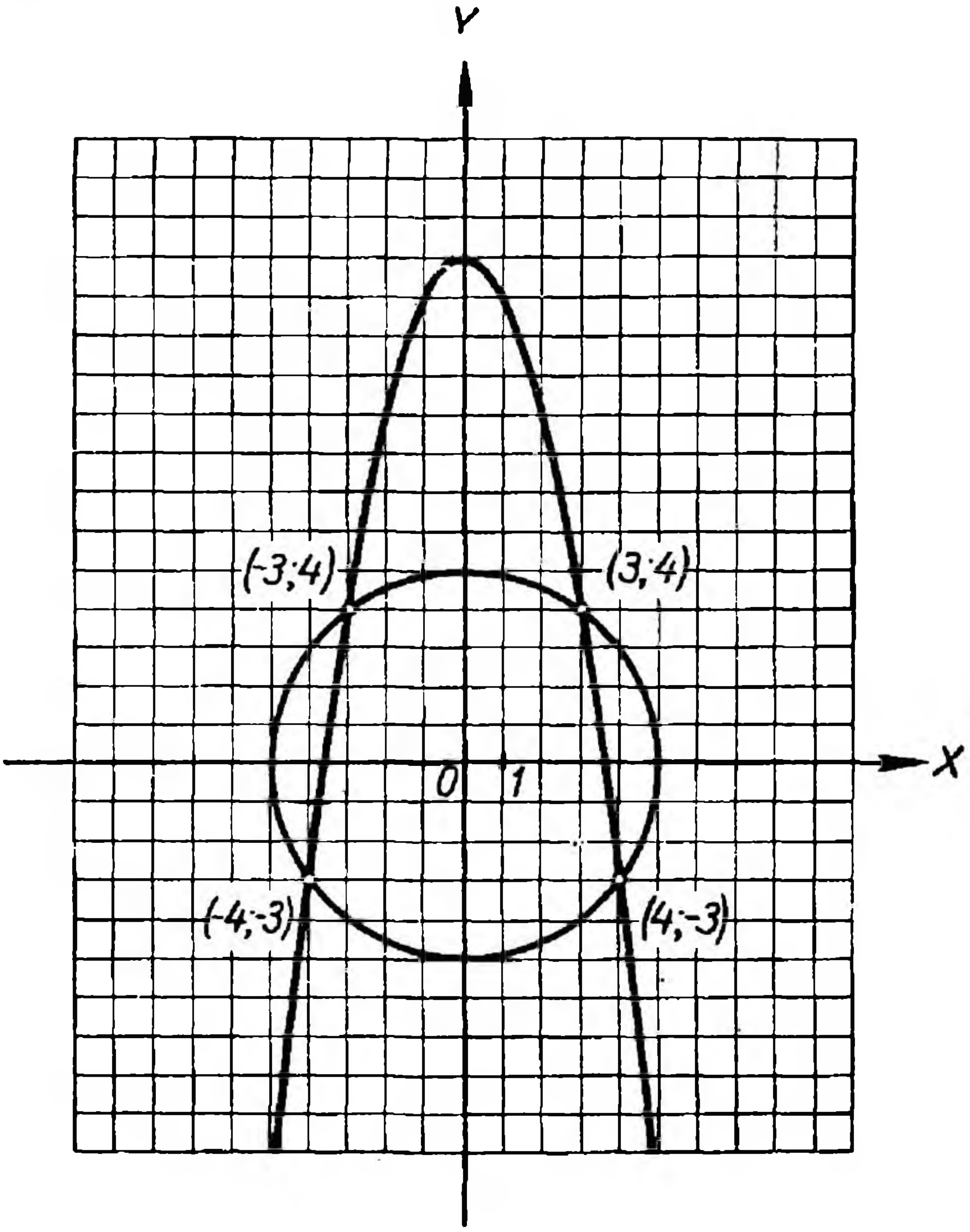


Рис. 14.

3) Подставив в данную систему найденные значения x и y, убедиться, что координаты точек пересечения графиков являются решениями данной системы.

494. 1) Решить аналитически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y^2 - x = 5. \end{cases}$$

2) Показать графически, что система имеет три решения (сравнить с рис. 15).

495. Решая аналитически и графически систему уравнений

$$\begin{cases} xy = -8, \\ x = -y^2, \end{cases}$$

показать, что она имеет только одно решение (сравнить с рис. 16).

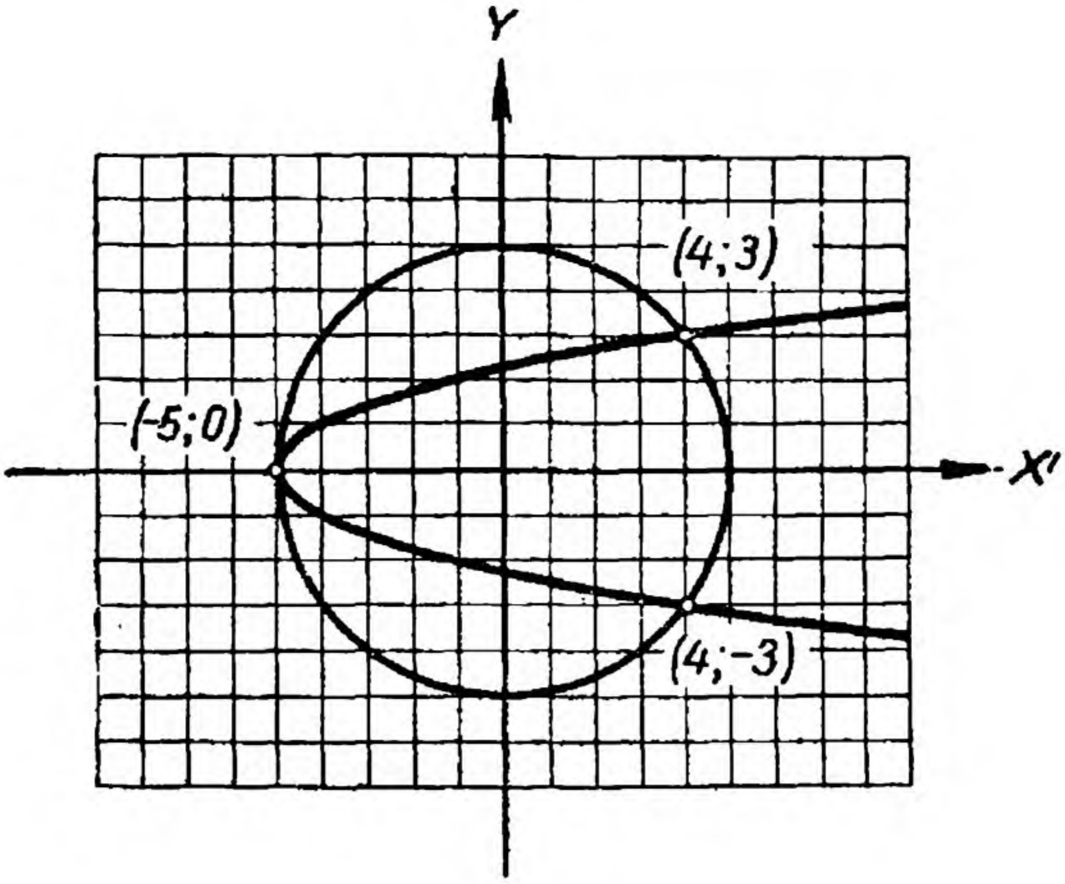


Рис. 15.

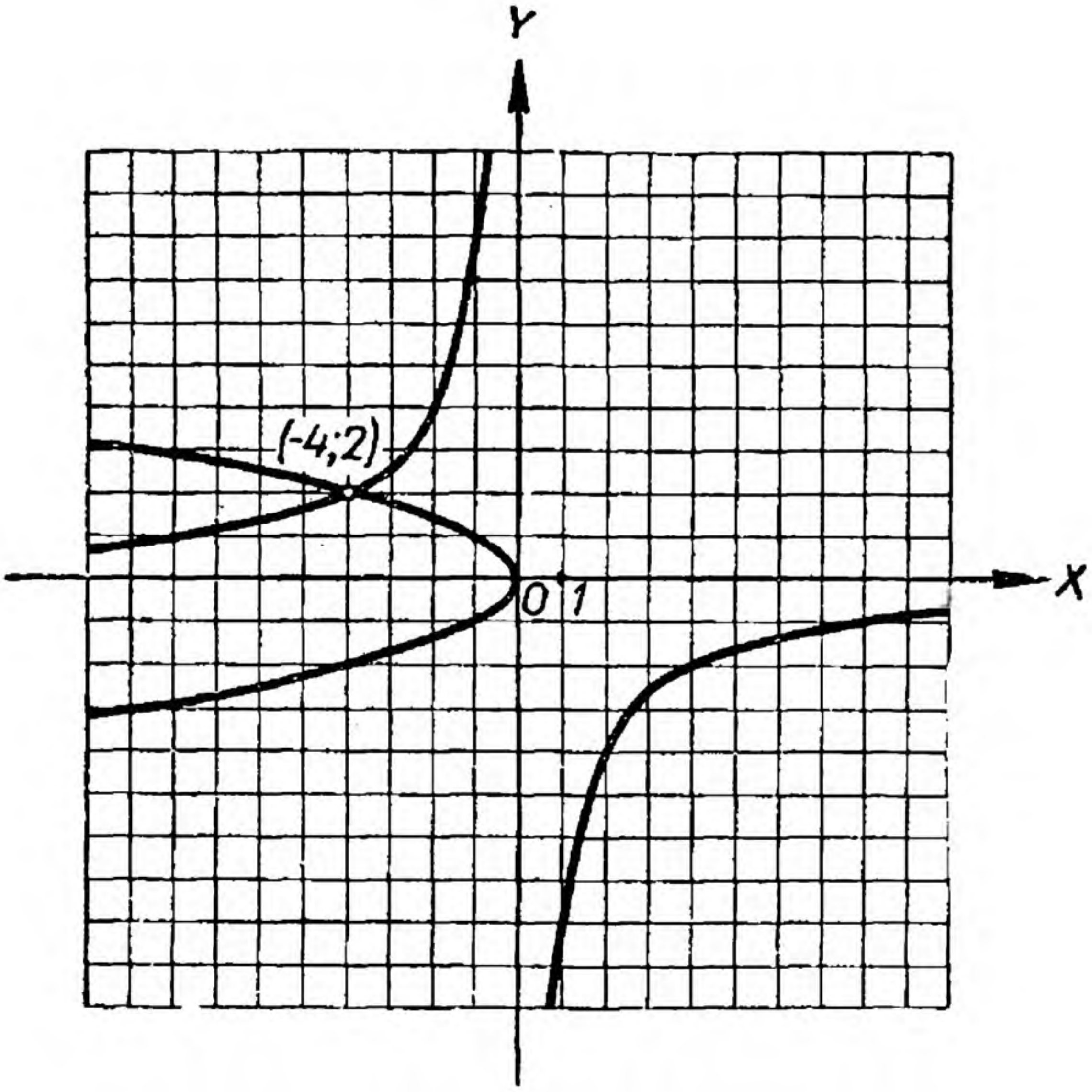


Рис. 16

496. 1) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ y - x^2 = 0. \end{cases}$$

2) Проиллюстрировать на графике, что данная система не имеет действительных решений (сравнить с рис. 17).

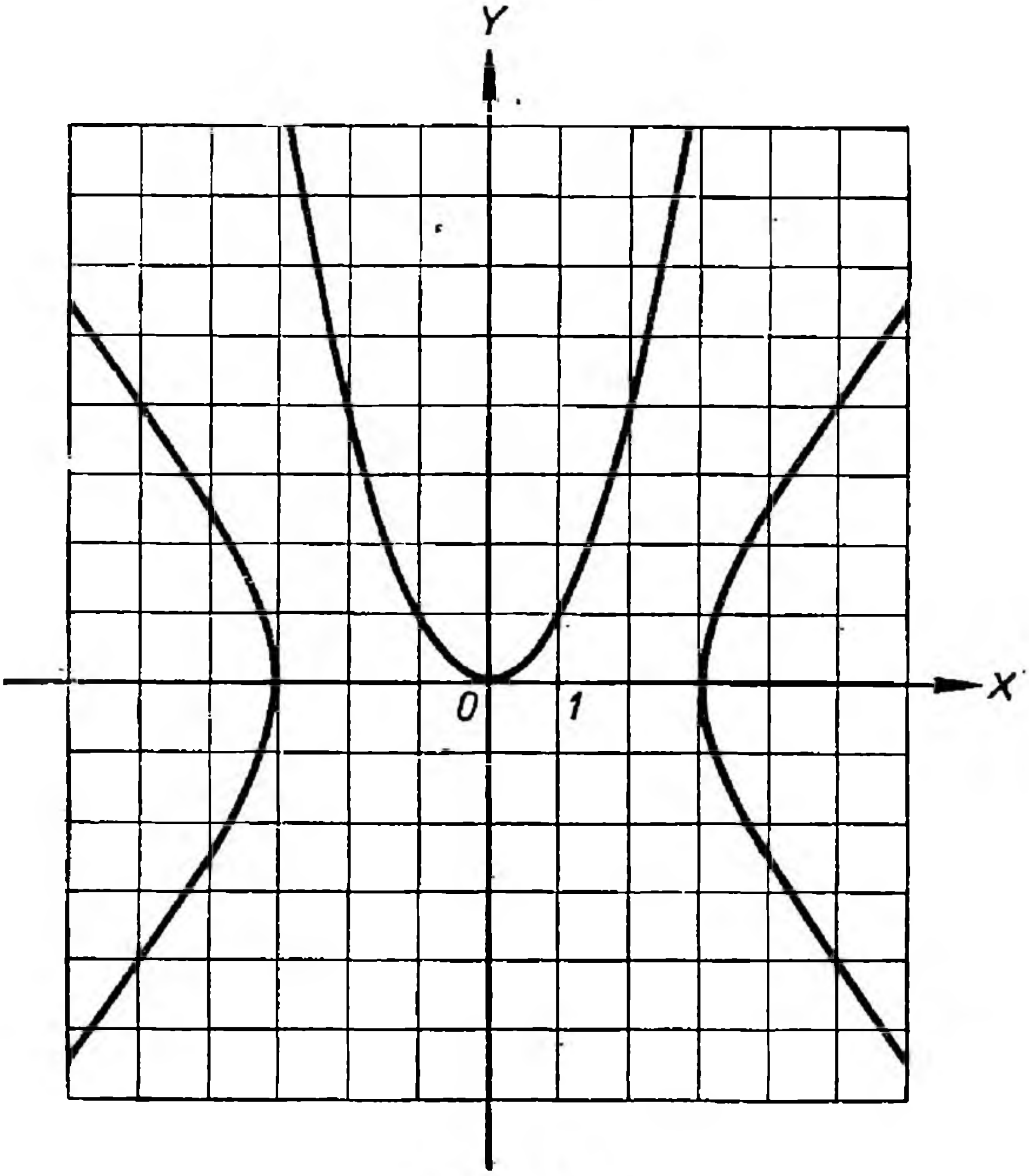


Рис. 17.

497. Найти аналитически и графически приближенные (с точностью до 0,1) решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - 2y^2 = -3. \end{cases}$$

498. Решить графически систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 2, \\ 2x^2 + 7x - 2y = 5. \end{cases}$$

Решить системы уравнений.

499. 1) $\begin{cases} x - y + xy = 5, \\ x - y - xy = -7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy - x + y = 5, \\ 2xy + x - y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2xy - x + y = -7, \\ 3xy + x - y = -23; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 3xy - 4y = 46, \\ 3x - 2xy + y = -37. \end{cases}$

500. 1) $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=25; \\ 2x^2-2xy-y^2=11; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-2xy+3x+4y=10, \\ 2xy-x^2-4x-5y=-15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2+2y^2=5xy, \\ 2x+2y=3xy; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-3xy+9y^2=67, \\ x^2+3xy+9y^2=103. \end{cases}$

501*. 1) $\begin{cases} 3x^2-2xy+3x-6y=0, \\ (x-1)(y-3)=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-3y^2+4x+5=0, \\ (x-1)(y-3)=x^2-2x+1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x+y)^2+3(x+y)+2=0, \\ (x-y)^2-2(x-y)=3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{10}{3}, \\ x^2-y^2=8. \end{cases}$

502*. 1) $\begin{cases} x+xy+y=5, \\ xy(x+y)=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y^2=11, \\ xy^2=18; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-y=5, \\ x^2y=36; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2-2xy-6y^2=-9, \\ x^2-2y^2=1. \end{cases}$

Решить следующие системы уравнений путем введения вспомогательного неизвестного:

503. 1) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{25}{12}, \\ x^2+y^2=25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{16}{15}, \\ x^2-y^2=16; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=3\frac{1}{3}, \\ x^2-y^2=72; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{2x}{y}+\frac{y}{2x}=\frac{17}{4}, \\ x^2+y^2=20. \end{cases}$

504. 1) $\begin{cases} x^2-xy=m, \\ y^2-xy=n; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{a}{x-y}=\frac{x}{2a}, \\ \frac{3a}{x+y}=\frac{y}{a}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x+a}{a}+\frac{y-a}{y}=5, \\ \frac{x+a}{x}-\frac{a-y}{a}=-\frac{1}{2}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x+a}{x}+\frac{y+a}{a}=3, \\ \frac{a-x}{a}-\frac{a-y}{y}=\frac{5}{2}. \end{cases}$

Решить системы уравнений, у которых левые части однородны относительно x и y.

505. 1) $\begin{cases} 25x^2+16y^2=17, \\ xy=-0{,}2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-xy=3, \\ xy+y^2=2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+xy=36, \\ xy+y^2=45; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x^2+2xy+y^2=139, \\ 4x^2-2xy+y^2=79. \end{cases}$

506. 1) $\begin{cases} x^2-2xy=\frac{5}{4}, \\ y^2+4xy=-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3(x^2-2y^2)+17xy=0, \\ x^2+4y^2=10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x^2}{3}+xy=6, \\ \frac{xy}{4}+y^2=1\frac{3}{4}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ y^2-2xy=-15. \end{cases}$

507. Решить графически следующие системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ x+y=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=x^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y^2+x=3, \\ x^2+y=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6. \end{cases}$

Решить системы уравнений с тремя неизвестными.

508. 1) $\begin{cases} x-y=-1, \\ y+z=5, \\ xz=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=-3, \\ y-z=1, \\ x^2+z^2=10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy=6, \\ xz=8, \\ yz=12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x(y+z)=2, \\ y(x+z)=-28, \\ z(x+y)=-10. \end{cases}$

509. 1) $\begin{cases} xy=-12, \\ xz=6, \\ y^2+z^2=20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=35, \\ x+y=2, \\ x-z=4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ x+y+z=12, \\ xy=12. \end{cases}$

Задачи на составление систем уравнений

510. Произведение двух чисел равно 77, а их разность равна 4. Найти эти числа.

511. Разность двух чисел относится к их сумме, как 3 : 8, а к их произведению, как 6 : 55. Найти эти числа.

512. Сумма катетов прямоугольного треугольника на 8 больше гипотенузы. Найти стороны этого треугольника, если его периметр равен 48.

513. Определить стороны прямоугольного треугольника, периметр которого 24 *см*, а площадь 24 *см*^{2}.

514. Разность двух сторон треугольника, образующих угол в 120°, равна 1 *дм*. Найти стороны треугольника, зная, что третья из них равна 13 *дм*.

515. Разность двух сторон параллелограмма равна 3 *см*, меньшая диагональ параллелограмма равна большей его стороне и на 2 *см* меньше большей диагонали. Найти стороны и диагонали параллелограмма.

516. Площадь ромба равна 120 $см^2$, а его периметр равен 52 *см*. Определить диагонали ромба.

517. Высота трапеции равна 8 *см*, средняя линия ее равна 9 *см*. Найти основания трапеции, если она равновелика прямоугольнику со сторонами, равными основаниям трапеции.

518. В круге, радиус которого равен 20 *см*, проведена хорда длиной 24 *см*. Определить расстояние от центра круга до точки пересечения касательных, точками прикосновения которых являются концы данной хорды.

519*. В двух концентрических окружностях, радиусы которых равны 25 *см* и 17 *см*, требуется провести хорду так, чтобы часть ее, лежащая во внутренней окружности, составляла $\frac{2}{5}$ всей хорды. Определить длину хорды и расстояние ее от центра.

520. Площадь прямоугольного треугольника равна 6 $дм^2$. Найти стороны этого треугольника, если известно, что прямоугольный параллелепипед, измерениями которого служат стороны данного треугольника, имеет объем, равный 60 $дм^3$.

521. Равнодействующая двух сил, направленных под прямым углом, равна 10 *кГ*. Если большую из этих сил уменьшить на 4 *кГ*, а меньшую—на 3 *кГ*, то их равнодействующая уменьшится в 2 раза. Найти составляющие силы.

522. Равнодействующая двух сил, направленных друг к другу под углом 60°, равна 7 *кГ*. Если же эти силы будут действовать по одной прямой в одном и том же направлении, то их равнодействующая увеличится на 1 *кГ*. Найти эти силы.

523. Поезд выходит со станции равноускоренно и на пути в 1,2 *км* набирает скорость, равную 72 *км/ч*. Найти ускорение движения поезда и время разгона.

524. Бассейн наполняется через два крана. Наполнение бассейна только через первый кран длится на 22 *мин* дольше, чем наполнение этого бассейна только через второй кран. Оба крана, действуя одновременно, наполняют бассейн за один час. За сколько времени каждый из кранов может наполнить бассейн?

525. Два грузовых автомобиля должны были перевезти некоторый груз в течение 6 *ч*. Но второй автомобиль задержался в гараже, и, когда он прибыл на место погрузки, первый перевез уже 0,6 всего груза; остальную часть груза перевез второй автомобиль, и весь груз был перевезен таким образом за 12 *ч*. Сколько времени потребовалось бы каждому автомобилю в отдельности для перевозки груза?

526. В первом забеге. на 800 *м* спортсмен *A* пришел к финишу на $11\frac{1}{9}$ *сек* раньше спортсмена *B*. Во втором забеге на ту же дистанцию спортсмен A уменьшил свою скорость на 0,8 *м/сек*, а спортсмен B на столько же увеличил свою скорость, а потому пришел к финишу также на $11\frac{1}{9}$ *сек* раньше, чем спортсмен A. Найти первоначальные скорости спортсменов.

527. Расстояние между двумя городами, равное 240 *км*, пассажирский поезд проходит на 1 *ч* быстрее, чем товарный. Если увеличить скорости движения пассажирского поезда на 12 *км/ч*, а товарного на 8 *км/ч*, то и в этом случае пассажирский поезд прошел бы расстояние между городами на час быстрее товарного. Найти первоначальные скорости движения каждого поезда.

528. Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми 30 *км*, навстречу друг другу одновременно отправились два туриста. После встречи турист, вышедший из A, приходит в B через 4,5 *ч*, а турист, вышедший из B, прибывает в A через 2 *ч*. Найти скорости движения каждого туриста.

529*. Из двух точек M и N, расстояние между которыми d *м*, одновременно начали двигаться навстречу друг другу два тела; встреча произошла в тот момент, когда первое тело, вышедшее из M, прошло a *м*. Определить скорость каждого тела, зная, что число метров, выражающее разность между скоростями первого и второго тел, равно числу секунд, прошедших от начала движения до встречи.

§ 10. НЕРАВЕНСТВА ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Исследование квадратного трехчлена

530. Найти значения аргумента x, для которых квадратный трехчлен x^2-6x-3 равен: 1) -3; 2) 4; 3) -5; 4) -16; 5) 0.

531. В каком случае трехчлен ax^2+bx+c, где a, b и c — действительные числа, заведомо не может обратиться в нуль? Как в этом случае располагается относительно координатных осей график трехчлена?

532. Найти корни следующих трехчленов:

1) $x^2-x-462$; 2) $3x^2-22x+7$;

3) $10x^2+29x+10$; 4) $5x^2-6x+5$.

533. Как на координатной плоскости располагается график трехчлена ax^2+bx+c (парабола), имеющего действительные корни, если: 1) $a>0$; 2) $a<0$? Имеет ли график общие точки с осью OX, и если имеет, то сколько?

534. 1) Известно, что корни x_1 и x_2 трехчлена x^2+px+q удовлетворяют соотношениям: $x_1+x_2=-p$ и $x_1\cdot x_2=q$. Пользуясь этими свойствами, доказать, что $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$.

2) Доказать тождество $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена ax^2+bx+c.

535. Разложить на множители:

1) $x^2+2x-15$; 2) $2x^2+3x-6{,}48$;
3) $x^2+ax-6a^2$; 4) $6x^2+5ax-6a^2$;
5) $a^2b^2+ab-12$; 6) $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12$.

536. Вывести условие, при котором квадратный трехчлен

1) x^2+px+q; 2) ax^2+bx+c

является квадратом двучлена. Как в этом случае расположен относительно координатных осей график трехчлена?

537. При каких значениях k каждый из следующих трехчленов является квадратом двучлена:

1) $3x^2-kx+12$; 2) $x^2+kx+25$;
3) $3x^2+kx+72$; 4) $4x^2+24x+k$;
5) $x^2-2(k+2)x+(2k^2+3k+4)$;
6) $(k+1)x^2-(k-1)x+(k+1)$;
7) $(k-1)x^2+(k+1)x+(k-1)$?

538. Показать, что:

1) в трехчлене $y=x^2+px+q$ можно выделить полный квадрат и представить его в виде $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)$;

2) при $x=-\frac{p}{2}$ трехчлен $y=x^2+px+q$ принимает свое наименьшее значение $y_{\text{наим}}=q-\frac{p^2}{4}$.

539. В данных трехчленах выделить полные квадраты и определить, при каких значениях x каждый из этих трехчленов принимает наименьшее значение и какое именно:

1) $x^2+6x+16$; 2) $x^2-x-110$;
3) x^2-x+1; 4) x^2+5x-4.

540. Доказать, что:

1) трехчлен $y=ax^2+bx+c$ можно представить в виде

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right];$$

2) при $x=-\frac{b}{2a}$ и $a>0$ трехчлен $y=ax^2+bx+c$ принимает наименьшее значение $y_{\text{наим}}=-\frac{b^2-4ac}{4a}$;

3) при $x=-\frac{b}{2a}$ и $a<0$ трехчлен $y=ax^2+bx+c$ принимает наибольшее значение $y_{\text{наиб}}=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

541. В данных трехчленах выделить полные квадраты и определить, при каких значениях x каждый из этих трехчленов принимает наибольшее или наименьшее значение; найти это наибольшее или наименьшее значение трехчлена:

1) $3x^2+4x+1$; 2) $4x^2+4x-3$;
3) $6x^2-13x+6$; 4) $10x-23-x^2$.

542. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-ax+a-1=0$, где a — действительное число. Найти значение a, при котором величина выражения $x_1^2+x_2^2$ будет наименьшей. Найти это наименьшее значение.

543*. Доказать, что из всех прямоугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

544. Доказать, что при любых действительных значениях x:

1) выражение $(x-3)(x-1)+2$ принимает положительные значения;

2) выражение $(x-1)(1-3x)-1$ принимает отрицательные значения.

545*. Дан квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$, где a, b и c — действительные числа; x_1 и x_2 — корни трехчлена.

Доказать, что:

1) если $D=b^2-4ac>0$ и $x_1<x_2$, то $y>0$ при $a>0$ для всех действительных значений аргумента $x<x_1$ и $x>x_2$; $y<0$ для всех действительных значений аргумента $x_1<x<x_2$; если же $a<0$, то $y>0$ при всех $x_1<x<x_2$ и $y<0$ при $x<x_1$ и $x>x_2$;

2) если $D=b^2-4ac=0$, то при $a>0$ трехчлен $y>0$ для всех действительных значений $x\neq-\frac{b}{2a}$; при $a<0$ трехчлен $y<0$ для всех действительных значений $x\neq-\frac{b}{2a}$. При $x=-\frac{b}{2a}$ трехчлен $y=0$;

3) если $D=b^2-4ac<0$, то при $a>0$ трехчлен $y>0$ при всех действительных значениях x; при $a<0$ трехчлен $y<0$ при всех действительных значениях x.

Привести графическую иллюстрацию в каждом случае.

546. Каково необходимое и достаточное условие того, чтобы квадратный трехчлен ax^2+bx+c при всех действительных значениях аргумента x принимал: 1) положительные значения; 2) отрицательные значения?

547. При каких значениях m трехчлен $2x^2-2x+5m$ будет иметь положительные значения при любых действительных значениях x?

548. При каких значениях n трехчлен $(n-1)x^2-2nx+(n-2)$ будет принимать отрицательные значения при любых действительных значениях x?

549. Дан квадратный трехчлен $y=-2x^2+3x+5$.

1) Определить, при каких значениях x данный трехчлен: а) принимает свое наибольшее значение и какое именно; б) возрастает; в) убывает; г) обращается в нуль; д) принимает положительные значения; е) принимает отрицательные значения.

2) Используя результаты исследования, построить график трехчлена.

550. Исследовать квадратные трехчлены и построить их графики:

1) $y = x^2 - 7x + 6$; 2) $y = -3x^2 + 8x + 3$;

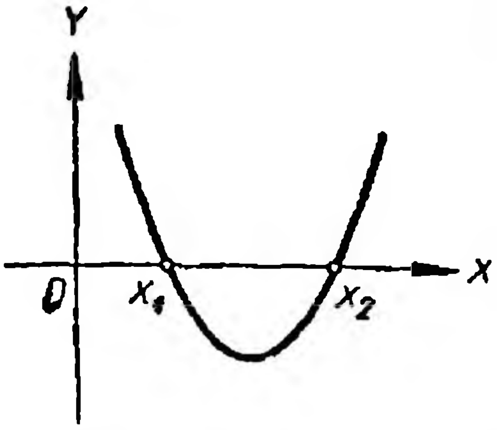
3) $y = 4x^2 + 12x + 9$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$;

5) $y = x^2 - 3x + 10$; 6) $y = -2x^2 + 4x - 7$.

Неравенства второй степени

551. На основании исследования знака трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ (задача 545) решить неравенства $ax^2 + bx + c \gtrless 0$ и заполнить таблицу 5.

Таблица 5

D	a	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c<0$	Графическая иллюстрация
$D = b^2 - 4ac > 0$ $x_1 < x_2$	$a > 0$	удовлетворяется при $x < x_1$ и $x > x_2$	удовлетворяется при $x_1 < x < x_2$	
	$a < 0$			
$D = b^2 - 4ac = 0$ $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$a > 0$			
	$a < 0$			
$D = b^2 - 4ac < 0$	$a > 0$			
	$a < 0$			

Решить неравенства.

552. 1) $x^2 - 2x + 3 > 0$; 2) $4x - x^2 < 5$;

3) $x^2 + 9 < 6x$; 4) $(2 - x)x < 1$.

553. 1) $x(x+5) - 2 > 4x$; 2) $x(x+5) \leqslant 2(x^2+2)$;

3) $11 - (x+1)^2 \geqslant x$; 4) $(x+4)(x+5) - x \leqslant 5$.

554. 1) $6x^2 - x - 2 \geqslant 0$; 2) $\frac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0$;

3) $2(x+2)^2 - 3{,}5 \geqslant 2x$; 4) $x > \frac{x^2}{2} - 4x + 5\frac{1}{2}$.

555. 1) $x+\frac{2}{x}>3$; 2) $x-2<\frac{3}{x}$;

3) $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}>\frac{4}{3}$; 4) $\frac{7x-5}{x+1}>x$.

556*. 1) $\frac{x^2+1}{x^2+3x-10}<0$; 2) $\frac{10-x}{5+x^2}>\frac{1}{2}$;

3) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}<0$; 4) $\frac{x^2-3x+1}{x^2-1}>1$.

557*. 1) $\frac{x+1}{x-1}+2>\frac{x-1}{x}$; 2) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}<\frac{3}{x+2}$;

3) $\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}-\frac{6}{x-1}<0$; 4) $\frac{x}{x^2+3x+2}>\frac{x}{x^2+7x+12}$.

558. При каких значениях x следующие выражения имеют смысл:

1) $\sqrt{2-x-x^2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{9x^2-3x-2}}$?

559. При каких значениях k следующие неравенства удовлетворяются тождественно:

1) $5x^2-x+k>0$; 2) $x^2-12x+(2k-1)(k-1)>0$;

3) $kx^2-10x-5<0$; 4) $kx^2-2(k-1)x+4k\leqslant 0$;

5) $\left|\frac{x^2+kx+1}{x^2+1}\right|<2$; 6) $-3<\frac{x^2+kx-2}{x^2-x+1}<2$?

560. Решить алгебраически и графически неравенства:

1) $|x^2+x-6|<2$ (сравнить с рис. 18);

2) $|10x-x^2-16|>3$.

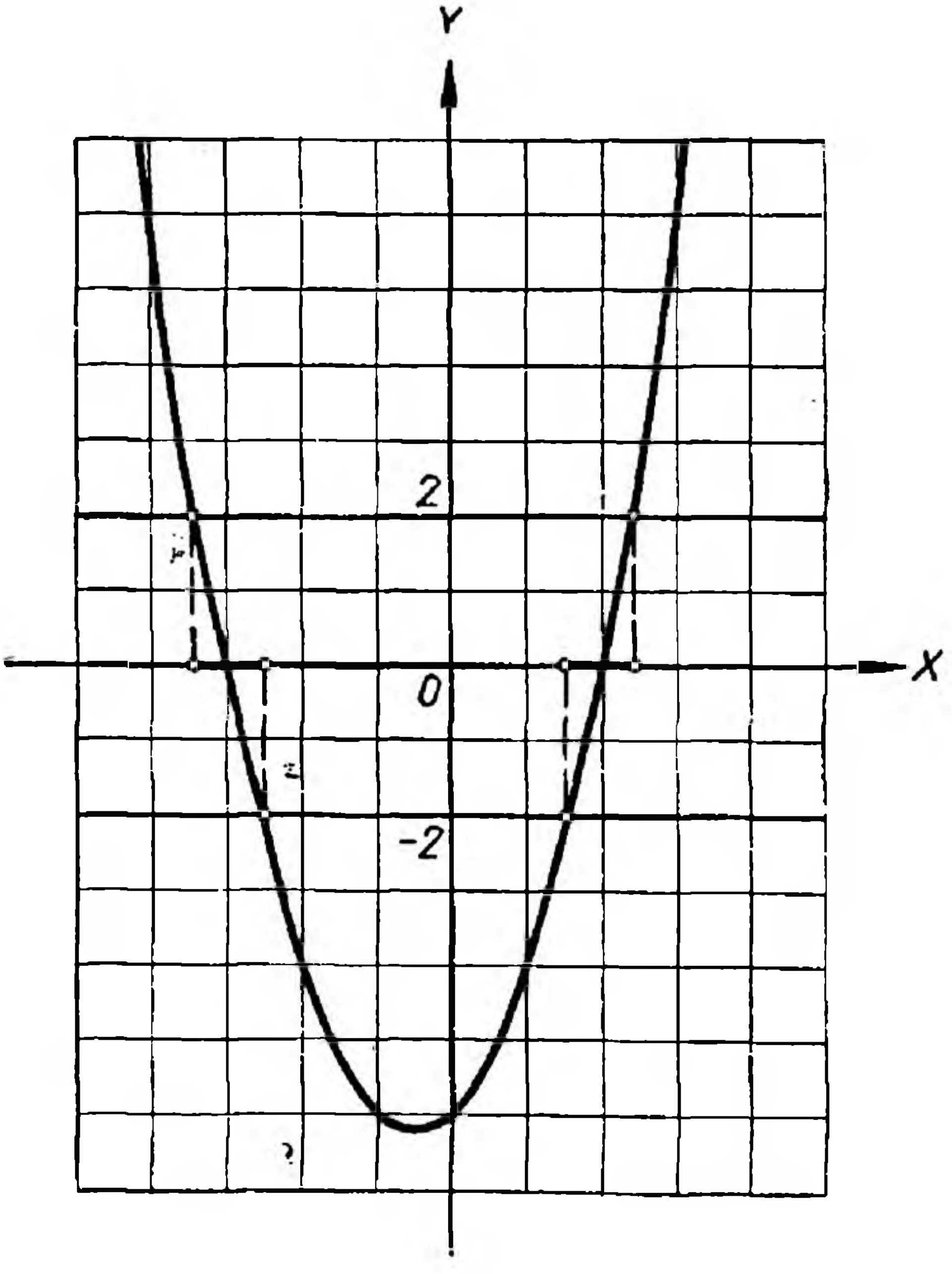


Рис. 18.

561. 1) Найти четные значения x, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases}\frac{2x^2-4x+1}{x^2+6}<1,\\ \frac{5x-1}{3}>1\frac{1}{3}.\end{cases}$$

2) Найти целые значения x, удовлетворяющие системе наравенств:

$$\begin{cases}\frac{x^2-7x+6}{3x^2-x+1}<0,\\ x^2<36.\end{cases}$$

3) Найти пары целых значений x и y, удовлетворяющих системе неравенств:

$$\begin{cases} y+\frac{1}{2}>|x^2-2x|, \\ y<2-|x-1|. \end{cases}$$

562. Определить, при каких значениях параметра m корни следующих уравнений будут: а) действительные равные; б) действительные различные; в) уравнения не будут иметь действительных корней:

1) $mx^2-(3m+1)x+m=0$;
2) $(2-3m)x^2-2mx+1-m=0$;
3) $(m-4)x^2+(m+1)x+2m-1=0$;
4) $(3m-2)x^2-(5m+2)x+5m-1=0$.

§ 11. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

563. Из вершины прямого угла по его сторонам одновременно начали двигаться две точки. Через 1 *мин* после начала движения расстояние между точками было 5 *дм*, а спустя еще 2 *мин* оказалось, что одна из точек удалилась от вершины угла на 3 *дм* дальше другой. Найти скорости движения точек.

564. Назвать иррациональные уравнения среди следующих уравнений:

1) $\sqrt{3}+x=5$;
2) $\sqrt[3]{x}=x$;
3) $\sqrt{x-7}=4$;
4) $2-\sqrt{x^2}=2x$;
5) $\sqrt{x^2-a^2}=3a-2x$;
6) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$.

565. Определить допустимые значения для неизвестного в каждом из следующих уравнений:

1) $\sqrt{x-1}=2$;
2) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x}$;
3) $\sqrt[3]{x}=-2$;
4) $\sqrt{2x-1}-\sqrt{2-x}=0$;
5) $\sqrt{x-4}+\sqrt{3-x}=1$;
6) $\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}=-1$.

566. Объяснить, почему каждое из следующих уравнений не может иметь действительных корней:

1) $\sqrt{x+3}+1=0$;
2) $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=-2$;
3) $\sqrt{x-5}+\sqrt{2-x}=7$;
4) $\sqrt{10+\sqrt{x-5}}=3$.

567. 1) Показать на примерах, что если обе части уравнения возвысить в квадрат, то полученное уравнение будет равносильно совокупности двух уравнений, из которых одно — данное, а другое отличается от данного только знаком одной из частей уравнения. Может ли при этом произойти: а) потеря корней; б) появление посторонних корней?

2) Почему при возвышении в куб обеих частей уравнения получается уравнение, равносильное данному (в множестве действительных чисел)? Ответ подтвердить примерами.

568. Равносильны ли следующие уравнения:

1) $2x=x+2$ и $(2x)^2=(x+2)^2$;
2) $2x=x+2$ и $(2x)^3=(x+2)^3$;
3) $2x-3=5$ и $(2x-3)^2=25$;
4) $\sqrt{2x-1}=x-2$ и $2x-1=(x-2)^2$;
5) $\sqrt{x-1}=3$ и $x-1=9$?

Решить уравнения.

569. 1) $\sqrt{x^2-7}=\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{6-x}=x$;
3) $x-\sqrt{x-1}=3$; 4) $1+\sqrt{2x+7}=x-3$.

570. 1) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+4}=6$; 2) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}=x$;
3) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{3x+1}$; 4) $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-7}}=\sqrt{x-4}$.

571. 1) $\sqrt[3]{x^2+15}=2\sqrt[3]{x+1}$; 2) $\sqrt[3]{x^3-2x-3}=x-1$;
3) $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}}=3$; 4) $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}=3$.

Решить уравнения с помощью введения вспомогательного неизвестного.

572. 1) $x-\sqrt{x}-6=0$; 2) $7\sqrt{x}-2x+15=0$;
3) $x+\sqrt{x-1}-3=0$; 4) $3x-10\sqrt{x+1}+6=0$.

573*. 1) $x^2-x+9+\sqrt{x^2-x+9}=12$;
2) $x^2+4-5\sqrt{x^2-2}=0$;
3) $x^2-4x-3\sqrt{x^2-4x+20}+10=0$;
4) $x^2+2\sqrt{x^2-3x+11}=3x+4$.

574. 1) $\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}=1$; 2) $\sqrt{x-7}-\dfrac{6}{\sqrt{x-7}}-1=0$;
3) $2\sqrt{x-1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$; 4) $10\sqrt{x^2-x-1}+\dfrac{3}{\sqrt{x^2-x-1}}=13$.

4

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

§ 12. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Степень с натуральным показателем

575. Для каких показателей n имеет смысл определение степени как произведения n равных сомножителей?

576. В каких случаях при возведении в натуральную степень положительного числа получается число: а) больше данного; б) меньше данного?

577. Может ли быть верным равенство $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b}$?

578. Вычислить:

1) $(-2)^{10}$; -3^4; $(-7)^3$; 0^{10}; $(-1)^6$; -1^4; $(-1)^{11}$ -1^{11};

2) $(-1)^4-(-1)^3-(-1)^2-(-1)$; $(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+$ $+(-1)^5$;

3) $(-1)^k+(-1)^{k+1}+(-1)^{k+2}+(-1)^{k+3}$; $11^{11}+(-11)^{11}$.

579. В одном грамме воды содержится приблизительно $3{,}35\cdot 10^{22}$ молекул. Сколько цифр в этом числе, записанном в десятичной системе нумерации?

580. 1) Вычислить при $x=10$:

а) $3x^2+4x+1$; б) $x^4+2x^3+3x^2+4x+5$; в) $7x^6+x^4+$ $+3x^3+2$.

2) Вычислить x, полагая $n=1$; 2; 3; 4; 5:

а) $x=(-1)^n\cdot 10+2n$; б) $x=(-1)^n\cdot 30^\circ+180^\circ\cdot n$;

в) $x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{4}+\pi(2n+1)$.

581. Записать в виде степени десяти следующие числа:

1) 100 000; 2) 10 000 000; 3) число, изображенное единицей с 20 нулями.

582. Через нить накала обычной 25-ваттной лампочки за один час проходит 1 000 000 000 000 000 000 000 электронов. Записать это число в виде степени десяти.

583. Записать с помощью степени десяти следующие числа:

1) 373; 2) 2384; 3) 29 608; 4) 501 009; 5) 20 000 020.

584. Записать в десятичной системе нумерации общее выражение 1) двузначного числа; 2) трехзначного числа; 3) k-значного числа

585. Следующие числа представить в виде суммы степеней числа 2

1) 6; 2) 18; 3) 42; 4) 7; 5) 31.

586. Пользуясь цифрами 0 и 1, записать в двоичной системе нумерации следующие числа:

1) 6; 2) 7; 3) 41; 4) 55; 5) 127.

587. Сколько единиц содержит каждое из следующих чисел, записанных в двоичной системе:

1) 101; 2) 1010; 3) 11 011; 4) 1 110 111?

588. Вычислить при $a=-1$; $b=2$ и $c=3$:

1) ab^2c^3; 2) $a^2(bc)^3$; 3) $(ab)^3c^2$.

589. Справедливы ли следующие равенства:

1) $(a^m)^n=(a^n)^m$; 2) $n^k=k^n$;

3) $(a^m)^n=a^{(m^n)}$; 4) $(a\pm b)^n=a^n\pm b^n$?

590. Вычислить:

$(2^3)^2$; $(2^2)^3$; $(-3^3)^2$; $(-3^2)^3$; $(4^2)^3$; 2^{2^3}; 2^{3^2}; $(3^2-2^3)^5$; $(3^3-2^2)^2$.

591. Являются ли точными квадратами следующие числа:

1) 5^{5^5}; 2) 5^{6^7}?

592. Расстояние от Земли до Солнца равно приблизительно $1{,}5\cdot10^{13}$ *см*. Выразить это расстояние в километрах.

593. Между единицами энергии существует следующая зависимость: джоуль равен 10^7 эргов, а киловатт-час равен $3{,}6\cdot10^6$ джоулей. Выразить киловатт-час в эргах.

594. Во сколько раз число $3{,}6\cdot10^{18}$ больше числа $1{,}2\cdot10^{15}$?

595. 1) Доказать, что: а) если $a>0$ и $a=b$, то $a^n=b^n$ (при любом натуральном n); б) если $a>b>0$, то $a^n>b^n$ (при любом натуральном n).

2) Сформулировать и доказать обратное утверждение.

Произвести действия.

596. 1) $1{,}8a^3b\cdot1{,}2a^3b^2$; 2) $(-0{,}23a^5y^2)\cdot0{,}27a^2x$;

3) $9{,}5x^ky^{n-2}z\cdot0{,}95x^3y^2z$; 4) $1\frac{1}{3}a^{m+n}b^2c^4\cdot1\frac{1}{2}a^{2n}b^mc$.

597. 1) $2x^5yz^3 : \left(-\frac{2}{3}x^3z^2\right)$; 2) $a^{2m+1}b^5 : 0{,}1a^m$;

3) $0{,}6a^3b^nx^7 : 0{,}2ab^{n-2}x^5$; 4) $\left(-\frac{4}{5}a^2b^{k+1}c^{10}\right) : 2\frac{3}{5}b^{k-1}c^2$.

598. 1) $\frac{a^3}{b^5}\cdot\frac{2b^4}{3ax^2}$; 2) $4{,}9a^3x^5y\cdot\frac{2y^3}{7a^2b^2}\cdot\frac{5b^4}{x^7}$;

3) $\frac{m^7x}{ny^3} : \frac{m^5}{2y^4}$; 4) $\left(\frac{2}{3}ab^4x^3 : \frac{a^3b^2}{6x^2}\right)\cdot\frac{a}{2b^2x^5}$.

599. 1) $(-3a^2b^3)^2$; $\left(1\frac{2}{7}m^7np^3\right)^2$; $(-0{,}2x^5y^2)^3$; $\left(-\frac{2}{3}a^3bc^5\right)^4$;

2) $(a^n)^3$; $(-a^k)^4$; $(1{,}2x^3y^m)^2$; $\left(-\frac{1}{2}p^nqz^2\right)^5$;

3) $(2a^2x)^n$; $(3ab^3c^5)^m$; $(-x^2y)^{2k}$; $(5a^mb^n)^k$;

4) $\left(\frac{4ab^3}{5m^3n}\right)^2$; $\left(\frac{2a^xb}{3m^2p^5}\right)^3$; $\left(\frac{a^k}{b^2c^n}\right)^4$; $\left(\frac{p^3q^n}{a^m}\right)^k$.

600. 1) $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3\cdot\left(\frac{2b^2}{3a^3}\right)^2$; 2) $\left(\frac{a^2}{bx}\right)^5\cdot\left(\frac{x^3}{y^5}\right)^2\cdot\left(\frac{by^2}{a^3}\right)^3$;

3) $\left(\frac{2m^3}{3n^2}\right)^2 : \left(\frac{m^2}{n^3}\right)^3$; 4) $\left(\frac{2a^2b^3}{5xy^4}\right)^5 : \left(\frac{2ab^3}{5xy^5}\right)^4$.

601. 1) $\left[\left(\frac{pq^2}{a^3b}\right)^3\cdot\left(\frac{b^2q^3}{a^2p}\right)^2\right] : \left[\left(\frac{p^2q}{ab^3}\right)^4\cdot\left(\frac{b^2q^3}{ap^2}\right)^3\right]$;

2) $\left[\left(\frac{ab}{c}\right)^5 : \left(\frac{a^2m}{b^2c^2}\right)^3\right]\cdot\left[\left(\frac{cm^2}{a^3b^2}\right)^4 : \left(\frac{bc^3}{a^5}\right)^2\right]$.

602. 1) $\left(a^2+\frac{1}{a}\right)^2$; 2) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2$;

3) $(2x^5+5y^m)^2$; 4) $\left(\frac{m^x}{2}-\frac{n^3}{3}\right)^2$.

603. 1) $(1+2a-3b)^2$; 2) $(x^2-x+1)^2$;

3) $\left(a-\frac{1}{a}-1\right)^2$; 4) $\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{2}+2\right)^2$.

604. 1) $(5a^2-4a+3)^2$; 2) $(x^3+2ax^2-3a^3x+4a^5)^2$;

3) $\left(5a^2-3a+\frac{1}{3a}-\frac{3}{5a^2}\right)^2$; 4) $\left(8x^2-4x-2-\frac{1}{x}\right)^2$.

605. Вычислить:

1) $\frac{2\cdot3^{20}-5\cdot3^{19}}{9^9}$; 2) $\frac{(3\cdot2^{20}+7\cdot2^{19})\cdot52}{(13\cdot8^4)^2}$;

3) $\frac{25\cdot(180\cdot6^7-108\cdot6^6)}{216^3-36^4}$; 4) $\frac{(3^{15}+3^{13})\cdot2^9}{(3^{14}+3^{12})\cdot1024}$.

606. Упростить:

1) $\frac{2^m\cdot3^{n-1}-2^{m-1}\cdot3^n}{2^m\cdot3^n}$; 2) $\frac{5\cdot2^{n-2}+10\cdot2^{n-1}}{10^{n+2}}$.

607*. Упростить:

$(2+1)\cdot(2^2+1)\cdot(2^4+1)\cdot(2^8+1)\cdot(2^{16}+1)\cdot(2^{32}+1)\cdot(2^{64}+1)$.

608*. Доказать тождества:

1) $(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)\cdot(x^2+y^2)$;

2) $(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2=$
$=(a^2+b^2+c^2)^2\cdot(x^2+y^2+z^2)$.

Степень с нулевым и целым отрицательным показателями

609. Почему основание степени с нулевым показателем не может быть равным нулю?

610. Что больше:

1) 7^0 или $(-7)^0$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^0$; 3) $(-2)^2$ или 2^0;

4) $(-2)^5$ или $(-2)^0$; 5) 5^0 или -5^0?

611. Построить график функции $y=x^0$.

612. Справедливы ли следующие равенства, если n — натуральное число и $m=0$:

1) $2^n\cdot 2^m=2^{m+n}$; 2) $(3^n)^m=3^{m\cdot n}$?

613. Вычислить:

1) 10^{-1}; 1^{-7}; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-4}$; $(0,3)^{-2}$; $\left(\frac{1}{12}\right)^{-1}$; $0,1^{-3}$;

2) $(-5)^{-2}$; $(-1)^{-5}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$; $\left(-2\frac{1}{2}\right)^{-3}$; -4^{-3}; $-0,25^{-2}$;

3) $25\cdot 5^{-1}$; $4\cdot 2^{-3}$; $200\cdot 5^{-2}$; $9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; $0,01\cdot 0,5^{-3}$;
$1,6\cdot 0,2^{-4}$.

614. Что больше:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; 2) $(-3)^0$ или $(-3)^{-2}$;

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ или $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$; 4) $\left(1\frac{1}{4}\right)^2$ или $\left(1\frac{1}{4}\right)^{-2}$?

615. Вычислить:

1) $\left[\left(1\frac{1}{3}\right)^{-1}-2^{-2}\right]^{-3}$; 2) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}+3\cdot 2^{-3}\right]^{-2}$;

3) $\dfrac{0,1^{-1}-(0,4)^0}{2\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$; 4) $\dfrac{1^{-1}+2^{-2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+(-4)^{-1}\cdot 5+0,5^{-2}}$.

Следующие выражения преобразовать так, чтобы они не содержали отрицательных показателей степеней:

616. 1) $2a^{-2}b$; 2) $3x^{-1}y^{-2}$; 3) $\dfrac{5^{-1}m^2n^{-1}}{2a^2}$; 4) $\dfrac{(a+b)^{-1}x^3}{a(a-b)}$.

617. 1) $\dfrac{1}{a^{-2}}$; 2) $\dfrac{2a^2}{b^{-1}x^{-3}}$; 3) $\dfrac{a-x}{(a+x)^{-1}b^{-2}}$; 4) $\dfrac{2a(m-n)}{5^{-1}(m+n)^{-2}}$.

618. 1) $\frac{2a^{-1}\cdot b^{-2}}{3x^{-2}y^{-3}}$; 2) $\frac{3^{-2}(a-2)^{-2}b}{2^{-3}(b-3)^{-3}a^{-2}}$;

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}+\left(\frac{b}{a}\right)^{-2}$; 4) $(1+a^{-1}+a^{-2})^{-1}$.

Следующие дроби представить в виде целых выражений, вводя отрицательные показатели степеней:

619. 1) $\frac{1}{36}$; $\frac{1}{343}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{625}$; $\frac{1}{1024}$;

2) 0,1; 0,001; 0,000001; 0,0000000001;

3) $\frac{3}{25}$; $\frac{5}{32}$; $\frac{4}{81}$; 0,003; 0,0000017.

620. 1) $\frac{1}{a^3}$; $\frac{2}{a}$; $\frac{a}{b^2}$; $\frac{m^3}{n^5}$; $\frac{a}{b^x}$; $\frac{m^p}{n^q}$;

2) $\frac{3}{a^3b}$; $\frac{a}{(a+b)^2}$; $\frac{3x}{x-3}$; $\frac{ab^5}{2(a-b)^2}$;

3) $\frac{a-b}{a+b}$; $\frac{a+b}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$; $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$; $\frac{\left(\frac{1}{x^3}+x\right)^2}{\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^4}\right)^3}$.

621. Почему степень отличного от нуля числа с целым отрицательным показателем целесообразно определить как дробь, числитель которой есть 1, а знаменатель — степень того же числа, но с положительным показателем, равным абсолютной величине данного отрицательного показателя?

622. Исходя из определения степени с целым показателем, доказать справедливость следующих равенств:

1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ при $m>0$ и $n<0$;

2) $a^m : a^n=a^{m-n}$ при $m=0$ и $n<0$;

3) $(a^m)^n=a^{mn}$ при $m<0$ и $n\leqslant 0$.

Выполнить действия.

623. 1) $a^5\cdot a^{-3}$; $a^{-5}\cdot a^3$; $a^3\cdot a^{-3}$; $a^{-5}\cdot a^{-3}$;

2) $2a^3\cdot 3a^{-2}$; $6xy^{-2}\cdot\frac{2}{3}x^2y^{-1}$; $0{,}3a^{-2}b^3\cdot 1{,}5a^2b^{-1}$.

624. 1) $a^3 : a^{-2}$; $a^{-3} : a^2$; $a^{-2} : a^{-3}$; $a^{-3} : a^{-3}$;

2) $2a^{-2} : \frac{2}{3}a$; $1{,}2xy^{-2} : 4xy^{-5}$; $\frac{4}{7}m^7n^{-3}s^2 : 1\frac{3}{4}m^{-3}n^{-2}s^3$; $a^{-2}b^5 : 0{,}1a^{-4}b^2x^{-4}$.

625. 1) $(a^2-a+1-a^{-1}+a^{-2})\cdot a^{-2}$; 2) $(1-a^{-1}-a^{-2}-a^{-3}) : a^{-3}$;

3) $\left(a^{-4}+a^{-2}b^{-2}+b^{-4}\right)\cdot a^4b^4$;

4) $\left(a^{-3}-a^{-2}b^{-1}-a^{-1}b^{-2}+b^{-3}\right) : a^{-3}b^{-3}$.

626. 1) $(x^{-1}-y^{-1})\cdot(x+y)$; 2) $(x^{-2}+x^{-1}y^{-1}+y^{-2})\cdot(x^{-1}-y^{-1})$;
3) $(x^{-2}-y^{-2}):(x^{-1}+y^{-1})$; 4) $(x^{-3}+y^{-3}):(x^{-1}+y^{-1})$.

627. 1) $(a^2)^{-3}$; $(a^{-2})^3$; $(a^{-2})^{-3}$; 2) $(-x^2)^{-3}$; $(-1)^{2k}$; $(-1)^{2k-1}$;
3) $(5a^{-1}b^2c^{-3})^{-2}$; $(-0{,}2m^{-2}n^3)^{-3}$; $\left[\left(-\frac{2}{5}xy^{-4}\right)^{-1}\right]^{-2}$;
4) $\left(\frac{ab^{-2}}{5x^{-3}}\right)^{-2}$; $\left[\left(-\frac{2m}{n^{-2}}\right)^{-3}\right]^{-1}$; $\left(-\frac{m^x}{3x^{m+1}}\right)^{-2}$.

628. 1) $(a^{-1}-b^{-1})\cdot(a^{-1}+b^{-1})$; 2) $(a^{-5}+b^{-5})\cdot(a^{-5}-b^{-5})$;
3) $(x^{-2}-x^2)^2$; 4) $(m+m^{-2})^3$.

629. 1) $(a^{-1}+b^{-1})\cdot(a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2})$;
2) $(a^{-2}-b^{-2})\cdot(a^{-4}+a^{-2}b^{-2}+b^{-4})$;
3) $(m^{-4}-n^{-4}):(m^{-2}-n^{-2})$; 4) $(x^3+y^{-3}):(x+y^{-1})$.

630. Вычислить:

1) $\dfrac{2^3\cdot 2^{-1}+5^{-3}\cdot 5^4}{10^{-3}:10^{-2}-(0{,}25)^0}$; 2) $\dfrac{3^{-1}:9^2-(3^{-2})^3}{(-27)^{-2}}$;

3) $\dfrac{2:4^{-2}+(3^{-2})^3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{5^{-3}\cdot 25^2+(0{,}7)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$.

631. Решить уравнения:

1) $x+5x^{-1}=6$; 2) $6x^{-1}-x=1$;
3) $(3+x^{-1})\cdot(5-4x^{-1})=5-(x^{-1})^2$.

632. Упростить выражение $\dfrac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-n}-b^{-n}}-\dfrac{a^{-n}-b^{-n}}{a^{-n}+b^{-n}}$ и найти его числовое значение при $a=0{,}2$; $b=5$ и $n=1$.

633*. Упростить выражение

$$\left(\frac{a^{-n}-b^{-n}}{a^{-2n}-a^{-n}b^{-n}+b^{-2n}}\right)^{-1}+\left(\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-2n}+a^{-n}b^{-n}+b^{-2n}}\right)^{-1}$$

и найти его числовое значение при $a=0{,}1$; $b=\frac{1}{8}$ и $n=1$.

Упростить.

634. $\frac{1}{4}\cdot(xa^{-1}-ax^{-1})\cdot\left(\frac{a^{-1}-x^{-1}}{a^{-1}+x^{-1}}-\frac{a^{-1}+x^{-1}}{a^{-1}-x^{-1}}\right)$.

635. $\left(\frac{1+ax^{-1}}{a^{-1}x^{-1}}\cdot\frac{a^{-1}-x^{-1}}{a^{-1}x-ax^{-1}}\right):\frac{ax^{-1}}{x-a}$.

636. $\left[\frac{y^2(xy^{-1}-1)^2}{x(1+x^{-1}y)^2}\cdot\frac{y^2(x^{-2}+y^{-2})}{x(xy^{-1}-x^{-1}y)}\right]:\frac{1-x^{-1}y}{xy^{-1}+1}$.

637. Найти значение степеней по таблице обратных чисел.

1) $1{,}32^{-1}$; $1{,}695^{-1}$; $1{,}287^{-1}$; $2{,}25^{-1}$; $8{,}97^{-1}$;

2) $4{,}504^{-1}$; $1{,}3526^{-1}$; $7{,}038^{-1}$; $4{,}574^{-1}$; $1{,}1105^{-1}$;

3) $0{,}45^{-1}$; $0{,}07068^{-1}$; $30{,}17^{-1}$; $135{,}69^{-1}$; $17{,}315^{-1}$.

638. Дана функция $y=x^{-1}$.

1) Найти область определения и область изменения этой функции.

2) Определить, при каких значениях аргумента x данная функция принимает положительные значения; отрицательные значения.

3) Доказать, что функция $y=x^{-1}$ убывает в интервалах $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$. Имеет ли функция наибольшее и наименьшее значения?

4) Показать, что функция $y=x^{-1}$ является нечетной. Как можно использовать свойство нечетности функции при построении ее графика?

5) Построить график функции, определив предварительно по таблице обратных чисел координаты нескольких точек графика.

639*. Исследовать следующие функции и построить их графики:

1) $y=-x^{-1}$; 2) $y=|x|^{-1}$; 3) $y=12x^{-1}$;

4) $|y|=x^{-1}$; 5) $y=x^{-1}+x$.

640. Дана функция $y=x^{-2}$.

1) Найти область определения и область изменения функции.

2) Определить, при каких значениях x данная функция а) возрастает; б) убывает. Имеет ли функция наибольшее и наименьшее значения?

3) Доказать, что функция $y=x^{-2}$ является четной. Как можно использовать свойство четности функции при построении ее графика?

4) Исходя из установленных свойств функции, построить ее график.

641*. Исследовать следующие функции и построить их графики:

1) $y=-x^{-2}$; 2) $y=1-x^{-2}$;

3) $y=(x-2)^{-2}$; 4) $y=(x+1)^{-2}+3$.

642*. Решить графически следующие уравнения:

1) $x^{-1}-x=0$; 2) $x^{-1}=|x+0{,}5|-2$;

3) $x^2+x^{-2}=0$; 4) $x^{-2}=\frac{x+|x|}{2}$.

§ 13. СТЕПЕНЬ С ДРОБНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Корень n-й степени

643. Найти значения следующих корней и проверить ответы:

1) $\sqrt{4}$; 2) $\sqrt{\frac{25}{49}}$; 3) $\sqrt[4]{625}$; 4) $\sqrt[3]{0{,}001}$;

5) $\sqrt[5]{-32}$; 6) $\sqrt[3]{0{,}343}$; 7) $\sqrt[4]{4096}$; 8) $\sqrt[5]{-0{,}01024}$.

644. Найти два соседних натуральных числа, между которыми заключено значение каждого из следующих корней:

1) $\sqrt{20}$; 2) $\sqrt[3]{80}$; 3) $\sqrt[4]{5^3}$; 4) $\sqrt[3]{7^2}$; 5) $\sqrt{7^3}$.

645. При каких действительных значениях x имеет смысл выражение $\sqrt[n]{x}$, где n — натуральное число, большее 1?

Рассмотреть следующие случаи: 1) n — четное число; 2) n — нечетное число.

646. Указать, какие из следующих корней не могут быть выражены действительными числами:

1) $\sqrt[3]{-27}$; 2) $\sqrt{-25}$; 3) $\sqrt[5]{-32}$; 4) $\sqrt[4]{-1}$; 5) $\sqrt[10]{0}$;

6) $\sqrt[3]{x}$, где $x < 0$; 7) $\sqrt[4]{x}$, где $x < 0$.

647. Найти допустимые значения x в следующих выражениях:

1) $\sqrt{1+x}$; 2) $\sqrt{x-2}$; 3) $\sqrt{1-x^2}$; 4) $\sqrt[3]{x-5}$;

5) $\sqrt[4]{2-2x}$; 6) $\sqrt[6]{|x|+1}$; 7) $\sqrt{x-|x-1|}$;

8) $\sqrt{12-x-x^2}$; 9) $\sqrt{x^2+|x-6|}$.

648. Для каких действительных значений x справедливо тождество $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$, где n — натуральное число, большее 1?

649. Найти:

1) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^3$; 2) $\left(\sqrt{2x}\right)^2$; 3) $\left(\sqrt[5]{x^3y^4}\right)^5$; 4) $\left(\sqrt[11]{5a^2mn^7}\right)^{11}$.

650. Доказать тождество

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}, \text{ где } a > 0 \text{ и } n \text{ — натуральное число.}$$

651. Заменить корень нечетной степени из отрицательного числа корнем той же степени из положительного числа:

1) $\sqrt[3]{-3}$; $\sqrt[5]{-5}$; $\sqrt[15]{-27}$;

2) $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$; $\sqrt[7]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt[3]{a-b}$, где $a<b$; $\sqrt[5]{(a-3)^3}$, где $a<3$.

Арифметическое значение корня

652. Рассматривая два различных значения каждого квадратного корня, найти все значения суммы $\sqrt{9}+\sqrt{36}$. Как избежать многозначности ответа?

653. Найти допустимые значения a, при которых следующие выражения будут арифметическими корнями:

1) $\sqrt[3]{1+a}$; 2) $\sqrt[3]{2-a}$; 3) $\sqrt[5]{a+\frac{1}{a}-2}$.

654. Найти арифметические значения корня:

1) $\sqrt{25}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt[4]{81}$;

2) $\sqrt{(-4)^2}$; $\sqrt{(-7)^4}$; $\sqrt{(-3)^6}$; $\sqrt{(-2)^2}-\sqrt{(-3)^2}$;

3) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$; $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$;

$\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}$; $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})^2}$;

4) $\sqrt{a^2}$; $\sqrt{(-a)^2}$; $\sqrt[4]{a^4}$; $\sqrt[4]{(-a)^4}$; $\sqrt[6]{a^6}$; $\sqrt[3]{a^3}$.

655. Вычислить:

1) $\sqrt{(a-2)^2}$ при $a\leqslant 2$; 2) $\sqrt{(2-a)^2}$ при $a\geqslant 2$;

3) $\sqrt{(a-b)^2}$ при $a>b$; 4) $\sqrt{(a-b)^2}$ при $a<b$.

656. При каких значениях a справедливо равенство:

1) $\sqrt{(a-3)^2}=3-a$; 2) $\sqrt{(1-a)^2}=a-1$;

3) $\sqrt{(2a-1)^2}=2a-1$; 4) $\sqrt{a^2-3a+2{,}25}=|1{,}5-a|$?

657. Доказать, что:

1) $$a-5-\sqrt{(a+5)^2}=\begin{cases}-10, & \text{если } a\geqslant -5;\\ 2a, & \text{если } a<-5;\end{cases}$$

2) $$a-b-\sqrt{(a-b)^2}=\begin{cases}0, & \text{если } a\geqslant b;\\ 2(a-b), & \text{если } a<b.\end{cases}$$

658. Вычислить:

1) $\sqrt[4]{(x-1)^4}$ а) при $x \geqslant 1$; б) при $x < 1$;

2) $\sqrt[6]{(x-y)^6}$ а) при $x > y$; б) при $x < y$;

3) $\sqrt[n]{(a-b)^n}$ при $a < b$. Рассмотреть случаи: а) n — четное число; б) n — нечетное число.

659. Для каких натуральных значений n справедливо тождество $\sqrt[n]{a^n} = a$? Привести примеры.

660. Какие значения может принимать выражение $\frac{\sqrt[n]{a^n}}{a}$, если: 1) $a > 0$; 2) $a < 0$; 3) $a = 0$? Рассмотреть случаи: n — четное число; n — нечетное число. Привести примеры в каждом случае.

Основное свойство арифметического корня

661. Вычислить: 1) $\sqrt[4]{25^2}$; 2) $\sqrt[6]{36^3}$; 3) $\sqrt[12]{64^2}$; 4) $\sqrt[8]{2{,}25^4}$.

662. Пользуясь таблицами квадратных корней, найти:

1) $\sqrt[4]{49}$; 2) $\sqrt[6]{216}$; 3) $\sqrt[14]{128}$; 4) $\sqrt[8]{0{,}0625}$.

663. Сократить показатели корней и показатели степени подкоренных выражений [1]):

1) $\sqrt[4]{x^2}$; $\sqrt[6]{a^3}$; $\sqrt[10]{a^5}$; $\sqrt[8]{q^4}$; $\sqrt[12]{n^6}$;

2) $\sqrt[8]{a^6}$; $\sqrt[6]{y^4}$; $\sqrt[12]{x^8}$; $\sqrt[24]{m^{16}}$; $\sqrt[18]{z^{12}}$;

3) $\sqrt[4]{36a^2}$; $\sqrt[6]{27a^3b^3}$; $\sqrt[6]{25x^2y^4}$; $\sqrt[8]{16a^8b^4}$;

4) $\sqrt[6]{\frac{9}{16}a^2b^4}$; $\sqrt[4]{\frac{25x^2}{81m^2}}$; $\sqrt[9]{\frac{8a^6b^3}{125x^6y^9}}$; $\sqrt[12]{\frac{27m^9}{343a^6b^3}}$;

5) $\sqrt[10]{32a^{5k}b^{15}}$; $\sqrt[3k]{x^ky^{2k}}$; $\sqrt[2n]{n^na^{3n}b^{n^2}}$;

6) $\sqrt[4]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$; $\sqrt[4]{(5-a)^2}$ при $a > 5$;

$\sqrt[8]{(a-x)^4}$ при $a < x$.

---

[1]) Здесь и в дальнейшем, если нет специальных указаний, рассматривать только арифметические корни, причем буквы в подкоренных выражениях обозначают положительные числа и разность вида $a-b$ рассматривается при условии $a > b$.

664. Доказать тождества:

1) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$, если $a \geqslant 0$; $n = 2, 3, 4, \ldots$; $m = 0, 1, 2, \ldots$; $k = 1, 2, 3, \ldots$;

2) $\sqrt[2n+1]{(-a)^{2m+1}} = -\sqrt[(2n+1)k]{a^{(2m+1)k}}$, если $a > 0$; n, m и k — натуральные числа.

665. Какое число больше:

1) $\sqrt[10]{20}$ или $\sqrt[5]{5}$; 2) $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$; 3) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$ или $\sqrt[6]{6}$?

666. Положительным или отрицательным числом является разность:

1) $\sqrt[4]{3} - \sqrt[5]{4}$; 2) $\sqrt[5]{2} - \sqrt[6]{3}$; 3) $1 - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[3]{11}}$?

667. Привести к одинаковому показателю следующие корни:

1) $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[6]{7}$; 2) $\sqrt{6}$; $\sqrt[4]{17}$ и $\sqrt[8]{40}$;

3) $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[4]{4}$; 4) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[3]{-9}$;

5) $\sqrt[5]{-3}$; $\sqrt[3]{-2}$ и $\sqrt[15]{100}$; 6) $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt{a^{-1}}$ и $\sqrt[4]{a^3}$;

7) $\sqrt[6]{x^5}$; $\sqrt[4]{y^{-3}}$ и $\sqrt[9]{z^8}$;

8) $\sqrt{2m}$; $\sqrt[6]{5n^5}$; $\sqrt[4]{4k^3}$ и $\sqrt[3]{2l^2}$;

9) $\sqrt[n]{a^2b^{-3}}$; $\sqrt[6]{a^{-3}b^2}$ и $\sqrt[3n]{a^2b^3}$;

10) $\sqrt[2k]{\frac{a^5b}{x^3y^2}}$ и $\sqrt[2k+1]{-\frac{a^2x^3}{by^2}}$.

Степень с дробным показателем

668. Следующие корни заменить выражениями с дробными показателями:

1) $\sqrt{x}$; $\sqrt[3]{x^2}$; $\sqrt[4]{y^3}$; $\sqrt[6]{b^2}$; $\sqrt[n]{a^k}$; $\sqrt[n]{a}$;

2) $\sqrt{a^{-1}}$; $\sqrt[3]{b^{-2}}$; $\sqrt[4]{x^{-3}}$; $\sqrt[2n]{a^{-n}}$; $\sqrt[3n]{a^6}$;

3) $a\sqrt[3]{b^2}$; $5\sqrt{x}$; $\sqrt{(a-b)^{-1}}$; $\sqrt[6]{(x+2)^{-2}}$; $2a\sqrt[3]{a+b}$.

669. Выражения с дробными показателями заменить корнями:

1) $a^{\frac{1}{3}}$; $n^{\frac{3}{4}}$; $x^{\frac{1}{n}}$; $y^{\frac{2}{m}}$; $z^{\frac{p}{q}}$;

2) $x^{0,5}$; $a^{0,25}$; $b^{0,75}$; $y^{2\frac{3}{4}}$; $n^{1,25}$;

3) $a^{-\frac{1}{2}}$; $n^{-3,75}$; $x^{-\frac{3}{m}}$; $y^{-\frac{n}{2}}$; $b^{-\frac{m}{n}}$;

4) $(a+b)^{\frac{1}{3}}$; $(m-n)^{\frac{3}{4}}$; $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$; $5a^{-\frac{2}{3}}$; $2(a^2-b)^{\frac{2}{5}}$;

5) $a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{2}}$; $\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{2}}$; $2a\left(m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{5}}$.

Вычислить.

670. 1) $49^{\frac{1}{2}}$; $27^{\frac{1}{3}}$; $8^{\frac{2}{3}}$; $32^{\frac{2}{5}}$; $81^{\frac{3}{4}}$;

2) $100^{-\frac{1}{2}}$; $64^{-\frac{3}{4}}$; $25^{-0,5}$; $16^{-0,75}$; $9^{-1\frac{1}{2}}$.

671. 1) $2\cdot 27^{\frac{2}{3}}$; 2) $5^{-1}\cdot 25^{\frac{1}{2}}$;

3) $100^{-\frac{1}{2}}\cdot(0,1)^{-2}$; 4) $(6,25)^{-0,5}\cdot(0,01)^{-1}$.

672. 1) $\left(\frac{25}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$; 2) $(0,008)^{-\frac{2}{3}}\cdot 25^{-1}$;

3) $(0,75)^{-1}\cdot\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2,5)^2$.

673. Объем куба равен V. Используя дробные показатели,

1) выразить: а) ребро a куба через его объем V; б) площадь S грани куба через его объем;

2) вычислить a и S, если $V=64$.

674. Почему нельзя доказать равенство $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$?

675. Исходя из определения степени с дробным показателем, доказать тождество

$$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mk}{nk}},\ a>0.$$

676. В данных степенях показатели выразить дробями, имеющими общие знаменатели:

1) $3^{\frac{1}{3}}$ и $5^{\frac{1}{4}}$; 2) $2^{\frac{1}{2}}$; $9^{\frac{2}{3}}$ и $15^{\frac{3}{4}}$; 3) $a^{\frac{2}{5}}$; $b^{\frac{5}{6}}$ и $c^{\frac{2}{3}}$;

4) $x^{\frac{2}{k}}$ и $y^{\frac{3}{5}}$; 5) $a^{\frac{5}{n}}$; $b^{\frac{k}{n^2}}$ и $c^{\frac{1}{3n}}$.

677. Дана функция $y=x^{\frac{1}{2}}$.

1) Найти область определения и область изменения функции.

2) Доказать, что данная функция возрастает во всей области ее определения.

3) Пользуясь счетной линейкой, найти с точностью до 0,1 значения функции $y=x^{\frac{1}{2}}$ при указанных значениях аргумента x и построить график функции.

x	0,0	0,2	0,5	0,8	1,0	1,2	1,5	1,7	2,0	2,2	2,9	4,0	9,0
$y=x^{\frac{1}{2}}$													

4) Проиллюстрировать на графике, что: а) каждому допустимому значению аргумента x соответствует только одно значение функции y; б) при возрастании значений аргумента x значения функции y также возрастают; в) функция $y=x^{\frac{1}{2}}$ не имеет наибольшего значения.

5) Пользуясь графиком, найти с точностью до 0,1 значения функции $y=x^{\frac{1}{2}}$ при $x=0{,}4$; 1,9; 3,2; 7,3; 10,9.

6) Показать, что график функции $y=x^{\frac{1}{2}}$ есть зеркальное изображение по отношению к биссектрисе первого координатного угла графика функции $y=x^2$, $x\geqslant 0$.

678. Построить графики функций: 1) $y=-x^{\frac{1}{2}}$; 2) $y=|x|^{\frac{1}{2}}$. Чем отличается график каждой из этих функций от графика функции $y=x^{\frac{1}{2}}$?

679. 1) Построить графики функций:

а) $y=2+x^{\frac{1}{2}}$;
б) $y=-2+x^{\frac{1}{2}}$;
в) $y=(x+3)^{\frac{1}{2}}$;
г) $y=(x-3)^{\frac{1}{2}}$.

2) Какой геометрический смысл имеют параметры m и n в уравнении $y=m+(x+n)^{\frac{1}{2}}$?

3) Пользуясь шаблоном для построения графика функции $y=x^2\,(x\geqslant 0)$, построить графики функций:

а) $y=(x-1)^{\frac{1}{2}}$;
б) $y=(1-x)^{\frac{1}{2}}$;
в) $y=1+(x+1)^{\frac{1}{2}}$;
г) $y=-2-(x+3)^{\frac{1}{2}}$.

680. Показать на графике, что следующие уравнения не имеют действительных корней:

1) $(x+2)^{\frac{1}{2}}+3=0$; 2) $x^{\frac{1}{2}}+(x+2)^{\frac{1}{2}}=-1$;

3) $(x-1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{2}}+2=0$.

681. Решить графически следующие уравнения:

1) $x+1=(x+7)^{\frac{1}{2}}$; 2) $x+1=-\sqrt{x+7}$;

3) $x-2=(3x-8)^{\frac{1}{2}}$; 4) $\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7$;

5) $x^{\frac{1}{2}}=|x-2|$; 6) $2x^{\frac{1}{2}}+x=3$;

7) $(x+1)^{\frac{1}{2}}-(x+1)^2=0$; 8) $2x^{\frac{1}{2}}-(x+2)^{\frac{1}{2}}=0$.

682*. Решить и исследовать уравнения:

1) $(x-1)^{\frac{1}{2}}=a$; 2) $\sqrt{3x-a}=a-2x$;

3) $(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}=3a-2x$; 4) $\sqrt{5+x}+\sqrt{3+x}=m$;

5) $4x-(4x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}=4a$.

683. Дана функция $y=x^{\frac{1}{3}}$.

1) Найти области определения и изменения функции.

2) Определить, при каких значениях x данная функция: а) обращается в нуль; б) принимает положительные значения; в) принимает отрицательные значения.

3) Выяснить характер изменения функции с возрастанием ее аргумента. Имеет ли эта функция наибольшее или наименьшее значение?

4) Показать, что функция $y=x^{\frac{1}{3}}$ является нечетной.

5) Исходя из установленных свойств функции, построить (схематически) ее график и объяснить, как при построении графика можно использовать свойство нечетности функции.

684. Построить графики функций:

1) $y=-x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y=|x|^{\frac{1}{3}}$.

Чем отличается график каждой из этих функций от графика функции $y=x^{\frac{1}{3}}$?

685. Исследовать функции и построить их графики:

1) $y=0{,}5x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y=3x^{\frac{1}{3}}$;

3) $y=(x+1)^{\frac{1}{3}}$; 4) $y=1-0{,}5x^{\frac{1}{3}}$.

Каким изменениям (сдвиг, сжатие, растяжение, зеркальное изображение) надо подвергнуть график функции $y=x^{\frac{1}{3}}$, чтобы получить график каждой из данных функций?

686. Решить графически следующие уравнения:

1) $x^{\frac{1}{3}}=x$; 2) $(x+1)^{\frac{1}{3}}+0{,}5x=0$;

3) $x^{\frac{1}{3}}+x^2=2$; 4) $\frac{1}{2}\left(|x|^{\frac{1}{3}}+|x|\right)=1$.

Действия над степенями с дробными показателями

687. Исходя из определения степени с дробным показателем, доказать справедливость следующих равенств:

1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ при: а) $m=\frac{2}{3}$ и $n=\frac{1}{2}$;
б) $m=-\frac{3}{4}$ и $n=-\frac{2}{5}$;

2) $a^m:a^n=a^{m-n}$ при: а) $m=0{,}75$ и $n=\frac{2}{3}$;
б) $m=-2\frac{1}{3}$ и $n=-\frac{1}{6}$;

3) $(a^m)^n=a^{mn}$ при: а) $m=\frac{3}{5}$ и $n=\frac{5}{6}$;
б) $m=-0{,}2$ и $n=-1{,}5$;

4) $(ab)^n=a^nb^n$ при: а) $n=\frac{4}{5}$; б) $n=-1\frac{2}{3}$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ при: а) $n=2{,}5$; б) $n=-\frac{p}{q}<0$.

Произвести указанные действия.

688. 1) $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{4}}$; 2) $b^{\frac{2}{5}}\cdot b^{\frac{1}{4}}$;

3) $5x^{\frac{1}{3}}\cdot 2x^{-\frac{1}{5}}$; 4) $\frac{2}{3}a^2m^{-\frac{7}{8}}\cdot a^{-1}m^{\frac{5}{6}}$.

689. 1) $m^{\frac{3}{4}}:m^{\frac{1}{2}}$; 2) $n^{-\frac{3}{5}}:n^{-\frac{4}{5}}$;

3) $6p^{\frac{5}{6}}:3p^{-\frac{2}{3}}$; 4) $0{,}2a^{\frac{2}{5}}q^{-\frac{7}{8}}:0{,}1a^{-\frac{3}{5}}q^{\frac{1}{8}}$.

690. 1) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{6}}$; 2) $(p^{-2,5}q^{1,25})^{-0,4}$;

3) $\left(16a^{1\frac{1}{2}}b^{-2}\right)^{\frac{3}{4}}$; 4) $\left(0{,}027m^{-\frac{3}{5}}n^{-1}\right)^{-1\frac{2}{3}}$.

691. 1) $\left(\frac{a}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}}$; 2) $\left(\frac{m^{\frac{1}{2}}}{8n^{\frac{2}{5}}}\right)^{\frac{1}{3}}$;

3) $\left(\frac{32x^{-\frac{3}{4}}}{a^3y^5}\right)^{-0,2}$ 4) $\left(\frac{a^3b^{1,5}}{0{,}001p^{1\frac{1}{5}}q^{-2}}\right)^{-1\frac{2}{3}}$.

692. 1) $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\cdot a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; 2) $\left(m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)$;

3) $\left(3x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{3}{2}}\right)\cdot\left(3x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{3}{2}}\right)$;

4) $\left(p^{\frac{1}{3}}-2q^{-\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(p^{\frac{1}{3}}+2q^{-\frac{1}{4}}\right)$.

693. 1) $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2$; 2) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^2$;

3) $\left(2m^{-\frac{3}{4}}+3m^{\frac{3}{4}}\right)^2$; 4) $\left(x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{6}}\right)^2$.

694. 1) $\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)^3$; 2) $\left(m^{-\frac{2}{3}}-m^{\frac{4}{3}}\right)^3$;

3) $(p-2+p^{-1})\cdot\left(p^{\frac{1}{2}}-p^{-\frac{1}{2}}\right)$;

4) $\left(a^{-\frac{1}{5}}+a^{\frac{2}{5}}\right)\cdot\left(a^{-\frac{2}{5}}+a^{\frac{4}{5}}\right)\cdot\left(a^{\frac{2}{5}}-a^{-\frac{1}{5}}\right)$.

695. 1) $\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{5}{6}}+a\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{2}}\right)$;

2) $\left(b^{-\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+1\right)\cdot\left(b^{\frac{2}{3}}-b^{-\frac{2}{3}}\right)$;

3) $\left(z^{\frac{2}{3}}+1\right)\cdot\left(z^{\frac{4}{9}}+z^{\frac{2}{9}}+1\right)\cdot\left(z^{\frac{2}{9}}-1\right)$;

4) $\left(x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}}\right)$.

696. 1) $\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\right):\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$;

2) $(x^{1,5}-y^{1,5}):(x+x^{0,5}y^{0,5}+y)$;

3) $\left(10m-15m^{\frac{2}{3}}-32m^{\frac{1}{3}}+18+24m^{-\frac{1}{3}}\right):\left(5m^{\frac{2}{3}}-6\right)$;

4) $\left(p^{\frac{5}{6}}+2p^{\frac{1}{2}}-2p^{\frac{1}{6}}-4p^{-\frac{1}{6}}-\right.$

$\left.-3p^{-\frac{1}{2}}-6p^{-\frac{5}{6}}\right):\left(p-2p^{\frac{1}{3}}-3p^{-\frac{1}{3}}\right)$.

697. 1) $\dfrac{a-x}{a^{0,5}-x^{0,5}}-\dfrac{a^{1,5}-x^{1,5}}{a-x}$;

2) $\dfrac{m+n}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{m-n}{m^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{m^{\frac{2}{3}}-n^{\frac{2}{3}}}{m^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}}$;

3) $\dfrac{a^{0,5}-b^{-0,5}}{a^{-0,5}-b^{0,5}}-\dfrac{a^{-0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{-0,5}}$;

4) $\dfrac{(x-y)^2}{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y\right)}$.

698. Вычислить M, если

$$M=\frac{512^2\cdot\sqrt{16384}\cdot\sqrt[3]{4096^2}}{32\cdot\sqrt[3]{8^5}\cdot 1024}.$$

699. Подсчитать, с каким показателем входит a в выражение

$$\sqrt[6]{a^3\sqrt[5]{a^2\sqrt{a}}}.$$

700. Известно, что $N=a^{2\frac{1}{3}}$, $M=a^3$, $P=a^{4\frac{1}{2}}$.

С каким показателем входит a в выражение $\dfrac{N^2\sqrt[4]{NP}}{\sqrt{M^3N}}$?

701*. Показать, что $(x+y+z)^3=27xyz$, если $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$

Упростить.

702. 1) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{6}}}:\left[\dfrac{c^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}\cdot\dfrac{a^{-\frac{5}{6}}c^{-\frac{2}{3}}}{b^{\frac{5}{6}}}\right]$;

2) $\left\{a^{\frac{1}{3}}\cdot\left[a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}\cdot(a^2b^2)^{\frac{2}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}^6$.

703. 1) $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{5}{6}}}:\sqrt[4]{a^{-3}b^{-5}}\right)^{\frac{2}{7}}$;

2) $\left[\left(\dfrac{x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{3}}}{z^{-\frac{5}{4}}}\cdot\dfrac{z^4}{x^{-3}y^{-\frac{5}{3}}}\right):\dfrac{y^{-2}z^{\frac{1}{4}}}{x^{-\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{5}}$;

3) $\left(2^{\frac{1}{4}}a+3^{\frac{1}{4}}b\right)\cdot\left(3^{\frac{1}{4}}a-2^{\frac{1}{4}}b\right)-6^{\frac{1}{4}}(a^2-b^2)+2^{\frac{1}{2}}ab$.

Решить уравнения.

704. 1) $\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{5+x}}=\sqrt{5+x}$;

2) $\sqrt{7x+29}-\sqrt{2x-1}=\frac{5(2x-1)}{3\sqrt{2x-1}}$;

3) $\frac{x^{\frac{1}{2}}-2}{x^{\frac{1}{2}}+3}=\frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x^{\frac{1}{2}}+21}$; 4) $\frac{3x^{\frac{1}{2}}-5}{5\left(x^{\frac{1}{2}}-3\right)}=\frac{2x^{\frac{1}{2}}+3}{4x^{\frac{1}{2}}-7}$.

705. 1) $(x+3)\cdot(x-1)^{-\frac{1}{2}}=(3x+1)^{\frac{1}{2}}$;

2) $(3x+4)^{\frac{1}{2}}\cdot(2x-5)^{\frac{1}{2}}=2x+1$;

3) $12(10+x)^{-\frac{1}{2}}-(2x+3)^{\frac{1}{2}}=(10+x)^{\frac{1}{2}}$;

4) $(7-x)^{\frac{1}{2}}+12(7-x)^{-\frac{1}{2}}=2(37+5x)^{\frac{1}{2}}$.

706. 1) $(2x+3)^{\frac{1}{2}}-(x+1)^{\frac{1}{2}}=1$;

2) $(3x+7)^{\frac{1}{2}}+2=(x+11)^{\frac{1}{2}}$;

3) $(x+2)^{\frac{1}{2}}+(3x+7)^{\frac{1}{2}}=(8-x)^{\frac{1}{2}}$;

4) $2(3x-1)^{\frac{1}{2}}-(x-1)^{\frac{1}{2}}=(x-9)^{\frac{1}{2}}$.

707. 1) $\left[x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}+\left[x-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}=-6$;

2) $\frac{3}{3+\sqrt{9-x^2}}-\frac{1}{3-\sqrt{9-x^2}}=\frac{2}{x}$;

3) $\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{x}}-\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{x}}=2\sqrt[4]{3}$;

4) $\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(x-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=2x^{\frac{1}{2}}\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

При решении следующих уравнений использовать формулы:

$$(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b).$$

708. 1) $(8+x)^{\frac{1}{3}}+(8-x)^{\frac{1}{3}}=4$;

2) $(3x+7)^{\frac{1}{3}}-(3x-7)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}$;

3) $\left(9+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(9-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=3\cdot 2^{\frac{1}{3}}$;

4) $\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)^{\frac{1}{3}}-\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{3}}=1.$

709. Решить уравнения с помощью введения вспомогательного неизвестного:

1) $x^{\frac{2}{3}}+8=9x^{\frac{1}{3}}$; 2) $x^2-5(x^2-2)^{\frac{1}{2}}=-4$;

3) $x^2-4x-3(x^2-4x+20)^{\frac{1}{2}}=-10$;

4) $x^2-3x+2(x^2-3x+11)^{\frac{1}{2}}=4$.

Решить следующие иррациональные уравнения:

710. 1) $(x-a)^{\frac{1}{2}}=x-a$; 2) $(x+a)^{\frac{1}{2}}-(x-a)^{\frac{1}{2}}=(2a)^{\frac{1}{2}}$;

3) $(a^2+bx)^{\frac{1}{2}}+(bx-2ab)^{\frac{1}{2}}=a+2b$;

4) $\left(1+x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1+x-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=a$.

711. 1) $(a-x)^{\frac{1}{2}}+(x-2)^{\frac{1}{2}}=(a-2)^{\frac{1}{2}}$; 2) $a\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)^{-1}=x^{\frac{1}{2}}-1$;

3) $(a-1)(x+1)^{-\frac{1}{2}}=1$; 4) $a\left(x^{\frac{1}{2}}+2\right)^{-1}=x^{\frac{1}{2}}-2$.

§ 14. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОРНЕЙ

Извлечение корня из произведения, дроби и степени

712. Доказать тождества и сформулировать соответствующие правила ($a>0$, $b>0$):

1) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$; 2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

713. Извлечь корень из произведения:

1) $\sqrt{16\cdot25}$; $\sqrt{36\cdot81}$; $\sqrt{9\cdot25\cdot36}$; $\sqrt{49\cdot100\cdot64}$; $\sqrt{25\cdot81\cdot64}$;

2) $\sqrt[3]{27\cdot216}$; $\sqrt[3]{8\cdot125\cdot512}$; $\sqrt[3]{64\cdot343\cdot1000}$; $\sqrt[4]{16\cdot81\cdot625\cdot256}$.

714. Извлечь корень из дроби:

1) $\sqrt{\frac{121}{169}}$; $\sqrt[3]{\frac{8}{343}}$; $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$; $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$; $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$;

2) $\sqrt{0,01}$; $\sqrt{0,0144}$; $\sqrt[3]{0,008}$; $\sqrt[3]{0,343}$; $\sqrt[4]{0,0016}$.

715. Извлечь корень из степени:

1) $\sqrt{5^4}$; $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^4}$; $\sqrt[3]{3^6}$; $\sqrt[5]{2^{10}}$; $\sqrt[4]{(0,1)^{12}}$;

2) $\sqrt{a^6}$; $\sqrt[3]{x^{12}}$; $\sqrt[5]{m^{20}}$; $\sqrt[4]{n^{16}}$; $\sqrt[6]{b^{18}}$;

3) $\sqrt{x^{2k}}$; $\sqrt[3]{a^{3n}}$; $\sqrt[n]{b^{5n}}$; $\sqrt[2n+1]{z^{10n+5}}$; $\sqrt[x]{a^{x}}$.

Произвести действия.

716. 1) $\sqrt{a^2b^6}$; $\sqrt[3]{x^6y^3}$; $\sqrt[3]{8m^3n^9}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{64}p^6q^3r^{12}}$;

2) $\sqrt[4]{16a^8b^{12}}$; $\sqrt[5]{-1024x^{10}y^5z^{15}}$; $\sqrt[3]{-343m^{12}n^9}$; $\sqrt[4]{0,0081a^{12}b^4c^{20}}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{8a^3b^6}{27x^{12}y^9}}$; $\sqrt[3]{-\frac{343m^{12}}{64n^6p^{15}}}$; $\sqrt[5]{-\frac{a^{10}b^{20}}{32x^{15}}}$; $\sqrt[4]{\frac{16r^{16}s^{12}}{81p^{24}q^4}}$.

717. 1) $\sqrt{a^{-2}}$; $\sqrt[3]{b^{-6}}$; $\sqrt[5]{-x^{-10}}$; $\sqrt[3]{27z^{-9}}$;

2) $\sqrt{\frac{25m^{-4}}{49n^{-2}}}$; $\sqrt[3]{-\frac{125a^{-3}}{216}}$; $\sqrt[5]{-\frac{1}{32a^{-5}b^{10}}}$; $\sqrt[4]{\frac{16x^{-8}y^4}{625a^{-4}b^{-12}}}$;

3) $\sqrt{0,01a^{2n}}$; $\sqrt[5]{-243m^{-10}n^{5n}}$; $\sqrt[6]{64a^{12n}b^{-18k}}$.

Вынесение множителей из-под знака корня

718. Проверить равенство

$$(a^nb)^{\frac{1}{n}} = ab^{\frac{1}{n}}; \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Записать это равенство с помощью знака корня и сформулировать соответствующее правило.

719. Не вычисляя значения корней, определить, какое число из данной пары чисел больше:

1) $3\sqrt{45}$ или $5\sqrt{20}$; 2) $3\sqrt{32}$ или $2\sqrt{50}$;

3) $2\sqrt[3]{81}$ или $3\sqrt[3]{32}$; 4) $3\sqrt[3]{54}$ или $2\sqrt[3]{128}$.

Вынести множители из-под знака корня.

720. 1) $\sqrt{20}$; $\sqrt{147}$; $\sqrt{108}$; $\sqrt{245}$; $\sqrt{363}$;

2) $\sqrt[3]{24}$; $\sqrt[3]{54}$; $\sqrt[3]{512}$; $\sqrt[3]{375}$; $\sqrt[3]{1080}$;

3) $\sqrt[4]{80}$; $\sqrt[4]{405}$; $\sqrt[4]{324}$; $\sqrt[5]{160}$; $\sqrt[5]{486}$.

721. 1) $\sqrt{x^3}$; $\sqrt[3]{a^4}$; $\sqrt[5]{m^7}$; $\sqrt[4]{n^{13}}$; $\sqrt[n]{z^{2n+1}}$;

2) $\sqrt{25n^3}$; $\sqrt{45a^5}$; $\sqrt[3]{24x^3}$; $\sqrt[5]{160m^{10}n^3}$; $\sqrt[4]{a^{4n+1}b^5}$;

3) $\frac{2}{3}a\sqrt{72a^3b}$; $\frac{3}{x}\sqrt{\frac{a^5x^2}{18}}$; $x^3\sqrt{\frac{12a^2b}{49x^4}}$; $\sqrt[4]{\frac{80x^3}{243m^5n^9}}$.

722. 1) $\sqrt[k]{x^ky^{k+1}}$; $a\sqrt[n]{a^{2n+1}b^{3n}}$; $\frac{a}{b}\sqrt[5]{243a^{6x}b^{10}}$;

2) $\frac{m}{n^2}\sqrt[3]{\frac{40m^{3n+2}n^6}{a^6b^{4n}}}$; $x\sqrt[m]{\frac{x^{m+1}}{y^{mx}}}$; $\sqrt[a]{\frac{x^{a+b}y^{ab}}{z^{a^2}}}$.

723. При каких значениях a и b справедливы следующие равенства:

1) $\sqrt[2k]{a^{2k}b} = a\sqrt[2k]{b}$; 2) $\sqrt[2k]{a^{2k}b} = -a\sqrt[2k]{b}$;

3) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$; 4) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$?

Привести числовые примеры для каждого случая.

Вынести множители из-под знака корня.

724. 1) $\sqrt{2(3-\sqrt{10})^2}$; 2) $\sqrt{18(2-\sqrt{3})^2}$;

3) $\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-2)^2}{8}}$; 4) $\sqrt{\frac{20}{(1-\sqrt{2})^2}}$.

725. 1) $\sqrt{32(2-\sqrt{5})^4}$; 2) $\sqrt{48(\sqrt{5}-2)^4}$;

3) $\sqrt[3]{40(1-\sqrt{3})^3}$; 4) $\sqrt[5]{\frac{(5-\sqrt{5})^5}{96}}$.

726. 1) $\sqrt{(1-x)^3}$ при $x \leqslant 1$; 2) $\sqrt{x^3(x-2)^5}$ при $x \geqslant 2$;

3) $\sqrt{(x-2)^3\cdot(1-x)^5}$ при $1 < x < 2$;

4) $\sqrt[4]{\frac{a^5(1-a)^6}{(a-2)^4}}$ при $0 < a < 2$.

Вынести множители из-под знака корня, при этом указать допустимые значения букв.

727. 1) $\sqrt{(a-3)^3}$; 2) $\sqrt{1-3a+3a^2-a^3}$;

3) $\sqrt[3]{(x-1)^4}$; 4) $\sqrt[4]{x^5(2-x)^6}$.

728. 1) $\sqrt{(m-\sqrt{2})^3}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{3}-x)^5x^4}$;

3) $y\sqrt[3]{\frac{x}{y^4}+\frac{x^2}{y^6}}$; 4) $\frac{x}{a}\sqrt[3]{\frac{a^4}{x}+\frac{a^4}{x^2}+\frac{a^4}{x^3}}$.

Внесение множителей под знак корня

729. 1) Доказать тождество

$$a\sqrt[2n]{b}=\sqrt[2n]{a^{2n}b},\quad a>0,\quad b>0.$$

Как изменится это тождество для значений $a<0$?

2) Привести примеры, показывающие целесообразность внесения множителей под знак корня.

730. Не вычисляя значения корней, определить, какое число из данной пары больше:

1) $2\sqrt{10}$ или $3\sqrt{5}$; 2) $4\sqrt{3}$ или $3\sqrt{5}$;

3) $\sqrt[3]{17}$ или $2\sqrt[3]{2}$; 4) $4\sqrt[3]{3}$ или $2\sqrt[3]{25}$.

731. Найти значение произведения $15\cdot\sqrt{6}$ с точностью до 0,1 двумя способами:

1) Вычислить $\sqrt{6}$ с точностью до 0,01 и, умножив найденное значение корня на 15, округлить результат до 0,1.

2) Внести под знак корня множитель 15 и из полученного под корнем числа извлечь квадратный корень с точностью до 0,01; результат округлить до 0,1.

Произвести контрольные вычисления по способу границ и установить, какой из указанных приемов дает более точный результат; дать объяснение.

Внести множитель под знак корня.

732. 1) $2\sqrt{5}$; $5\sqrt{2}$; $5\sqrt{3}$; $7\sqrt{\frac{2}{7}}$;

2) $2\sqrt[3]{3}$; $3\sqrt[3]{2}$; $6\sqrt[3]{1\frac{1}{9}}$; $3\sqrt[4]{2\frac{5}{27}}$;

3) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}\sqrt[3]{12}$; $1\frac{2}{5}\sqrt{3\frac{4}{7}}$; $0{,}2\sqrt[3]{25}$.

733. 1) $3\sqrt{a}$; $a\sqrt{3}$; $5x\sqrt{2x}$; $2m\sqrt[3]{3m^2}$;

2) $7a^2\sqrt{ab}$; $3ab^2\sqrt[3]{a^2b}$; $2np^2q^3\sqrt[5]{nq^2}$;

3) $a\sqrt{\frac{x}{a}}$; $\frac{m}{n}\sqrt[3]{\frac{n}{m}}$; $\frac{2}{a^2}\sqrt[4]{\frac{a^3}{8}}$; $(x-z)\sqrt{\frac{2}{x^2-z^2}}$.

734. 1) $a\sqrt[3]{1+\frac{1}{a^3}}$; 2) $ab\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$;

3) $\frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{1}{x}+x+2}$; 4) $\frac{m-n}{m+n}\sqrt[3]{\frac{mn+n^2}{m^2-2mn+n^2}}$.

735. 1) $\frac{2a}{a-b}\sqrt{\frac{a}{2}-\frac{b^2}{2a}}$; 2) $\frac{1}{x-1}\sqrt{2x^2-4x+2}$;

3) $\frac{1}{x+y}\sqrt[3]{(x^2-y^2)\cdot(x^2+y^2+2xy)}$;

4) $\frac{m+n}{m-n}\sqrt{\frac{(m-n)(m^3-n^3)}{(m+n)(m^3+n^3)}}$.

736. Внести множитель под знак корня, учитывая значения букв:

1) $(1-a)\sqrt{\frac{a}{a-1}}$, $a>1$; 2) $(b-2)\sqrt[4]{\frac{2b}{(2-b)^3}}$, $0<b<2$;

3) $\frac{m}{m-n}\sqrt[2k]{\frac{(n-m)^{2k-1}}{m}}$, $0<m<n$.

Освобождение подкоренного выражения от дроби

737. Вычислить $\sqrt{\frac{2}{3}}$ с точностью до 0,01 двумя способами:

1) Найти значения $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ с точностью до 0,001 и первый результат разделить на второй; частное округлить до 0,01.

2) Освободить подкоренное выражение от дроби и вычислить $\frac{1}{3}\sqrt{6}$, извлекая корень с точностью до 0,001; результат округлить до 0,01.

Произвести контрольные вычисления по способу границ и установить, какой из указанных приемов быстрее дает результат.

738. Вычислить с точностью до 0,01:

$$1)\ \sqrt{5\frac{5}{6}};\qquad 2)\ \sqrt{9\frac{3}{7}}.$$

Освободить подкоренное выражение от дроби.

739. 1) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{\frac{3}{7}}$; $\sqrt{3\frac{1}{3}}$; $\sqrt{1\frac{5}{6}}$;

2) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$; $\sqrt[3]{2\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$; $\sqrt[3]{33\frac{3}{4}}$;

3) $\sqrt[4]{\frac{5}{8}}$; $1\frac{1}{2}\sqrt[4]{1\frac{7}{9}}$; $6\sqrt[5]{\frac{2}{27}}$; $6\sqrt[6]{1\frac{1}{32}}$.

740. 1) $\sqrt{\frac{a}{5b}}$; $15x\sqrt[3]{\frac{a}{9x^2}}$; $4a^2b\sqrt[4]{\frac{b^2}{4a^3}}$;

2) $\frac{a}{b^2}\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}$; $\frac{2}{m}\sqrt[3]{\frac{5m}{12n^2}}$; $\frac{9x^2y}{a}\sqrt[5]{\frac{2a^2}{81x^3y^6}}$.

741. 1) $(a-b)\sqrt[3]{\frac{1}{(a-b)^2}}$; 2) $(a^2-b^2)\sqrt{\frac{ab}{a+b}}$;

3) $ab\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$; 4) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$.

742*. 1) $x\sqrt[n]{\frac{n}{x^{n-1}}}$; 2) $\frac{p-q}{p+q}\sqrt[2k+1]{\frac{p+q}{(p-q)^{2k}}}$;

3) $a^2b^2\sqrt[n]{\frac{1}{a^{n-2}}+\frac{1}{b^{n-2}}}$; 4) $mn\sqrt[2k]{\left(\frac{n}{m}\right)^k-\left(\frac{m}{n}\right)^k}$.

743. Зная приближенное значение $\sqrt{6}\approx 2,449$, вычислить:

$$1)\ \sqrt{\frac{2}{3}};\quad 2)\ \sqrt{\frac{3}{2}};\quad 3)\ \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Привести корни к простейшему виду.

744. 1) $6\sqrt{8\frac{1}{3}}$; 2) $\frac{5}{7}\sqrt{19\frac{3}{5}}$; 3) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{20\frac{1}{4}}$; 4) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{13\frac{8}{9}}$.

745. 1) $\frac{3}{2a}\sqrt[4]{3\frac{5}{9}a^5b}$; 2) $\frac{a^2}{2b}\sqrt[3]{\frac{40b}{a^2}}$;

3) $(m^2-n^2)\sqrt{\frac{mn}{(m+n)(m^2-n^2)}}$;

4) $\frac{ab}{a+b}\sqrt[3]{(a^2-b^2)\cdot(ab^{-3}-a^{-3}b)^2}$.

746*. 1) $\frac{a^2}{b}\sqrt[n]{\frac{b^{n+1}}{a^{n-1}}}$; 2) $\frac{x-y}{xy}\sqrt[2k]{\frac{x^{3k}y^{5k}}{(x-y)^{2k-1}}}$;

3) $\frac{pq}{p+q}\sqrt[m]{(p+q)^{m-1}\cdot\left(\frac{1}{p^{m-3}q^{m-2}}+\frac{1}{p^{m-2}q^{m-3}}\right)}$.

Подобие корней

747. Упростить выражения:

1) $5\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}-6\sqrt{2}+2\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2}$;

2) $6\sqrt[4]{x}+\sqrt{xy}-3\sqrt{xy}-\sqrt[4]{x}+7\sqrt{xy}$.

Доказать подобие корней.

748. 1) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{18}$; 2) $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{27}$; 3) $6\sqrt{50}$ и $4\sqrt{8}$;

4) $\sqrt[3]{16}$ и $\sqrt[3]{128}$; 5) $3\sqrt[3]{3}$ и $\frac{1}{3}\sqrt[3]{81}$; 6) $\sqrt[4]{48}$ и $\sqrt[4]{243}$.

749. 1) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ и $5\sqrt{50}$; 2) $\sqrt{1\frac{1}{3}}$ и $2\sqrt{108}$;

3) $\sqrt[3]{25}$ и $\sqrt[3]{0,2}$; 4) $0,2\sqrt[3]{250}$ и $\frac{5}{2}\sqrt[3]{0,128}$.

750. 1) $\sqrt{18x^3}$; $\sqrt{\frac{1}{2}a^2x}$ и $\sqrt{0,08x}$;

2) $\frac{b}{a}\sqrt{a^3b}$; $a\sqrt{\frac{a}{b}}$ и $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{1}{ab}}$;

3) $3\sqrt[3]{\frac{2a^4}{x^6}}$; $2a\sqrt[3]{\frac{a}{4x^3}}$ и $10x\sqrt[3]{\frac{0,002}{a^2}}$.

751. 1) $\sqrt{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}$ и $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}$;

2) $\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$ и $\sqrt{\frac{(m+n)^2}{n^2}-\frac{(m+n)^2}{m^2}}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{(x-y)^4}{x^2+2xy+y^2}}$ и $\sqrt[3]{\frac{(x+y)^4}{x^2-2xy+y^2}}$.

752*. 1) $\sqrt[n]{a^{2n+1}b^{3n+1}}$ и $\sqrt[n]{\frac{b^{n+1}}{a^{n-1}}}$; 2) $\sqrt[n+2]{x^{n+3}y^{n+4}}$ и $\sqrt[n+2]{\frac{x^{2n+5}}{y^n}}$.

§ 15. ДЕЙСТВИЯ НАД КОРНЯМИ

Сложение и вычитание корней

753. Катеты прямоугольного треугольника равны соответственно 6 *см* и 9 *см*. Найти периметр треугольника (с точностью до 0,1).

754. Вычислить с точностью до 0,1:

1) $\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{32}$; 2) $48^{\frac{1}{2}}+12^{\frac{1}{2}}-75^{\frac{1}{2}}$.

755. Упростить, затем вычислить результат с точностью до 0,01:

1) $\sqrt{27}+\sqrt{75}-\sqrt{147}$; 2) $0,5\cdot 200^{0,5}-98^{0,5}+\frac{1}{3}\cdot 162^{0,5}$;

3) $3\sqrt{0,2}-\sqrt{245}+8\sqrt{3\frac{1}{5}}-\sqrt{0,05}$;

4) $343^{\frac{1}{2}}+0,2^{-2}\cdot 0,1^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(5\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$.

756. Решить уравнения:

1) $\frac{1}{2}\sqrt{5x}+13+\frac{\sqrt{5x}}{5}=2\sqrt{5x}$;

2) $(2x)^{\frac{1}{2}}+(8x)^{\frac{1}{2}}+(18x)^{\frac{1}{2}}=6$;

3) $(48x)^{0,5}-2\cdot(27x)^{0,5}-3\cdot(12x)^{0,5}+4\cdot(3x)^{0,5}+4=0$.

Произвести действия.

757. 1) $\sqrt{3}-2\sqrt{48}+(3\sqrt{75}-4\sqrt{108})$;

2) $\left(252^{\frac{1}{2}}-175^{\frac{1}{2}}\right)-\left(112^{\frac{1}{2}}-63^{\frac{1}{2}}-28^{\frac{1}{2}}\right)$;

3) $\left(15\sqrt{1,04}-\frac{3}{5}\sqrt{5\frac{5}{9}}+6\sqrt{\frac{1}{18}}\right)-(5\sqrt{0,02}-\sqrt{300})$;

4) $\sqrt[3]{32}-\left(2\sqrt[3]{0,25}-3\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{0,5}-2\sqrt[3]{\frac{1}{54}}\right)$.

758. 1) $(2\sqrt{m}-1,5\sqrt{4m})+(3\sqrt{25m}+0,5\sqrt{36m})$;

2) $\left[(27a)^{\frac{1}{3}}+(8a)^{\frac{1}{3}}\right]-\left[\frac{2}{7}\cdot(343a)^{\frac{1}{3}}-10\,(0,001a)^{\frac{1}{3}}\right]$;

3) $\left[(2a^4)^{\frac{1}{3}} - (2a)^{\frac{1}{2}}\right] + \left[(4a^2)^{\frac{2}{3}} + (8a)^{\frac{1}{2}}\right]$

4) $x^{\frac{1}{4}} - \left[(16x)^{\frac{1}{4}} - (81x)^{\frac{1}{4}} - (256x)^{\frac{1}{4}}\right]$.

759. 1) $\left(\sqrt{ab^3} - ab^2\sqrt{\frac{a}{b^3}}\right) - \left(a^2b\sqrt{\frac{b}{a^3}} - \sqrt{a^3b}\right)$;

2) $ab\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}} - ab\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} + \frac{a}{b}\sqrt[3]{ab^4} - \frac{b}{a}\sqrt[3]{a^4b}$;

3) $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} - \sqrt{\frac{4a^2}{a^2-x^2}}$, $0 < x < a$;

4) $\sqrt{1-m^2} + (1-m)\sqrt{\frac{1+m}{1-m}} - 2(1+m)\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}$.

760. 1) $2\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1-2a}{a} + a} - \frac{\sqrt{a}}{a}$ при $a > 1$;

2) $\frac{\sqrt{m^3-2m^2}}{m-2} - \sqrt{\frac{1}{m-2} + m} + \sqrt{\frac{1}{m-2}}$.

761. 1) $\sqrt{4a^3-4a^2} + (a^2+a)\sqrt{\frac{a-1}{a+1}} - (a-1)\sqrt{\frac{a^3+a^2}{a-1}}$;

2) $b\sqrt{\frac{1}{a-b}} - \frac{1}{a}\sqrt{a^3-a^2b} + \frac{1}{b}\sqrt{ab^2-b^3} - b\sqrt{\frac{4a}{b^2} - \frac{4}{b}}$.

762. 1) $n\sqrt{m-n} - \sqrt{m^3-m^2n} + \sqrt{4m^2n\left(\frac{m}{n}-1\right)}$;

2) $\frac{xy}{x+y}\sqrt{\frac{x+y}{x} + \frac{x+y}{y}} + \frac{xy}{x-y}\sqrt{\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)(x-y)}$,

$x > y > 0$.

763*. 1) $(a+b)\sqrt[3]{\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2}} - (a-b)\sqrt[3]{\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}} +$

$+ (a^2-b^2)\sqrt[3]{\frac{1}{(a^2-b^2)^2}}$;

2) $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2-2x+1}} - \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2+2x+1}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^4-2x^2+1}}$.

Умножение и деление корней

764. Вычислить с точностью до 0,01 площадь прямоугольника, длина и ширина которого выражаются числами:

1) $\sqrt{7}$ и $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{10}$ и $3\sqrt{6}$.

Произвести умножение.

765. 1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$; $\sqrt{45}\cdot\sqrt{5}$; $\sqrt{18}\cdot\sqrt{50}$;

2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}$; $2\sqrt{6}\cdot3\sqrt{2}$; $3\sqrt{10}\cdot2\sqrt{20}$;

3) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{6};\ \sqrt{2\frac{1}{2}}\cdot 2\sqrt{0{,}2};\ 4\sqrt{5\frac{1}{4}}\cdot 5\sqrt{1\frac{2}{7}};$

4) $\sqrt{xy}\cdot\sqrt{y};\ \sqrt{6m}\cdot\sqrt{\frac{6}{m}};\ a\sqrt{\frac{3}{4a}}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{5}{3a}}.$

766. 1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4};\ \sqrt[4]{54}\cdot\sqrt[4]{24};\ 5\sqrt[3]{20}\cdot\sqrt[3]{50};$

2) $\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt[4]{x^2};\ \sqrt[5]{8a^2}\cdot\sqrt[5]{4a^4};\ \frac{2}{3}\sqrt[3]{3n^2}\cdot 1\frac{1}{2}\sqrt[3]{6n};$

3) $\sqrt[3]{\frac{2a^2b}{9m}}\cdot\sqrt[3]{\frac{am^2}{3b}}\cdot\sqrt[3]{20a^2m^2}.$

767. 1) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x^2-1};$

2) $\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a^2-b}.$

768. 1) $\sqrt{x^{n+1}y^{n-1}}\cdot\sqrt{x^{n-1}y^{n+1}};$

2) $a\sqrt{a^{m+n}b}\cdot\sqrt{a^{3m-n}b^{2n+1}};$

3) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{2a^{3m-3}}{b^{n-2}}}\cdot\frac{1}{4}b\sqrt{\frac{2b^{3n}}{a^{m+1}}};$

4) $\sqrt{2\frac{1}{2}x^{m-1}y^3}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}x^{m-1}y^n}\cdot\sqrt{9y^{3n}}.$

769. 1) $(5\sqrt{18}-2\sqrt{32}).\ \sqrt{2};$

2) $\left(4\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{12}-\frac{1}{4}\sqrt{20}\right)\cdot\sqrt{6};$

3) $3\sqrt{15}\cdot\left(\sqrt{10}-\frac{2}{3}\sqrt{6}+\frac{4}{9}\sqrt{15}\right);$

4) $\left(4\sqrt{\frac{1}{2}}-0{,}5\sqrt{12}+\sqrt{0{,}02}-5\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\cdot(-0{,}75\sqrt{2}).$

770. 1) $\left(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}-\sqrt{\frac{x}{z}}\right)\cdot\sqrt{\frac{z}{x}};$

2) $\left(a\sqrt{\frac{a}{b}}+2\sqrt{ab}+b\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\cdot\sqrt{ab};$

3) $\left(2x\sqrt[3]{x^2y}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}}+x\sqrt[3]{xy^2}\right)\cdot 3\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}};$

4) $\left(0{,}5a^2\sqrt{2a}-\frac{3}{2}b\sqrt{2a^3}+1{,}5b^2\sqrt{2a}-\sqrt{\frac{b^6}{2a}}\right)\cdot 2\sqrt{0{,}5a}.$

771. 1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2});$

2) $(\sqrt{7}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{7});$

3) $(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+7\sqrt{3});$

4) $(0{,}2\sqrt{11}+1)(5\sqrt{11}-5).$

772. 1) $(\sqrt{x}+\sqrt{2x})\cdot(\sqrt{2y}-\sqrt{y});$

2) $(4\sqrt{a}-\sqrt{3x})\cdot(\sqrt{a}+2\sqrt{3x});$

3) $\left(\sqrt{5m}-\sqrt{\frac{5}{m}}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{\frac{m}{5}}\right)$;

4) $\left(3+\frac{x}{3}\sqrt{xy}\right)\cdot\left(3-\frac{x^2}{3}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$.

773. 1) $(1+\sqrt{x})\cdot(1-\sqrt{x})$;

2) $(2\sqrt{y}-3y)\cdot(3y+2\sqrt{y})$;

3) $(\sqrt{2+m}+\sqrt{m})\cdot(\sqrt{2+m}-\sqrt{m})$;

4) $(\sqrt{b}+\sqrt{a^2-b})(\sqrt{b}-\sqrt{a^2-b})$.

774. Выделить из данных пар чисел взаимно обратные числа:

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 2) $4-\sqrt{5}$ и $4+\sqrt{5}$;

3) $\sqrt{2}-1$ и $\sqrt{2}+1$; 4) $4+\sqrt{7}$ и $\frac{1}{9}(4-\sqrt{7})$.

775. Выполнить действия и упростить:

1) $\frac{1+\sqrt{8}+\sqrt{12}}{3}+\frac{1-\sqrt{18}-\sqrt{27}}{2}$;

2) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}{4}-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}{18}$;

3) $\frac{2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a^2}-4\sqrt[4]{a^3}}{5}-\frac{4\sqrt[4]{a^3}-3\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt{a}}{15}$;

4) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{a-b}+\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{a+b}-\frac{a\sqrt{2}-b\sqrt{3}}{b^2-a^2}$.

Выполнить умножение.

776. 1) $(2\sqrt{6}-\sqrt{5}+4\sqrt{2})\cdot(3\sqrt{5}+\sqrt{6}-2\sqrt{2})$;

2) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{0{,}5}+4\sqrt{2{,}5}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(3\sqrt{0{,}4}+2\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{8}\right)$.

777. 1) $\left(\frac{x}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}+\frac{y}{x}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\cdot\left(\sqrt{xy}-\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$;

2) $\left(\sqrt{7a^3b}-2a\sqrt{ab}+a^2\sqrt{\frac{3b}{a}}\right)\cdot\left(a\sqrt{7ab}-a^2b\sqrt{\frac{3}{ab}}\right)$.

Доказать тождества.

778. 1) $\left(13\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{128}-6\sqrt{18}\right)\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{3})=\sqrt{6}-2$;

2) $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+4\sqrt[3]{\frac{1}{72}}-\sqrt[3]{4}\right)\cdot(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16})=-1$.

779. 1) $(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})\cdot(1-\sqrt[3]{x})=1-x$;

2) $\left(1+\frac{1}{a}\sqrt[3]{ab^2}+\frac{1}{b}\sqrt[3]{a^2b}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)=\frac{a^2-b^2}{ab}$.

Выполнить умножение.

780. 1) $(1+\sqrt{a})\cdot(1+\sqrt[4]{a})\cdot(1-\sqrt[4]{a})$;

2) $(\sqrt{m}+\sqrt{n})\cdot(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})\cdot(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})$.

781. 1) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})\cdot(x-\sqrt{xy}+y)$;

2) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b})\cdot(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})$.

782. Составить квадратное уравнение, которое имело бы корни:

1) $1+2\sqrt{3}$ и $1-2\sqrt{3}$; 2) $\frac{\sqrt{a}}{1-a}$ и $\frac{\sqrt{a}}{1+a}$;

3) $\sqrt[3]{a}+0{,}5\sqrt[3]{b}$ и $\sqrt[3]{a}-0{,}5\sqrt[3]{b}$;

4) $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ и $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

783. Площадь одного квадрата 45 $м^2$, другого — 5 $м^2$. Во сколько раз сторона первого квадрата больше стороны второго?

Произвести деление.

784. 1) $10\sqrt{3}:5$; $6\sqrt[3]{a}:2$; $4\sqrt[4]{4}:0{,}5$; $\sqrt[5]{6}:3$;

2) $12\sqrt{3}:4\sqrt{3}$; $\sqrt{b}:5\sqrt{b}$; $\frac{2}{3}\sqrt[3]{m}:4\sqrt[3]{m}$;

3) $\sqrt{32}:\sqrt{2}$; $\sqrt{10}:\frac{1}{2}\sqrt{2{,}5}$; $\frac{2}{3}\sqrt[3]{96}:2\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$;

4) $\sqrt{18a}:\sqrt{2a}$; $5\sqrt{mn^3}:\sqrt{m^3n^2}$; $\sqrt[3]{-\frac{2}{7}x^5y^2}:\sqrt[3]{7x^2y^5}$;

5) $4{,}8\sqrt{ab}:12\sqrt{\frac{1}{ab}}$; $\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^5b^4}:b\sqrt[3]{ab}$;

$\frac{m}{n}\sqrt[5]{\frac{m^3}{n^2}}:\frac{m^2}{n^3}\sqrt[5]{\frac{m^7}{n^2}}$.

785. Вычислить с точностью до 0,1:

1) $\sqrt{20}:\sqrt{2}$; $5\sqrt{0{,}05}:\sqrt{0{,}1}$;

2) $6\sqrt[3]{12}:\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[3]{0{,}27}:\sqrt[3]{\frac{10}{3}}$;

3) $\frac{\sqrt{12}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$; $\frac{\sqrt{40}}{(\sqrt[3]{5}-1)(1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25})}$.

Выполнить деление.

786. 1) $\sqrt{4m^2-1}:\sqrt{\frac{2m+1}{2m-1}}$; 2) $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}:\sqrt{\frac{1}{x^2-y^2}}$;

3) $\sqrt{\frac{5b}{x+y}}:\sqrt{\frac{5b^3}{(x+y)^3}}$; 4) $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{3x}}:\sqrt{\frac{12x^3y}{a^2-b^2}}$.

787. 1) $\sqrt{a^{2m-1}}:\sqrt{a^{2m-3}}$; 2) $\sqrt{0{,}4x^{k+1}y^{k+1}}:\sqrt{0{,}1x^{k-1}y^{1-k}}$;

3) $\sqrt[m]{x^{3m-4}y^{2}}:\sqrt[m]{x^{m-4}y^{2-m}}$; 4) $\sqrt[k+1]{\frac{a^{k-2}}{b^{2-k}}}:\sqrt[k+1]{\frac{b^{1+4k}}{a^{2k+5}}}$.

788. 1) $(2\sqrt{6}+\sqrt{8}-\sqrt{24}+\sqrt{36}):\sqrt{2}$;

2) $\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}-6\sqrt{12}+\sqrt{1\frac{1}{3}}+14\sqrt{\frac{3}{4}}\right):\frac{2}{3}\sqrt{3}$;

3) $\left(\frac{9}{8}\sqrt{12}-4{,}5\sqrt{0{,}5}+2\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{45}{8}\sqrt{\frac{1}{3}}\right):\frac{9}{4}\sqrt{\frac{1}{6}}$;

4) $\left(\sqrt[3]{10}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{6\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{90}-\sqrt[3]{\frac{5}{6}}\right):\left(-2\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\right)$.

789. 1) $(\sqrt{a^5x^3}+\sqrt{a^3x^5}):\sqrt{a^3x^3}$; 2) $\left(\sqrt{ax}-\sqrt{\frac{a}{x}}\right):\sqrt{\frac{x}{a}}$;

3) $(3\sqrt{mn}-m\sqrt{n}+n\sqrt{m}):\sqrt{mn}$;

4) $\left(x\sqrt{\frac{x}{y}}+3\sqrt{xy}-y\sqrt{\frac{y}{x}}\right):\sqrt{xy}$.

790. 1) $\left(mn\sqrt[3]{\frac{m}{n}}-\frac{n}{m}\sqrt[3]{\frac{n}{m}}+\frac{m}{n}\sqrt[3]{\frac{m^2}{n^2}}\right):\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$;

2) $\left(2a\sqrt[3]{\frac{3a}{b}}-3b\sqrt[3]{\frac{3b^2}{2a^2}}+\sqrt[3]{\frac{12a}{b}}\right):\sqrt[3]{\frac{18a^2}{b^4}}$.

791. 1) $(\sqrt{a^{m-3}}+\sqrt{a^{5-3m}}-\sqrt{a^{3m+3}}):\sqrt{a^{1-m}}$;

2) $\left(\sqrt[m]{x^{3m+5}}+\sqrt[m]{x^{4m+4}}+\sqrt[m]{x^{5m+3}}\right):\sqrt[m]{x^{m+2}}$.

Разложить на множители.

792. 1) $\sqrt{6}+\sqrt{15}$; 2) $\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{25}$;

3) $\sqrt[3]{mn}-\sqrt[3]{m^2}$; 4) $\sqrt[3]{6a^2y}+\sqrt[3]{9ay^2}$.

793. 1) $\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x+y}$; 2) $\sqrt{ab-ac}-\sqrt{b^2-bc}$;

3) $\sqrt{m^3-n^3}-\sqrt{m^2+mn+n^2}$; 4) $\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x^3-y^3}$.

794. 1) $3+\sqrt{3}$ 2) $m-\sqrt{m}$;

3) $x-y-\sqrt{x^2-y^2}$; 4) $a^2+b^2-\sqrt{a^4-b^4}$.

795. 1) $\sqrt{2x}-\sqrt{3x}+\sqrt{2y}-\sqrt{3y}$; 2) $\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^4}$;

3) $m+5\sqrt{m}+6$; 4) $2x-\sqrt{x}-1$.

796. Разложить на множители следующие выражения, представив их как разности квадратов двух чисел:

1) $a-b$; 2) $b-1$; 3) $2-x^2$,

4) $ab-3$; 5) $x-a^2b$; 6) a^3b-8.

797. Сократить дроби:

1) $\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{6}}{\sqrt{30}-\sqrt{15}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[3]{bx}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{a^2b}}$;

3) $\dfrac{5+\sqrt{10}}{2+\sqrt{10}}$; 4) $\dfrac{ab-bc}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}}$.

798. Может ли частное двух иррациональных чисел быть целым положительным числом?

799. Выполнить деление:

1) $(\sqrt[3]{16x^2}-\sqrt[3]{25y^2}):(\sqrt[3]{4x}-\sqrt[3]{5y})$;

2) $(a-b):(\sqrt{a}-\sqrt{b})$;

3) $(\sqrt[3]{9a^2x}-2\sqrt[3]{3abx}+\sqrt[3]{b^2x}):(\sqrt[3]{3a}-\sqrt[3]{b})$;

4) $(a+b-2\sqrt{ab}+\sqrt{a}-\sqrt{b}):(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

Произвести действия, заменяя корни степенями с дробными показателями.

800. 1) $\sqrt[8]{a^3}\cdot\sqrt[12]{a^7}$; 2) $\sqrt[6]{x^5}\cdot x^{-1,5}$;

3) $\sqrt[15]{x^7}:x^{-0,2}$; 4) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{m}}:\dfrac{1}{\sqrt[4]{m}}$.

801. 1) $\sqrt[3]{a^4b}\cdot\sqrt[5]{ab^3}\cdot\sqrt[6]{a^4b^3}$; 2) $x\sqrt{xy}\cdot x^3\sqrt[4]{x^2y^3}\cdot x^5y\sqrt[5]{x}$;

3) $\sqrt[3]{4\sqrt[4]{2}}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2\sqrt{2}}$; 4) $\sqrt[n-2]{\sqrt{a}:\sqrt[n]{a}}$.

802. 1) $a^{-\frac{11}{8}}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[12]{a}\cdot\sqrt[24]{a}$;

2) $\sqrt[3]{-27b\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b^{0,4}}\cdot\frac{1}{3}\sqrt[5]{\dfrac{b^{-2}}{b^3}}\cdot\sqrt[3]{-3^0}$.

Возведение корней в степень и извлечение из них корня

803. Возвести в степень:

1) $(\sqrt{3})^2$; $(\sqrt[3]{5})^3$; $(\sqrt[5]{7})^5$; $(\sqrt[k]{a})^k$;

2) $(2\sqrt{5})^4$; $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}\right)^6$; $\left(2\sqrt[5]{\frac{1}{2}}\right)^{10}$; $(\sqrt[n]{ab})^{2n}$;

3) $(\sqrt[3]{3a^2})^9$; $(5a\sqrt[3]{1000})^2$; $\left(\frac{n}{m}\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^4$;

4) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^3$; $(-5\sqrt[3]{a^2})^2$; $(2\sqrt[3]{-3a^2})^5$.

804. 1) Что больше: а) $\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt[6]{6}$; б) $\sqrt[3]{7}$ или $\sqrt[6]{50}$?

2) Какой знак имеет разность: а) $2\sqrt{2}-\sqrt[4]{65}$; б) $\sqrt[6]{32}-2\sqrt[8]{2}$?

3) Среди следующих иррациональных чисел найти наименьшее число: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$.

Выполнить указанные действия.

805. 1) $\left(-0{,}1\sqrt[6]{x^5y^3}\right)^3$; 2) $\left(\frac{2}{3x}\sqrt[3]{-1{,}5x}\right)^5$;

3) $\left(\sqrt[n]{(x^2+y^2)^m}\right)^{np}$; 4) $\left(\frac{m}{1+m}\sqrt[3]{\frac{1+m}{m}}\right)^5$.

806. 1) $\left(a^{-2}b\sqrt{4a^{-2}b^{2n}}\right)^{-2}$; 2) $\left(x^{-3}y^2\sqrt[5]{2x^3y^{-2}}\right)^{-4}$;

3) $\left(x^my^{-n}\sqrt{\frac{x^{-3m}y}{x-y}}\right)^2$; 4) $\left(\frac{a^{-\frac{3}{2}}b^3}{\sqrt{(a-b)^{-1}}}\right)^{2m}$

807. 1) $(1-\sqrt{5})^2$; 2) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$;

3) $\left(2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2$; 4) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)^2$.

808. 1) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$; 2) $(a^2-\sqrt{a})^2$;

3) $(\sqrt[3]{m}+2\sqrt[3]{n})^2$; 4) $\left(2\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}\right)^2$.

809. 1) $(\sqrt[3]{5}-\sqrt{3})^2$; 2) $(\sqrt[3]{4}+2\sqrt{2})^2$;

3) $(1-3\sqrt{2})^3$; 4) $(a\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})^3$.

810. 1) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$; 2) $(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10})^2$;

3) $\left(\frac{1}{2}-2\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2$; 4) $\left(a\sqrt{a}-\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{2a}\right)^2$.

811. 1) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{18}-\sqrt{2}}\right)^2$; 2) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{50}+\sqrt{18}}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2$;

4) $\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2$.

812*. Показать, что:

1) $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$;

2) $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

813*. Разложить на множители двучлены, воспользовавшись формулами сокращенного умножения:

1) $9+4\sqrt{2}$; 2) $21-4\sqrt{5}$;

3) $25-4\sqrt{6}$; 4) $26+15\sqrt{3}$.

814*. Упростить:

1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$;

2) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$;

4) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$.

815. Доказать равенство

$$\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{3}\cdot(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}).$$

816. Доказать следующие тождества при $a>0$, $b>0$ и $a^2-b>0$:

1) $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$;

2) $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.

817. Упростить выражения, применяя тождества, выведенные в предыдущей задаче:

1) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$;　　2) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$;

3) $\sqrt{4\sqrt{5}+2\sqrt{15}}$;　　4) $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}$, $a>b>0$.

818. Вычислить:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$;　$\sqrt[6]{64}$ и $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$;

2) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{24}}}$;　$\sqrt[12]{a^{24}}$ и $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{24}}}$;

3) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{m^{30}}}$;　$\sqrt[15]{m^{30}}$ и $\sqrt[3]{\sqrt[5]{m^{30}}}$.

819. Извлечь корень:

1) $\sqrt[4]{50625}$;　2) $\sqrt[4]{20736}$;　3) $\sqrt[6]{729}$;　4) $\sqrt[10]{1024}$.

Вычислить с точностью до 0,01.

820. 1) $\sqrt[4]{25}$;　2) $\sqrt[4]{13}$;　3) $\sqrt[8]{10}$;　4) $\sqrt[12]{20}$.

821. 1) $10\sqrt[4]{36}$;　2) $\frac{\sqrt[4]{8}}{0{,}2}$;　3) $\sqrt[8]{11}+\sqrt[4]{11}$;　4) $\sqrt[6]{6}-\sqrt[8]{8}$.

Извлечь корень.

822. 1) $\sqrt{\sqrt{5}}$;　$\sqrt[3]{\sqrt{4}}$;　$\sqrt[3]{\sqrt{2}}$;

2) $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$;　$\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}$;　$\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{10}}}$;

3) $\sqrt{\sqrt[3]{ab}}$; $\sqrt[4]{\sqrt[3]{m^4n^8}}$; $\sqrt{\sqrt[5]{9x^4y^2}}$;

4) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$; $\sqrt[7]{b\sqrt{b}}$; $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{3}}$.

823. 1) $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}}$; 2) $\sqrt[5]{\frac{n}{m}\sqrt[3]{\frac{m}{n}}}$

3) $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$.

824. 1) $\sqrt[9]{-\sqrt[5]{-a^{25}}}$; 2) $\sqrt[3]{-2a^2b\sqrt[4]{5a^3}}$;

3) $\sqrt{\frac{m-n}{m+n}\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}}$; 4) $\sqrt[5]{(x-y)\sqrt[3]{\frac{1}{y-x}}}$.

Произвести действия, заменяя корни степенями с дробными показателями.

825. 1) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}}\cdot a^{\frac{14}{27}}$ 2) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}:x^{\frac{11}{16}}$;

3) $\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}\sqrt[3]{\frac{x}{y}}}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$;

4) $\sqrt{2m\sqrt[3]{\frac{1}{4m^2}\sqrt{\frac{n}{m}}}}:m^{\frac{1}{12}}h^{\frac{1}{12}}$.

826. 1) $\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}}\cdot a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{a^{-1}b^{\frac{2}{3}}}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}\cdot\sqrt[6]{x^5}}}{\left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right)^{-2}}$;

3) $\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}\cdot x^2\cdot\left(a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^3}\cdot a^{-\frac{1}{18}}}}}$; 4) $\left(\sqrt[n+3]{\sqrt[n-1]{a}\cdot\sqrt[n+1]{a^{-1}}}\right)^{n^2-1}$.

Приведение к рациональному виду числителей или знаменателей дробей

Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби.

827. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{2}{\sqrt{2}}$; $\frac{3}{\sqrt{3}}$; $\frac{2}{3\sqrt{3}}$;

2) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$; $\frac{3}{\sqrt[4]{9}}$; $\frac{5}{\sqrt[3]{25}}$; $\frac{7}{\sqrt[5]{7^3}}$;

3) $\frac{a}{\sqrt[3]{a}}$; $\frac{x^2}{\sqrt[5]{x^4}}$; $\frac{m^3}{\sqrt[8]{m^3}}$; $\frac{n^4}{\sqrt[7]{n^5}}$;

4) $\frac{x}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$; $\frac{a^2}{\sqrt[m]{a^{m-2}}}$; $\frac{a^3}{x\sqrt[n]{x^{n-3}}}$; $\frac{a^k}{\sqrt[k]{a^{k-1}}}$.

828. 1) $\frac{a}{\sqrt{a-b}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{x+y}}$; 3) $\frac{m-n}{\sqrt{m-n}}$;

4) $\frac{a+b}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$; 5) $\frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$; 6) $\frac{a+b}{2\sqrt{a^2-b^2}}$.

829. 1) $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{6}-3}$;

4) $\frac{a}{1+\sqrt{a}}$; 5) $\frac{m}{\sqrt{m}-1}$; 6) $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}$.

830. 1) $\frac{10}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 3) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

4) $\frac{4-x^2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}$; 5) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 6) $\frac{\sqrt{x}+a}{a-\sqrt{x}}$.

831. 1) $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{m}}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{n}}}$;

3) $\frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}$; 4) $\frac{\sqrt{7-\sqrt{13}}}{\sqrt{7+\sqrt{13}}}$.

832. 1) $\frac{6}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$; 2) $\frac{70}{7\sqrt{2}-3\sqrt{7}}$;

3) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+4\sqrt{2}}$; 4) $\frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{7}}{3\sqrt{5}-5\sqrt{7}}$.

833. 1) $\frac{\sqrt{1+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{a}}$; 2) $\frac{\sqrt{x(x+a)}-x}{\sqrt{x(x+a)}+x}$;

3) $\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$; 4) $\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$.

834. Доказать:

1) $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{7-4\sqrt{3}}=14$;

2) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$;

3) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=2\sqrt{3}$.

835. Доказать равенство $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=4+\sqrt{15}$ и проверить его, вычислив приближенные значения $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и $\sqrt{15}$ с точностью до 0,001.

836. Решить следующие уравнения и произвести проверку корней уравнений:

1) $5+0{,}5x=\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot x$;

2) $\sqrt{5}-7x=-3x+\sqrt{15}\cdot x-\sqrt{3}$.

837. Решить уравнение $x^2+2(\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}=0$ и произвести проверку его корней путем: а) подстановки корней в уравнение; б) на основании теоремы Виета.

Уничтожить иррациональность в числителе дроби.

838. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt[3]{4}}{6}$; $\frac{\sqrt[7]{x^5}}{a}$; $\frac{\sqrt{ab}}{b}$;

2) $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{8}$; $\frac{2\sqrt{6}-4}{15}$; $\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{20}$.

839. 1) $\frac{\sqrt{m}+1}{m}$;　　2) $\frac{5+\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}}$;

3) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;　　4) $\frac{m+\sqrt{m}}{m-\sqrt{m}}$.

840. 1) $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$;　　2) $\frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}}$;

3) $\frac{m+n-2\sqrt{mn}}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^3}$;　　4) $\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{a-b}$.

Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби.

841. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;　　2) $\frac{6}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$;

3) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;　　4) $\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

842. 1) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$;　　2) $\frac{m-n}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}$;

3) $\frac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$;　　4) $\frac{\sqrt{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}}$.

Задачи на все действия со степенями и корнями

Упростить выражения.

843. 1) $\frac{\sqrt{ab}\cdot\sqrt[4]{a}}{(a+2)\cdot\sqrt[4]{a^{-1}b^2}}-\frac{a^2+4}{a^2-4}$;

2) $(-\sqrt[3]{x^{0,4}})^5+\left(-\frac{1}{2}\sqrt[-\frac{3}{5}]{x^{0,4}}\right)^{-1}-x^{-1}\cdot\left(\frac{-3x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x^{-0,5}}}\right)^2$;

3) $\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\frac{\sqrt[3]{a^{-1}-ba^{-2}}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}-ab-\frac{1}{(a^2+b^2)^{-1}}$;

4) $\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{a^3b^{-3}}-\sqrt{b^3a^{-3}}\right):\left(\frac{a^2+b^2}{ab}+1\right)\cdot\frac{2(a-b)^{-1}}{(ab)^{-\frac{1}{2}}}$.

844*. 1) $\frac{2^4-(1+\sqrt{2})^4}{2^4-(1-\sqrt{2})^4}$; 2) $\left(\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{ab}}\right)^{-4}$;

3) $\frac{\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3}}}}{\sqrt{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}}\cdot\sqrt[-2]{\sqrt[-3]{\sqrt[-2]{x^{-1}}}}$.

Выполнить действия.

845. 1) $\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1\right)\cdot\left(x-\sqrt{x}+1\right)$;

2) $\left(\frac{\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}}\right)\cdot\frac{x-y}{2\sqrt{xy}}$;

3) $2(xy)^{\frac{1}{2}}\cdot(x+y)^{-1}\cdot\left[1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$;

4) $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}-\frac{2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2(ab^{-1}+1)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1-ba^{-1}}{1+ba^{-1}}}$.

846*. 1) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{x}}-\left(\frac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}-\sqrt[4]{ax}\right):\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{x}\right)$;

2) $\left[\frac{1-a^2}{\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\cdot\left(\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)}+1\right]\cdot\sqrt{(1-a)^2},\ a>1$;

3) $\frac{\left(\frac{\sqrt[4]{bx^3}+\sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+\sqrt[4]{bx}\right)^2+bx+3}{\sqrt{bx}+3}$.

847*. Упростить выражения:

1) $\frac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}-(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}$, если $x=a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}$, причем $a>0,\ n>m>0$.

2) $\left(a+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(a-x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$, где $x=4(a-1)$ в двух случаях: а) $1<a<2$; б) $a>2$.

3) $\frac{\sqrt{(a+x)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}}$, где $x=\sqrt{ab}$ в двух случаях: а) $a>b>0$; б) $b>a>0$.

848*. Вычислить:

$$\left(\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}}-\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}}\right)\cdot\sqrt[3]{1-2\sqrt{6}}.$$

849*. Проверить тождество

$$\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}}+\sqrt{b^2+\sqrt[3]{a^2b^4}}=\sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)^3}.$$

850. Решить уравнение

$$\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4.$$

851. Вычислить

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[5]{(a-3b)^3}}:\frac{\sqrt[3]{b^{-2}}\cdot\sqrt[5]{(a-3b)^{-2}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}},\text{ если } a=56;\ b=8.$$

852. Показать, что следующее произведение не зависит от a и b

$$\left[\frac{\left(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}\right)\left(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right]\cdot\frac{2\sqrt{2,5}}{\sqrt[-2]{10}\,(a+b)}.$$

853. Вычислить значение $M=x^3-\left(\sqrt{b}+b\right)x+b$ при $x=\frac{\sqrt{b+4\sqrt{b}}-\sqrt{b}}{2}$.

854. Составить квадратное уравнение, которое имело бы корни:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}\quad\text{и}\quad\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}.$$

§ 16*. ОБЩИЕ СВОЙСТВА СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

855. Дана функция $y=x^n$, где n — натуральное число.

1) Какие области определения и изменения имеет эта функция?

2) Доказать, что: а) в открытом интервале $(0;\ +\infty)$ функция возрастает при любом натуральном n; б) в открытом интервале $(-\infty;\ 0)$ функция x^n убывает при четном n и возрастает при нечетном n.

3) Показать, что при любом n график функции проходит через начало координат и точку $(1;\ 1)$.

4) Выяснить условие, при котором график функции x^n сим-

метричен: а) относительно оси ординат; б) относительно начала координат.

856. Дана функция $y = x^{-k}$, где k — натуральное число.

1) Найти область определения этой функции и область ее значений, если: а) k — четное число; б) k — нечетное число.

2) Показать, что: а) при нечетном k функция x^{-k} убывает во всей области ее определения; б) при четном k функция x^{-k} возрастает в открытом интервале $(-\infty; 0)$ и убывает в открытом интервале $(0; +\infty)$.

3) Доказать, что график функции x^{-k}: а) при нечетном k симметричен относительно начала координат; б) при четном k симметричен относительно оси ординат.

4) Имеет ли асимптоты график данной функции?

857. Дана функция $y = x^{\frac{p}{q}}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь.

1) Исследовать функцию при $\frac{p}{q} > 0$, рассмотрев случаи: а) p и q — нечетные числа; б) q — четное число. Привести графическую иллюстрацию в каждом случае.

2) Выполнить предыдущее задание, считая $\frac{p}{q} < 0$.

5

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЛЮБОГО АРГУМЕНТА

§ 17. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

Понятие о векторе. Сложение и вычитание векторов

858. Среди величин: масса, сила, длина, площадь, объем, скорость, ускорение, температура — указать векторные и скалярные.

859. Отрезки AB и CD прямой MN (рис. 19) имеют равные длины. Каким соотношением связаны между собой векторы: 1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$?

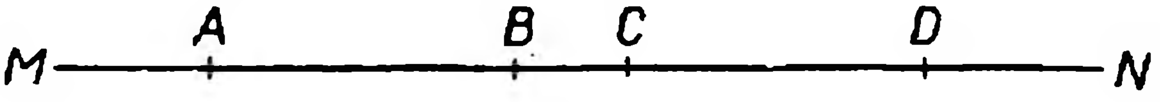


Рис. 19.

860. Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AD}$ служат сторонами квадрата $ABCD$ (рис. 20). 1) Равны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$? 2) Записать соотношение, связывающее векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. 3) Указать, какое из неравенств: $\overrightarrow{AC} > \overrightarrow{AB}$ и $|\overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{AB}|$ — справедливо и какое не имеет смысла. Почему?

861. Даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. 1) Построить векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 2) При каких условиях векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$: а) лежат на одной прямой; б) взаимно перпендикулярны?

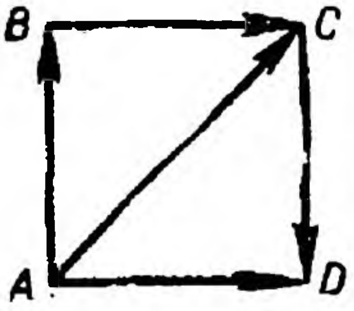


Рис. 20.

862. На векторах $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{m}$ и $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{n}$ построен параллелограмм $ABCD$. Выразить через $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$: 1) вектор $\overrightarrow{AC}$; 2) вектор $\overrightarrow{BD}$.

863. 1) Построить сумму векторов $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3}$, если $A_1(-1;\ 1)$, $A_2(-0{,}5;\ -2)$ и $A_3(2{,}5;\ 2)$.

2) На плоскости даны точки $A_1(-4;\ 4,2)$, $A_2(6;\ 4,2)$, $A_3(-2;\ -1)$, $A_4(1;\ 8)$ и $A_5(4;\ -1)$. Построить сумму векторов $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_8A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}$.

864. На плоскости даны точки $A(-4;\ -1)$, $B(1;\ 1,5)$, $C(3,5;\ 5)$, $D(10;\ 6)$ и $E(5;\ -4)$. Построить разность векторов: 1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CE}$; 2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{CD}$.

865. Каким условием должны быть связаны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, имеющие общее начало, чтобы вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ делил угол между ними пополам?

866. Какому условию должны удовлетворять векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, чтобы они могли служить сторонами треугольника?

867. Показать, что $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$. В каком случае имеет место знак равенства?

868. Какой особенностью должны обладать векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, чтобы имело место соотношение:

1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$; 2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$; 3) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$?

869. На подъемном кране скорость вертикального подъема груза 20 *м/мин*, скорость передвижения тележки крана 10 *м/мин*. Найти графически результирующую скорость движения груза. Ответ проверить вычислением.

870. Три силы, по 15 *кГ* каждая, действуют на тело в одной плоскости. Найти графически равнодействующую этих сил, если углы между силами по 60°.

871. Дать геометрическое построение разложения данного вектора $\boldsymbol{a}$ на два слагаемых, если известны: 1) направления обоих слагаемых; 2) длина и направление одного слагаемого; 3) направление одного и длина другого слагаемого; 4) длина обоих слагаемых. В каждом случае выяснить условие возможности разложения и найти число решений, если ни один из векторов-слагаемых не параллелен $\boldsymbol{a}$.

872. Шар весом 3 *кГ* висит на веревке у стены (рис. 21). Определить графически силы натяжения веревки и давления шара на стену.

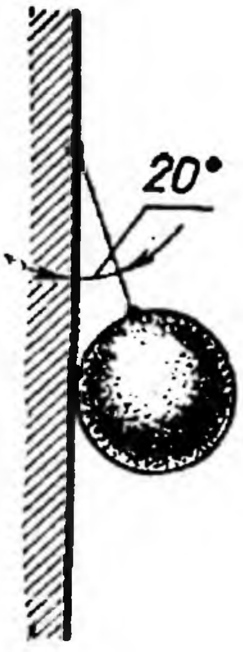


Рис. 21

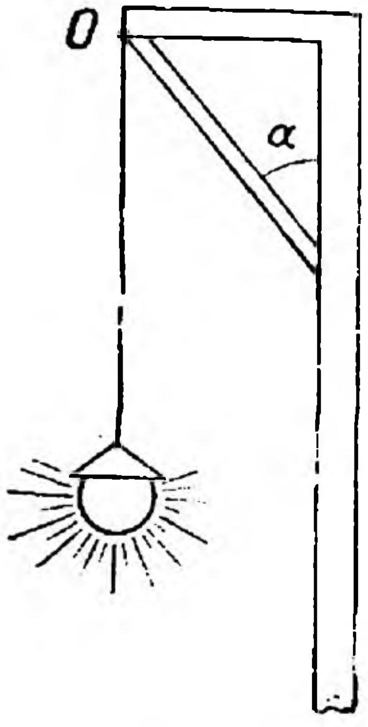


Рис. 22

873. Фонарь, вес которого P, подвешен на кронштейне в точке O (рис. 22), причем горизонтальная балка кронштейна испытывает растяжение Q, а наклонный подкос — сжатие F.

Выразить векторным равенством зависимость между силами P, Q и F и вычислить Q и F, если вес фонаря $P\approx 5$ *кГ*, а подкос образует с вертикалью угол $\alpha\approx 40°$.

§ 18. ПРОЕКЦИИ И КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Проекция вектора на ось

874. 1) В каком случае проекция вектора на ось: а) равна нулю; б) равна по абсолютной величине длине данного вектора?

2) Может ли проекция вектора на ось превосходить по абсолютной величине длину вектора? Почему?

875. Доказать, что при параллельном переносе вектора его проекция на данную ось не изменяется.

876*. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ симметричны относительно прямой m. Каким соотношением связаны между собой проекции этих векторов на ось: 1) параллельную прямой m; 2) перпендикулярную прямой m?

877*. Даны два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. При каком расположении оси l справедливо равенство $\text{пр}_l\boldsymbol{a} = \text{пр}_l\boldsymbol{b}$?

878. Если векторы имеют одинаковое направление, то проекции их на одну и ту же ось, не перпендикулярную к ним, пропорциональны длинам векторов. Доказать.

879. В прямоугольном треугольнике ABC дано: $|\overrightarrow{BC}| = 5$ и $\angle A = 30°$. Найти проекции векторов-катетов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ на гипотенузу $\overrightarrow{AB}$.

880. Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ — стороны равностороннего треугольника ABC — спроектированы на высоту $\overrightarrow{BD}$. Найти проекции этих векторов на высоту $\overrightarrow{BD}$, если $|\overrightarrow{AB}| = a$.

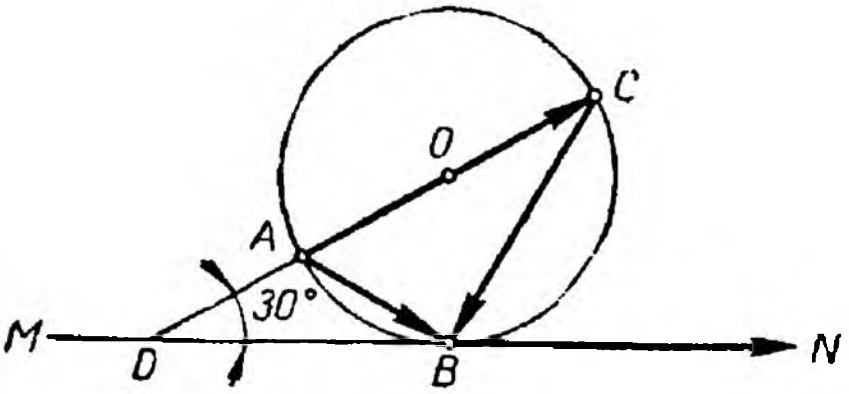


Рис. 23

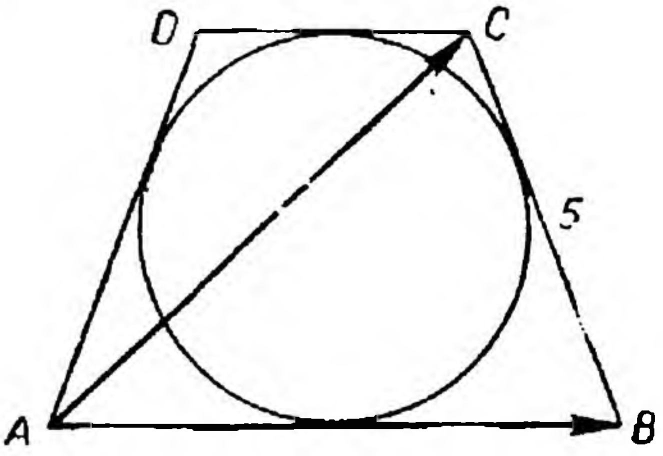


Рис. 24

881. Найти проекции векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ на $\overrightarrow{MN}$ (рис. 23), если $|\overrightarrow{AB}| = 2$ и $\angle CDB = 30°$.

882. Острый угол прямоугольной трапеции $ABCD$ равен 45°, меньшее основание трапеции равно меньшей боковой стороне. Найти сумму проекций векторов (сторон трапеции) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ на большее основание $\overrightarrow{AD}$, если длина средней линии трапеции равна 3.

883. Боковая сторона описанной равнобедренной трапеции имеет длину, равную 5. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AC}$ (диагонали трапеции) на большее основание $\overrightarrow{AB}$ (рис. 24).

884. Найти сумму проекций векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ — сторон ромба — на диагональ $\overrightarrow{AC}$, если $|\overrightarrow{AC}| = d$.

Координаты вектора на плоскости

885. Векторы $\mathbf{a} = \{x_1;\ y_1\}$ и $\mathbf{b} = \{x_2;\ y_2\}$ отложены от начала координат. (В выражении $\{x;\ y\}$ буквы x, y обозначают проекции вектора на оси OX и OY). Как расположены друг относительно друга эти векторы, если:
1) $x_1 = x_2$, $y_1 = -y_2$; 2) $x_1 = -x_2$, $y_1 = y_2$;
3) $x_1 = -x_2$, $y_1 = -y_2$?

886. Определить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если точки A и B имеют координаты:
1) $A(2;\ 0)$, $B(0;\ 3)$; 2) $A(-3;\ 1)$, $B(2;\ 0)$;
3) $A(4;\ 2)$, $B(-1;\ -3)$; 4) $A(-1;\ -2)$, $B(1;\ -5)$.

887. От точки A отложен вектор $\overrightarrow{AB} = \mathbf{m}$. Найти координаты точки B, если: 1) $A(0;\ 0)$, $\mathbf{m} = \{2;\ -3\}$; 2) $A(-5;\ 4)$, $\mathbf{m} = \{2;\ -5\}$.

888. На сторонах $OA = 3$ и $OC = 4$ прямоугольника $OABC$ отложены единичные векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ (рис. 25). 1) Выразить через $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CO}$ и $\overrightarrow{CA}$. 2) Выполнить то же задание относительно векторов $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{KA}$ и $\overrightarrow{BK}$, где M и N — середины сторон AB и BC, K — точка пересечения диагоналей прямоугольника.

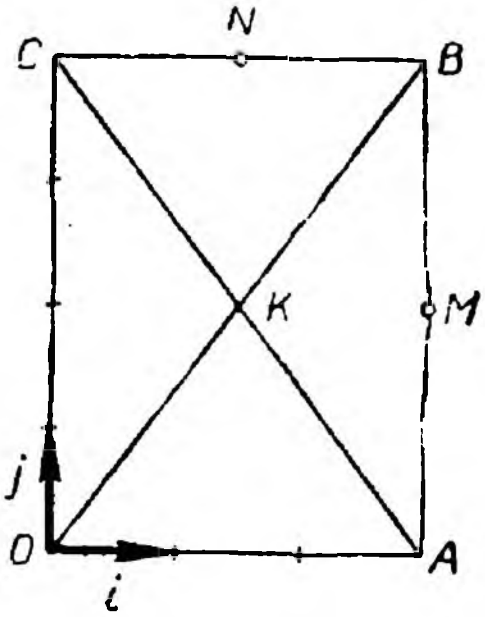


Рис. 25

889. На плоскости даны точки $A(0;\ -2)$ и $B(4;\ 3)$.

1) Построить радиусы-векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ этих точек и найти их координаты.

2) Определить координаты векторов $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$. Проверить результат построением.

3) Выразить векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ через единичные векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ координатных осей.

890. Зная для радиуса-вектора $\mathbf{r}$ координаты точки плоскости, написать его разложение по единичным векторам $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ координатных осей:

1) $\mathbf{r}(3;\ 1)$; 2) $\mathbf{r}(-4;\ 5)$; 3) $\mathbf{r}(-2;\ -7)$.

891. Найти разложение радиуса-вектора середины M отрезка AB по единичным векторам $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ координатных осей, если: 1) $A(-6;\ 1)$ и $B(2;\ 3)$; 2) $A(-8;\ 3)$ и $B(4;\ -1)$.

892. Построить радиус-вектор $\mathbf{r}$, зная его разложение по единичным векторам $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ координатных осей:
1) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; 2) $\mathbf{r} = -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; 3) $\mathbf{r} = -5\mathbf{i} + 3{,}5\mathbf{j}$.

893. Дано: $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{b} = -4\boldsymbol{i} - 2{,}2\boldsymbol{j}$. Найти разложение вектора $\boldsymbol{c}$ по единичным векторам $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ координатных осей, если: 1) $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$; 2) $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$; 3) $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{b}}{2}$.

894. Какая существует связь между длиной вектора плоскости и его координатами? Выразить длину вектора $\overrightarrow{AB}$ через координаты его начала $A(x_1;\ y_1)$ и конца $B(x_2;\ y_2)$.

895. На плоскости даны точки $A(2;\ 5)$ и $B(1;\ -1)$.

1) Построить вектор $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ и вычислить его длину.

2) Выразить векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OM}$ через единичные векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ координатных осей.

§ 19. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ И ДУГ

Градусное измерение углов и дуг

896. 1) Какие величины принимаются за единицу при градусном измерении углов и дуг? 2) В чем сходство и отличие градусной меры центрального угла и градусной меры соответствующей ему дуги? 3) Почему в практических вычислениях в большинстве случаев пользуются градусной мерой углов (дуг)?

897. Что называется углом между вектором и осью? Какие условия надо ввести для однозначного определения величины этого угла?

898. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны оси $\boldsymbol{l}$, векторы $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ перпендикулярны оси $\boldsymbol{l}$ (рис. 26). Определить наименьший неотрицательный угол между каждым из векторов и осью $\boldsymbol{l}$.

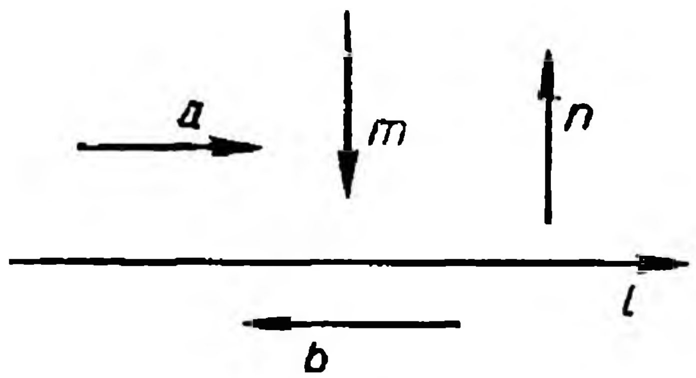


Рис. 26

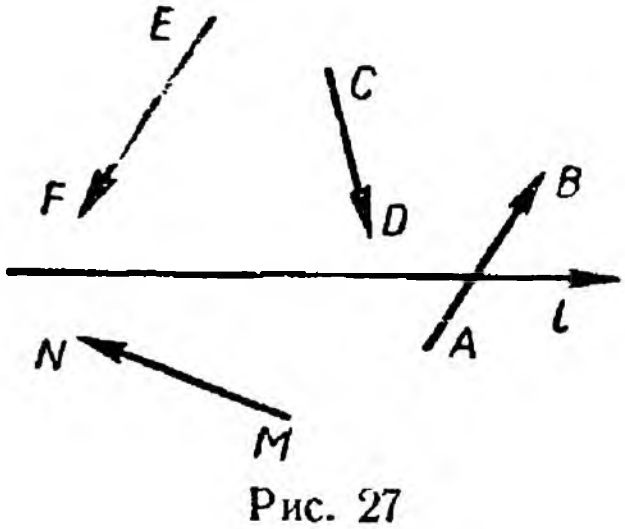


Рис. 27

899. Пользуясь транспортиром, измерить наименьший положительный угол, образованный каждым из данных векторов с осью $\boldsymbol{l}$ (рис. 27).

900. 1) Что называется углом между двумя векторами?

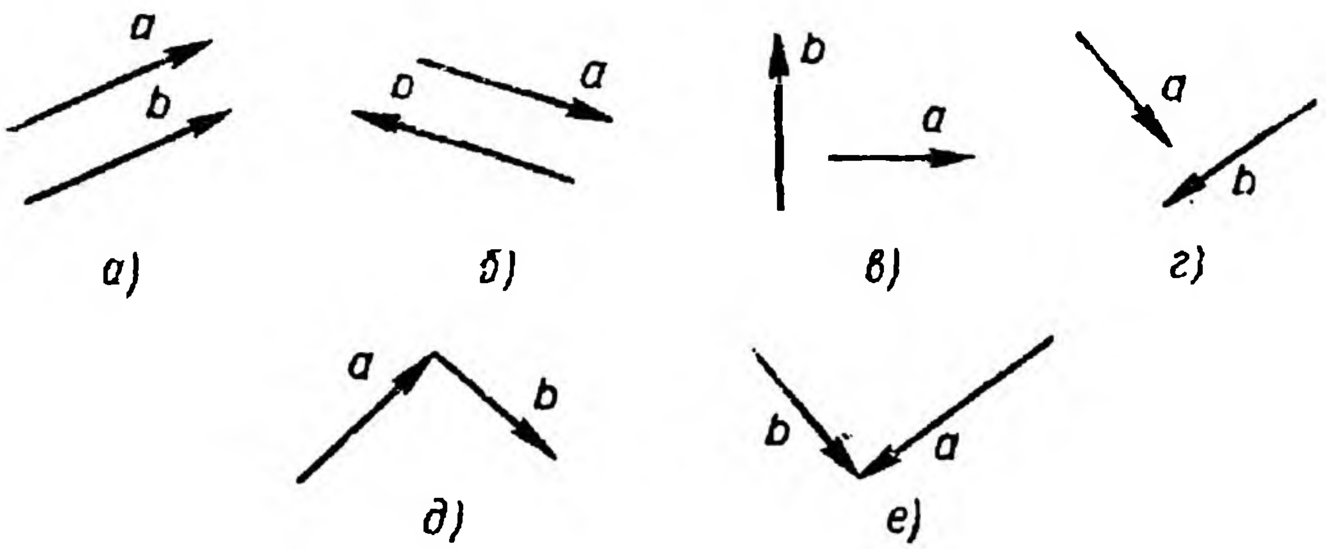
2) Определить наименьшее неотрицательное значение угла $(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})$ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, изображенными на рисунке 28.

901. На рисунке 29 дан вектор $\boldsymbol{m}$ и точка O. Приняв точку O за начало нового вектора $\boldsymbol{n}$, построить этот вектор так, чтобы он образовал с данным вектором угол, равный: 1) 0°; 2) 180°; 3) —45°; 4) 210°; 5) —120°.

902. Три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, имеющие равные длины, образуют правильный треугольник (рис. 30). Определить наименьшие положительные значения углов $(\widehat{a,\ b})$; $(\widehat{a,\ c})$; $(\widehat{b,\ c})$; $(\widehat{b,\ a})$; $(\widehat{c,\ a})$; $(\widehat{c,\ b})$.

903. Вектор $\overrightarrow{OA}$, занимавший горизонтальное положение, повернулся вокруг своего начала на угол α. Выполнить построение, если угол α равен:

1) 135°; 2) 270°; 3) —210°; 4) 540°; 5) —750°; 6) 1200°; 7) —1080°.



а) б) в) г)

д) е)

Рис. 28

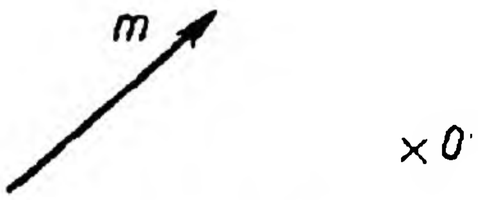


Рис. 29

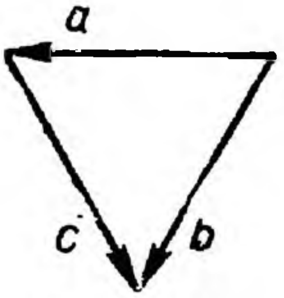


Рис. 30

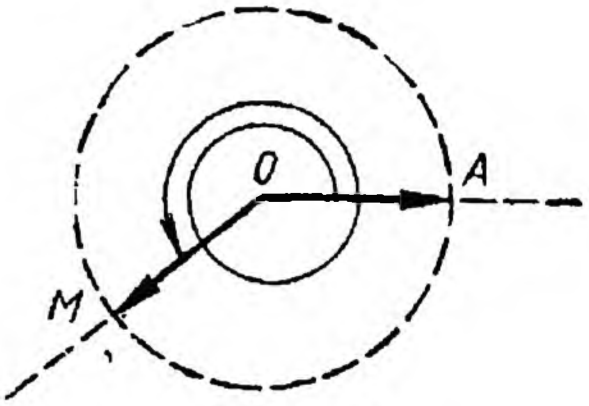


Рис. 31

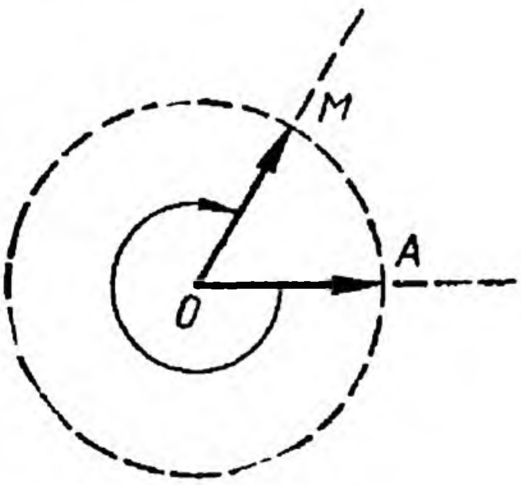


Рис. 32

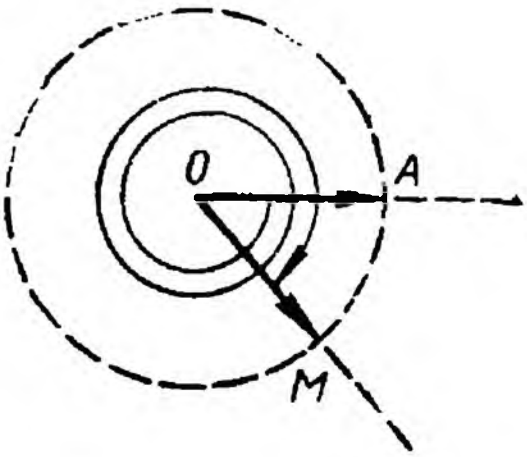


Рис. 33

904. Измерить с помощью транспортира $\angle AOM$, изображенный на рисунках 31—33.

905. Определить в градусах величину угла, описываемого минутной стрелкой часов: 1) за 5 *мин*; 2) за 20 *мин*; 3) за 1 *ч*; 4) за 2 *ч* 10 *мин*; 5) за 5 *ч* 12 *мин*.

906. На какой угол надо повернуть минутную стрелку, чтобы перевести часы назад: 1) на 10 *мин*; 2) на 1 *ч* 12 *мин*; 3) на 2 *ч* 40 *мин*?

907. Часы отстали на 18 *мин*. На какой угол надо повернуть минутную стрелку, чтобы часы показывали верное время?

908. Ведро в колодце поднимается на 2 *м*, если рукоятку ворота повернуть на 5 полных оборотов по часовой стрелке. На какой угол надо повернуть рукоятку ворота, чтобы ведро 1) поднялось на 1,5 *м*; 2) опустилось на 1,25 *м*?

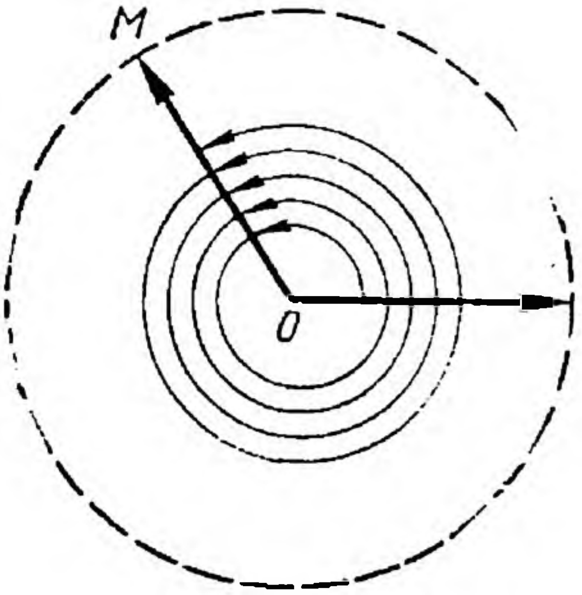


Рис. 34

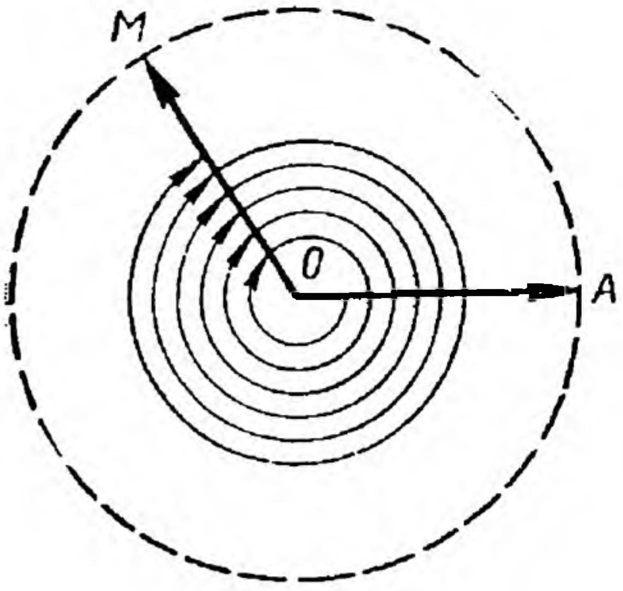


Рис. 35

909. Два зацепляющихся зубчатых колеса имеют: одно — 24 зубца, а другое — 30 зубцов. Меньшее колесо (ведущее) приводит во вращательное движение большее колесо (ведомое). На какой угол должно повернуться ведущее колесо, чтобы ведомое повернулось на 2 полных оборота против часовой стрелки?

910. Вектор $\overrightarrow{OA}$, повернувшись вокруг точки O, образовал с начальным своим положением угол AOM, равный 120°. Какой величины достигнет угол AOM, если:

1) вектор, продолжая вращение в том же направлении (рис. 34), опишет: а) еще 1 полный оборот; б) 2 полных оборота; в) k полных оборотов;

2) вектор от положения $\overrightarrow{OM}$ (рис. 35) опишет в обратном направлении: а) 1 полный оборот; б) 2 полных оборота; в) k полных оборотов?

911. 1) Назвать несколько положительных и отрицательных углов, сторонами которых являются соответственно начальная и конечная стороны угла $\alpha = 30°$. Выразить формулой множество всех таких углов. 2) Выполнить то же задание, принимая угол α равным $60°$; $-90°$; $150°$; $-135°$; $400°$; $510°$; $-420°$; $-840°$.

912. Составить общую формулу углов, начальной стороной которых является вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 36), а конечная сторона совпадает: 1) с вектором $\overrightarrow{OB}$; 2) с вектором $\overrightarrow{OC}$.

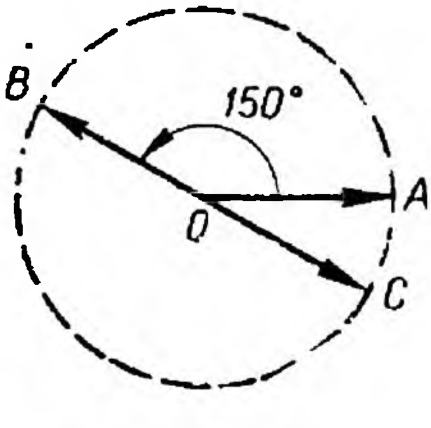


Рис. 36.

913. В окружность вписан правильный треугольник ABC (рис. 37). Составить общую формулу углов, начальной стороной которых является вектор $\overrightarrow{OA}$, а конечная сторона совпадает: 1) с вектором $\overrightarrow{OB}$; 2) с вектором $\overrightarrow{OC}$.

914. По данному общему виду угла α ($k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$) найти его частные положительные значения, меньшие 360°:

1) $\alpha=15°+120°\cdot k$; 2) $\alpha=-45°+60°\cdot k$; 3) $\alpha=-30°+180°\cdot k$; 4) $\alpha=\pm120°+360°\cdot k$.

915. Из множества углов, выраженных формулой $\alpha=30°(6k-1)$, где $k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$, выделить: 1) наименьший положительный угол; 2) наименьший по абсолютной величине угол.

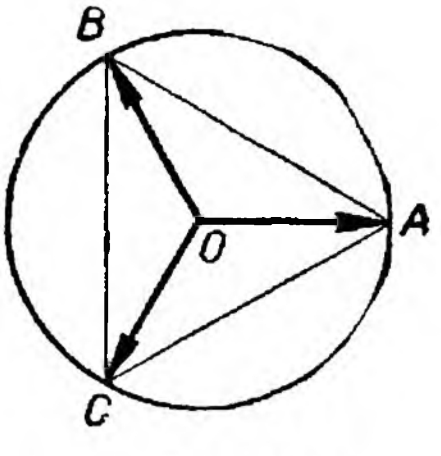


Рис. 37

916. Каждый из следующих углов представить в виде суммы $360°\cdot k+\alpha$, где k — целое число и α — неотрицательный угол, меньший 360°: 1) 450°; 2) 1100°; 3) —700°; 4) —90°; 5) 1440°; 6) —1760°.

917. Две точки A и B, находящиеся на противоположных концах диаметра окружности, начинают одновременно двигаться по окружности в одном направлении. Точка A в каждую минуту описывает дугу в 60°, точка B — дугу в 48°. Через сколько минут после начала движения произойдет первое, второе, k-е совпадение точек?

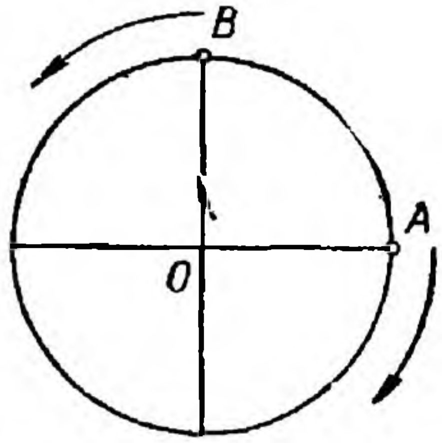


Рис. 38

918. Две точки A и B, находящиеся на концах взаимно перпендикулярных диаметров окружности (рис. 38), начинают одновременно двигаться по окружности: точка A — в отрицательном направлении, описывая каждую минуту дугу в 20°, точка B — в положительном направлении, описывая каждую минуту дугу в 25°. Через сколько минут произойдет первое, второе, k-е совпадение точек?

Радианное измерение углов и дуг

919. 1) В чем разница между радианным и градусным измерением углов? 2) Доказать, что радианная мера угла (дуги) пропорциональна градусной мере этого угла (дуги).

920. Почему ошибочна запись $\pi=180°$?

Лабораторная работа № 2

1) Изготовить из плотного картона транспортир с радианной шкалой (до 0,05 *рад*).

2) Пользуясь изготовленным транспортиром: а) построить следующие углы: 2,5 *рад*; —1,8 *рад*; —3,25 *рад*; 5 *рад*; 10,3 *рад*; —6,5 *рад*; 8,45 *рад*; б) найти радианные меры углов, изображенных на рисунках 31—33.

921. Пользуясь формулой перехода от градусной меры угла к радианной, найти радианную меру углов: 1) точную в долях числа π для углов в 1°; 5°; 18°; 30°; —135°; 225°; —162°; 2) приближенную (при помощи логарифмической линейки) для углов в 50°; 42°30′; 22°10′; 70°15′.

922. Пользуясь формулой перехода от радианной меры угла к градусной, найти градусную меру угла, радианная мера которой равна:

1) $0{,}5\pi$; $-0{,}75\pi$; $\frac{\pi}{3}$; $0{,}1\pi$; $-\frac{2\pi}{15}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{12}$;

2) 1; 2; —3; 2,5; 0,1; 0,01; —2,1; —0,55.

923. Пользуясь таблицей для перевода градусной меры угла (дуги) в радианную, определить радианную меру углов (дуг) в 1°; 5°; 30°; 45°; 60°; 36°; 108°; 135°; 216°42′; 128°13′; 289°26′.

924. Пользуясь таблицей для перевода радианной меры угла (дуги) в градусную, определить градусную меру углов (дуг): 0,54 *рад*; 3,83 *рад*; 2,106 *рад*; 3,512 *рад*; 12,378 *рад*.

925. Найти в радианах дополнение угла $\frac{11}{13}\pi$ до полного.

926. Найти градусные и радианные (точные — в долях числа π и приближенные — с точностью до 0,01) меры углов: 1) равностороннего треугольника; 2) равнобедренного прямоугольного треугольника; 3) правильного шестиугольника; 4) правильного двенадцатиугольника.

927. Углы треугольника относятся между собой, как 3 : 5 : 7. Определить радианные меры этих углов (с точностью до 0,0001).

928. В равнобедренном треугольнике угол при вершине в 2,5 раза меньше угла при основании. Выразить углы треугольника в градусной и радианной (в долях числа π) мерах.

929. Определить радианные меры углов выпуклого четырехугольника, если величины их относятся между собой, как 6 : 8 : 7 : 15.

930. Зубчатое колесо, имеющее 56 зубцов, повернулось на 14 зубцов против часовой стрелки. Выразить в радианах угол поворота колеса.

931. Окружность морского компаса делится на 32 равные части, называемые румбами. Выразить румб: 1) в градусах и минутах; 2) в радианах (с точностью до 0,001).

932. Определить радианную меру дуги, длина и радиус которой равны соответственно 17 *см* и 20 *см*.

933. Определить длину дуги окружности радиуса $R = 25$ *см*, если: 1) радианная мера дуги равна 1,25 *рад*; 2) градусная мера дуги равна 144°.

934. Радиус окружности равен 36 *см*. Найти периметр сектора, дуга которого содержит $\frac{7}{9}$ радиана.

935. Найти радианную меру угла сектора, длина дуги которого: 1) втрое меньше периметра сектора; 2) составляет половину периметра сектора.

936. Определить площадь сектора радиуса $R = 2,5$ *дм*, если ограничивающая его дуга содержит 0,64 *рад*.

937. Найти радианную меру дуги сектора, площадь которого равна 512 *кв. см*, а радиус ограничивающей его дуги равен 16 *см*.

938. Шкив скоростного электромотора делает 120 000 оборотов в минуту. Определить угловую скорость вращения этого шкива: 1) в *град/сек*; 2) в *рад/сек*.

939. Определить линейную скорость точки на окружности шлифовального камня, диаметр которого равен 90 *см*, а угловая скорость составляет 500 *рад/сек*. При тех же данных определить число оборотов в минуту.

940. Какую линейную скорость имеет точка вращающегося диска, удаленная на 18 *см* от оси вращения, если угловая скорость диска равна $\frac{\pi}{3}$ *рад/сек*. Какой длины дугу опишет эта точка за 45 *сек*?

Другие единицы измерения углов (дуг)

941. Углы треугольника относятся между собой, как 1 : 3 : 5. Выразить углы этого треугольника: 1) в долях прямого угла; 2) в градусах; 3) в радианах (с точностью до 0,0001).

942. Для измерения углов артиллеристы употребляют особую единицу, называемую *тысячной* или *делением угломера*. Полный угол содержит 6000 тысячных. 1) Выразить одну тысячную в минутах. 2) Выразить в тысячных углы, содержащие 36′; 3°; 12°; 36°; 48°.

943. 1) Длина дуги равна l, а центральный угол, соответствующий этой дуге, содержит n тысячных. Определить радиус R дуги, приняв $\pi \approx 3$. 2) Исходя из полученного соотношения, сформулировать правило глазомерной оценки расстояния от наблюдателя до некоторого предмета, если известны линейные размеры l наблюдаемого предмета и величина n угла (в тысячных), под которым этот предмет виден наблюдателю.

944. Телеграфный столб, высота которого равна 8 *м*, виден под углом 10 тысячных. Найти расстояние от наблюдателя до телеграфного столба.

945. Для измерения географической долготы места употребляют особую единицу, называемую часом. Час долготы равен $\frac{1}{24}$ части полного угла (360°), на который поворачивается Земля за сутки. Один час содержит 60 *мин*, а каждая минута содержит 60 *сек*. Выразить час, минуту и секунду долготы в градусах, минутах и секундах дуги.

946. Географическая долгота города N (от Гринвича) равна 27°24′15″. Выразить ее в часах, минутах и секундах.

947. Географическая долгота города M (от Гринвича) равна 9 *час* 47,5 *мин*. Выразить долготу города M в градусах, минутах и секундах.

§ 20. ЕДИНИЧНАЯ ОКРУЖНОСТЬ

948. Какое существует соотношение между длиной дуги единичной окружности и ее радианной мерой?

949. На единичной окружности построить точки, соответствующие числам: 0; 1; 2; 3; 4; 5; .... Могут ли какие-либо из этих точек совпасть? Почему?

950. Числа заданы формулой $\alpha=\frac{\pi}{2}\cdot k$, где $k=0;\ \pm1;\ \pm2;$

Построить на числовой оси и на единичной окружности точки, соответствующие этим числам. Сколько таких точек будет на числовой оси и сколько на единичной окружности?

951. Отметить на единичной окружности и на числовой оси точки, соответствующие числам: 1) $\alpha=\pi k$, $k=0;\ \pm1,\ \pm2;\ \ldots;$

2) $\alpha=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots;$ 3) $\alpha=\frac{\pi k}{6}$, $k=0;$ $\pm1;\ \pm2;\ \ldots$. Сколько таких точек на числовой оси и сколько на единичной окружности?

952. Как расположатся на числовой оси и на единичной окружности точки, соответствующие числам: 1) a и $-a$; 2) a и $a\pm\pi$; 3) $a+\pi$ и $a-\pi$; 4) a и $a+2\pi k$, $k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$?

953. В чем состоит принципиальное различие между изображением чисел точками числовой оси и их изображением точками единичной окружности?

954. 1) Найти наименьшие неотрицательные числа, соответствующие точкам пересечения единичной окружности: а) с осями координат; б) с биссектрисами координатных углов.

2) В каждом случае написать общую формулу чисел, соответствующих указанным точкам единичной окружности.

955. Зная, что a есть одно из чисел, соответствующих данной точке единичной окружности, найти: 1) все числа, соответствующие данной точке; 2) все числа, соответствующие точке единичной окружности, симметричной данной: а) относительно оси абсцисс; б) относительно оси ординат; в) относительно начала координат.

Решить задачу, принимая $a=0$; $\frac{\pi}{2}$; 1; 2; $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{4}$.

956. Найти условие, которому удовлетворяют числа a, соответствующие: 1) точкам 1-й четверти единичной окружности; 2) точкам 2-й четверти единичной окружности; 3) точкам 3-й четверти единичной окружности; 4) точкам 4-й четверти единичной окружности.

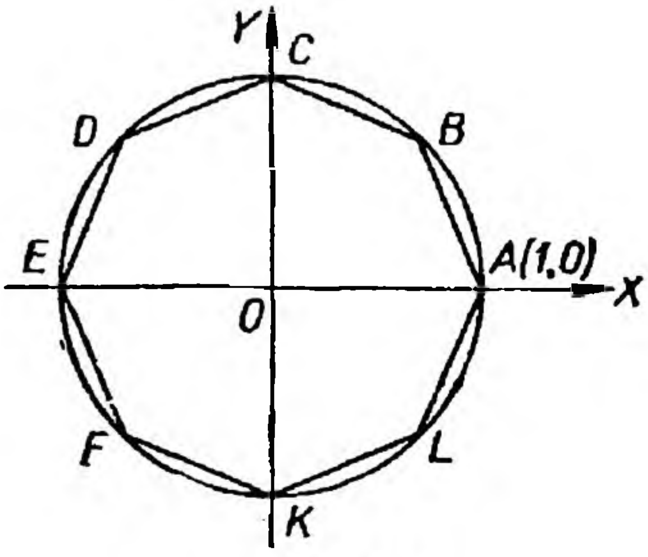


Рис. 39

957. Вершина A правильного восьмиугольника $ABCDEFKL$, вписанного в единичную окружность, имеет координаты (1; 0) (рис. 39).

1) Определить координаты остальных вершин восьмиугольника.

2) Составить общую формулу дуг единичной окружности, оканчивающихся: а) в точках A, C, E и K; б) в точках B, D, F и L; в) в точках A, B, C, D, E, F, K и L.

958. 1) На единичной окружности построить точку, ордината y которой равна 0,5. Сколько точек единичной окружности имеют данную ординату? Как расположены эти точки относительно оси ординат?

2) Измерить транспортиром (с точностью до 1°) наименьшую по абсолютной величине дугу, конец которой имеет ординату, равную 0,5, и составить общую формулу дуг единичной окружности, оканчивающихся в точках с ординатой 0,5.

959. Решить задачу 958, принимая ординату y равной:

1) $-0{,}5$; 2) $0{,}4$; 3) $0{,}5\sqrt{3}$.

960. 1) На единичной окружности построить точку, абсцисса которой равна 0,5. Сколько точек единичной окружности имеют данную абсциссу? Как расположены эти точки относительно оси абсцисс?

2) Измерить транспортиром (с точностью до 1°) наименьшую положительную дугу, конец которой имеет абсциссу, равную 0,5, и составить общую формулу дуг единичной окружности, оканчивающихся в точках с абсциссой 0,5.

961. Решить задачу 960, принимая абсциссу x равной:

1) $-\frac{2}{3}$; 2) $0{,}4$; 3) $0{,}5\sqrt{2}$.

962. Определить координаты концов дуг единичной окружности, заданных формулой ($k=0$; ± 1; ± 2; ...):

1) $\alpha = 30^\circ(2k+1)$; 2) $\alpha = \frac{\pi k}{3}$.

963. Выразить одной формулой следующие серии углов ($k=0$; ± 1; ± 2; ...):

1) $\alpha_1 = 180^\circ \cdot k + 120^\circ$ и $\alpha_2 = 180^\circ \cdot k + 30^\circ$;

2) $\alpha_1 = \pi k + \frac{\pi}{6}$ и $\alpha_2 = \pi k - \frac{\pi}{3}$;

3) $\alpha_1 = 90^\circ \cdot k$ и $\alpha_2 = 45^\circ(2k+1)$;

4) $\alpha_1 = \pi k$ и $\alpha_2 = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$;

5) $\alpha_1 = 120^\circ \cdot k \pm 15^\circ$ и $\alpha_2 = 120^\circ \cdot k \pm 45^\circ$;

6) $\alpha_1 = \pi k$; $\alpha_2 = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$ и $\alpha_3 = 2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}$;

7) $\alpha_1 = 180^\circ \cdot k + 140^\circ$; $\alpha_2 = 180^\circ \cdot k + 80^\circ$ и $\alpha_3 = 180^\circ k + 20^\circ$;

8) $\alpha_1 = 180^\circ \cdot k + (-1)^k \cdot 60^\circ$ и $\alpha_2 = 180^\circ \cdot k - (-1)^k \cdot 60^\circ$.

964. Исключить повторяющиеся углы в следующих формулах ($k = 0$; ± 1; ± 2; ...):

1) $\alpha_1 = 90^\circ \cdot k$ и $\alpha_2 = 60^\circ \cdot k + 30^\circ$;

2) $\alpha_1 = \frac{\pi k}{2}$ и $\alpha_2 = \frac{\pi k}{5}$;

3) $\alpha_1 = \frac{1}{4}\pi k$ и $\alpha_2 = \frac{1}{2}\pi k \pm \frac{1}{4}\pi$;

4) $\alpha_1 = \pi(2k+1) - \frac{\pi}{6}$ и $\alpha_2 = \frac{2}{5}\pi k + \frac{1}{30}\pi$;

5) $\alpha_1 = 72^\circ \cdot k + 36^\circ$ и $\alpha_2 = 120^\circ \cdot k + 60^\circ$.

§ 21. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЛЮБОГО АРГУМЕНТА

Определение тригонометрических функций любого угла

965. Дать общие определения синуса и косинуса угла между вектором и данной осью и показать, что известные из курса элементарной геометрии определения синуса и косинуса острого угла являются частными случаями общих определений.

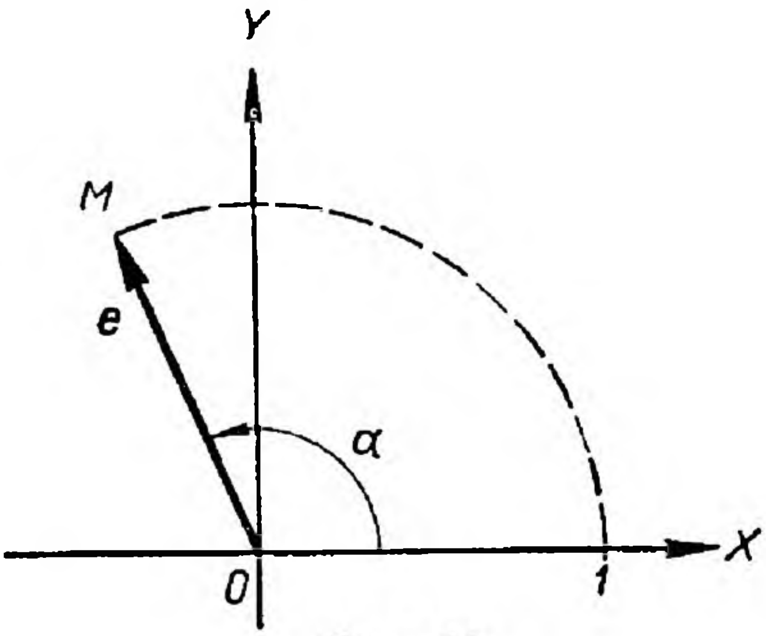


Рис. 40

966. $\overrightarrow{OM} = e$ — единичный вектор, образующий с осью ox угол α (рис. 40).

1) Какая существует связь между координатами вектора e и значениями синуса и косинуса угла α?

2) При каких положениях вектора e на плоскости имеет место соотношение $\sin\alpha = \cos\alpha$? Составить общую формулу тех углов α, для которых $\sin\alpha = \cos\alpha$.

Лабораторная работа № 3

1) На лист плотного картона наклеить круг радиуса $R = 10$ *см*, вырезанный из миллиметровой бумаги. На окружности этого круга нанести две шкалы: градусную (с делениями в 1°) и радианную (с делениями в 0,1 *рад*). В центре круга укрепить прочную нить (рис. 41).

2) Пользуясь изготовленным пособием, найти приближенные значения синуса и косинуса углов в 30°; 120°; 135°; 180°; 240°; 325°; —55°; —160°; —270°; —330°; 400°; 1000°; 2,5 *рад*; 4,1 *рад*; 5,8 *рад*; $\frac{\pi}{3}$ *рад*; $-\frac{5\pi}{4}$ *рад*.

3) Найти по модели: а) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha \approx -0{,}43$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha \approx -0{,}90$, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$.

967. Вектор $\boldsymbol{a} = \{x;\ y\}$ образует с осью абсцисс угол α. Найти значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если: 1) $x = 6$; $y = 8$; 2) $x = 15$; $y = -8$; 3) $x = -3{,}3$; $y = 5{,}6$; 4) $x = -0{,}6$; $y = -0{,}11$; 5) $x = 0$; $y = \frac{2}{3}$; 6) $x = 3$; $y = 0$.

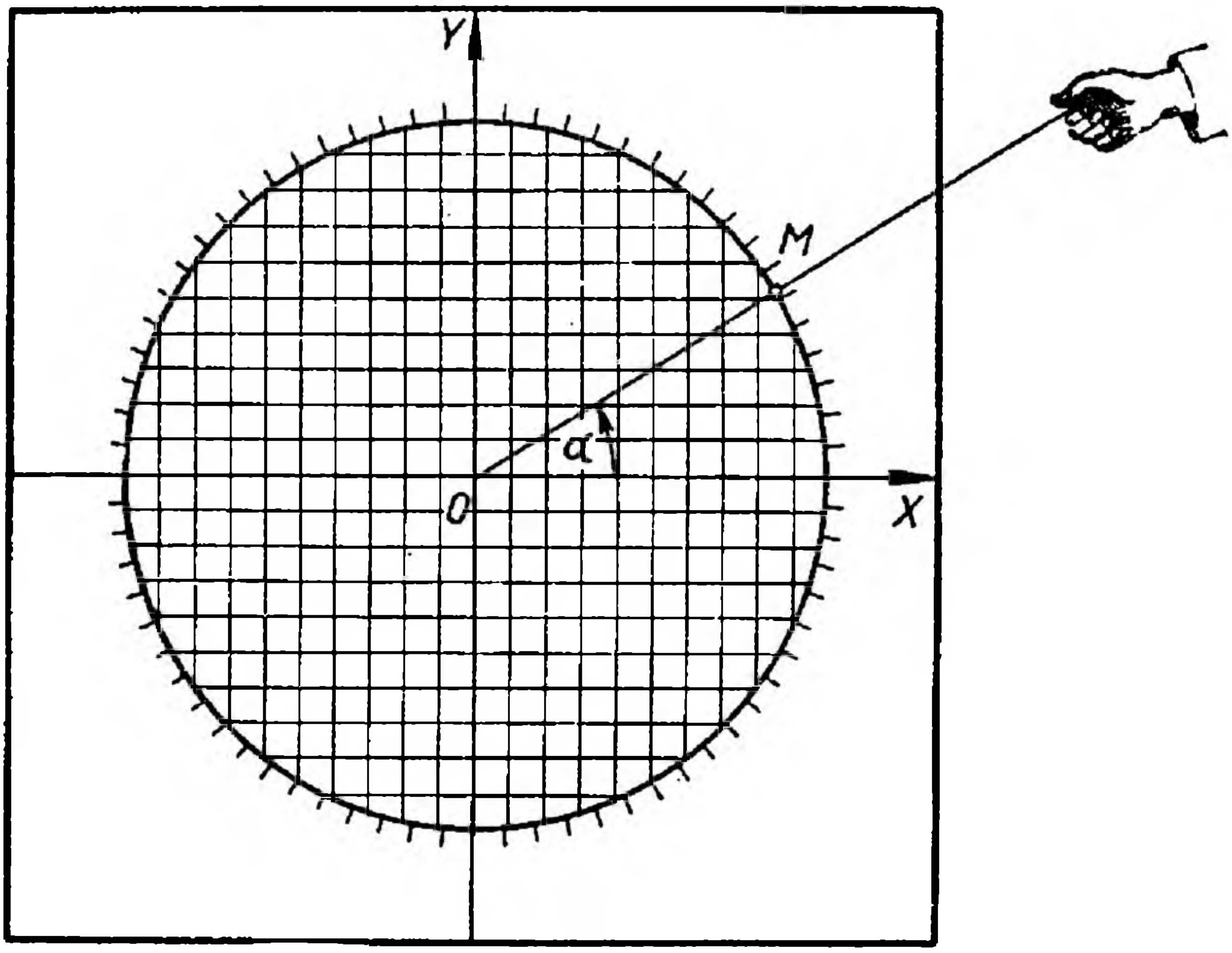


Рис. 41

968. Может ли синус или косинус угла принимать значения, по абсолютной величине большие единицы? Почему?

969. Что больше: 1) $\sin 20^\circ$ или $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ$; 2) $\sin 50^\circ$ или $(\sin 50^\circ)^2$; 3) $\cos 115^\circ$ или $\cos 115^\circ \cdot \cos 20^\circ$?

970. Возможно ли равенство: 1) $\sin\alpha = -\sqrt[4]{1{,}7}$; 2) $\cos\alpha = -\sqrt[5]{5}$; 3) $\cos\alpha = \sqrt{3} - 2$; 4) $\sin\alpha = \sqrt{2} - 1$; 5) $\cos\alpha = \sqrt[3]{28} - \sqrt{10}$?

971. $\smile AM = \alpha$ — произвольная дуга единичной окружности; AT и BK — отрезки касательных, проведенных к этой окружности соответственно из точек ее пересечения с положительными полуосями координат до встречи с продолжением вектора $\overrightarrow{OM}$ (рис. 42 и 43).

1) Показать, что: а) значение $\operatorname{tg}\alpha$ равно проекции вектора $\overrightarrow{AT}$ на ось ординат; б) значение $\operatorname{ctg}\alpha$ равно проекции вектора $\overrightarrow{BK}$ на ось абсцисс.

2) При каких положениях точки M на единичной окружности: а) $\operatorname{tg}\alpha$ не существует (составить общую формулу тех дуг α, тангенс которых не существует); б) $\operatorname{ctg}\alpha$ не существует (составить общую формулу тех дуг α, котангенс которых не существует)?

972. По определению известно, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$, то можно ли заключить отсюда, что $\sin\alpha=2$, а $\cos\alpha=3$?

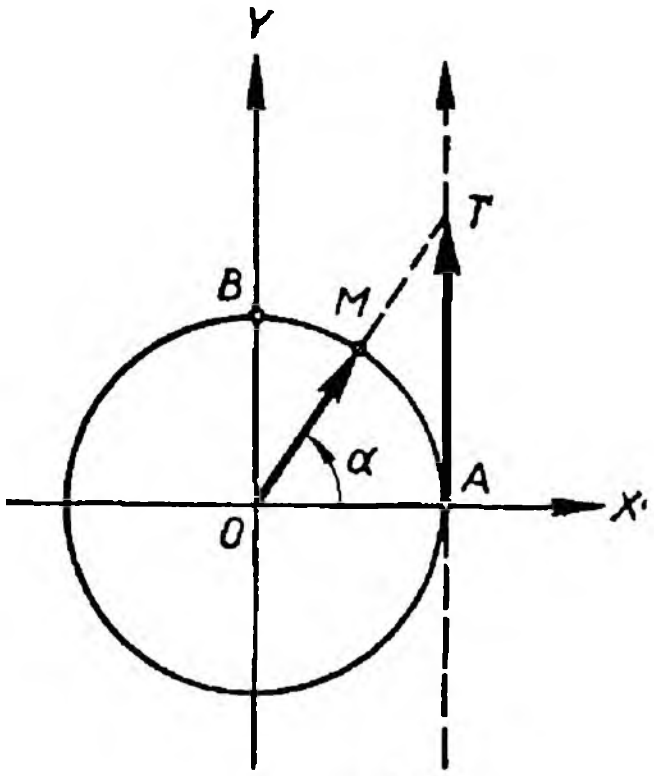


Рис. 42

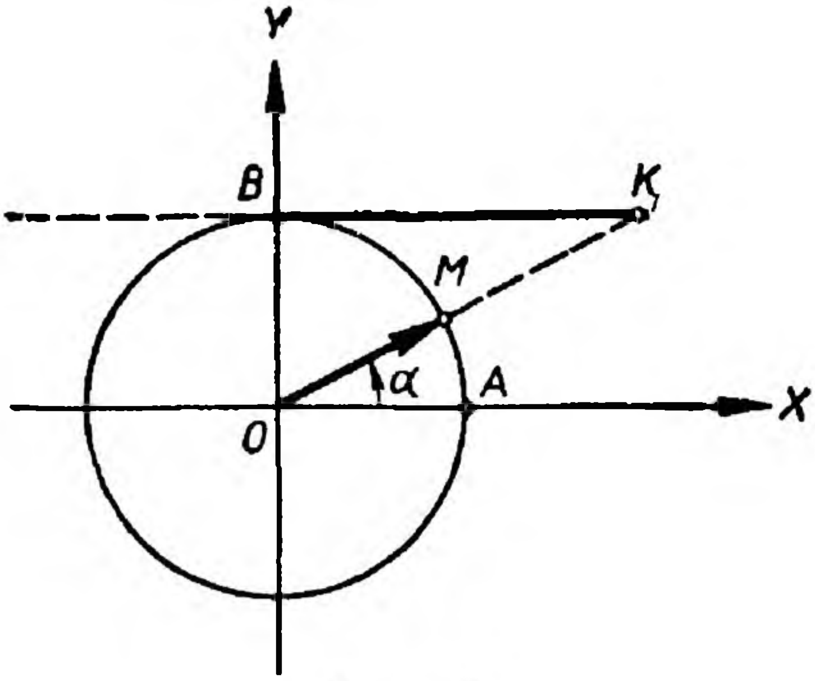


Рис. 43

973. α — произвольный угол. Может ли значение $\operatorname{tg}\alpha$ по абсолютной величине быть меньше, чем значение $\sin\alpha$? Почему?

974. Что больше: 1) $\sin 25°$ или $\operatorname{tg} 25°$; 2) $\sin 320°$ или $\operatorname{tg} 320°$?

975. Доказать неравенство $|\cos\alpha|\leqslant|\operatorname{ctg}\alpha|$. При каких значениях α имеет место знак равенства?

976. Что больше: 1) $\cos 75°$ или $\operatorname{ctg} 75°$; 2) $\cos 160°$ или $\operatorname{ctg} 160°$?

977. Возможно ли равенство $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$? Составить общую формулу углов α, удовлетворяющих этому равенству.

978. Как принято понимать запись:

1) $\sin^2\alpha$; 2) $\sin 2\alpha$; 3) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{tg}(30°+\alpha)$;

5) $\sin 1$; 6) $\operatorname{ctg} 0{,}2$; 7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}\right)$; 8) $\sin(\cos 2)$?

979. Что больше: 1) $\sin 1$ или $\operatorname{tg} 1$; 2) $\cos 1$ или $\operatorname{ctg} 1$?

980. Определить знак разности:

1) $\sin 1{,}2-\operatorname{tg} 1{,}2$; 2) $\cos 0{,}5-\operatorname{ctg} 0{,}5$.

981. a — радианная мера угла, $0<a<\frac{\pi}{2}$. Какое из чисел является большим:

1) $\sin a$ или a; 2) $\operatorname{tg} a$ или a?

982. Пользуясь таблицей натуральных значений тригонометрических функций, найти:

1) $\sin 1$; 2) $\cos 1$; 3) $\mathrm{tg}\,1$; 4) $\mathrm{ctg}\,1$; 5) $\sin 0{,}2$; 6) $\cos\frac{3}{4}$;
7) $\mathrm{tg}\,1{,}48$; 8) $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{18}$; 9) $\sin\frac{3\pi}{5}$; 10) $\cos\frac{5\pi}{12}$.

983. Найти с точностью до 0,01 значение выражения $a - \sin a$ при:
1) $a = 0{,}1$; 2) $a = 0{,}3$; 3) $a = 0{,}5$; 4) $a = 0{,}7$; 5) $a = 0{,}9$.

984. Найти по таблицам:

1) $\sin(\cos 1)$; 2) $\cos(\sin 1)$; 3) $\mathrm{ctg}(\cos 0{,}3)$; 4) $\mathrm{tg}(\sin 0{,}5)$;
5) $\sin(\mathrm{ctg}\,1)$; 6) $\mathrm{ctg}(\mathrm{tg}\,0{,}6)$.

Знаки тригонометрических функций

985. Пользуясь определениями тригонометрических функций, установить:

1) какие знаки имеют тригонометрические функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$ в каждом из следующих случаев: а) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; в) $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$; г) $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$;

2) для углов какой четверти координатной плоскости: а) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют одинаковые знаки; б) знаки $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$ различны; в) $\sin\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$ имеют одинаковые знаки; 3) в каких четвертях координатной плоскости знаки каких тригонометрических функций совпадают.

986. Может ли синус отрицательного угла принимать положительные значения? Привести пример.

987. Какие тригонометрические функции угла треугольника могут принимать отрицательные значения и когда именно?

988. Могут ли тригонометрические функции половины угла треугольника принимать отрицательные значения?

989. Положительным или отрицательным числом является следующее значение тригонометрической функции:

1) $\sin 110°$; 2) $\cos 200°$; 3) $\mathrm{tg}\,160°$; 4) $\mathrm{ctg}\,220°$;
5) $\sin 280°$; 6) $\cos 340°$; 7) $\mathrm{tg}(-95°)$; 8) $\mathrm{ctg}(-230°)$;
9) $\sin(-130°)$; 10) $\cos 600°$; 11) $\mathrm{ctg}\,500°$; 12) $\mathrm{tg}\,670°$;
13) $\cos 2$; 14) $\sin(-3)$; 15) $\mathrm{tg}\,10$; 16) $\mathrm{ctg}\,1{,}7$?

990. Определить знак каждого из данных произведений:

1) $\sin 100° \cdot \sin 132°$; 2) $\cos 210° \cdot \sin 115°$;
3) $\cos 285° \cdot \cos(-316°)$; 4) $\mathrm{tg}\,112° \cdot \sin 165°$;
5) $\cos 318° \cdot \mathrm{tg}(-214°)$; 6) $\mathrm{ctg}\,300° \cdot \sin 220°$;
7) $\sin 1 \cdot \cos 2$; 8) $\sin 5 \cdot \mathrm{tg}\,5$;
9) $\sin(-118°) \cdot \cos 118° \cdot \mathrm{tg}\,118°$; 10) $\cos 123° \cdot \mathrm{tg}\,231° \cdot \sin 312°$;
11) $\sin 3 \cdot \cos 4 \cdot \mathrm{ctg}\,5$.

Значения тригонометрических функций некоторых углов

991. Исходя из определения тригонометрических функций, вычислить значение синуса, косинуса, тангенса следующих углов: 0°; 30°; 45°; 60°; 90°; 120°; 135°; 150°; 180°; 210°; 225°; 240°; 270°; 300°; 315°; 330°; 360°.

Результаты вычислений занести в таблицу.

992. Существует ли такой угол, для которого: 1) синус и косинус (одновременно) принимают значение, равное единице; равное нулю; 2) тангенс и котангенс (одновременно) принимают значения, по абсолютной величине меньшие единицы?

993. Что больше: 1) $\sin 20^\circ$ или $\sin 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ$; 2) $\cos 42^\circ$ или $\cos 42^\circ \cdot \operatorname{tg} 48^\circ$; 3) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{tg}^2\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$?

Упростить выражения.

994. 1) $2\cos 0^\circ + 3\sin 90^\circ + 4\operatorname{tg} 180^\circ$;

2) $5\sin 270^\circ - 2\cos 0^\circ + 3\operatorname{ctg} 90^\circ$;

3) $a\cdot\sin\pi + b\cdot\cos\pi + c\cdot\operatorname{tg}\pi$;

4) $m\cos 90^\circ - n\cos 180^\circ + p\sin 270^\circ + q\operatorname{tg} 360^\circ$;

5) $2\operatorname{tg} 0^\circ + 8\cos 270^\circ - 6\sin 90^\circ$.

995. 1) $\operatorname{tg} 45^\circ\cdot\sin 60^\circ\cdot\operatorname{ctg} 30^\circ$;

2) $\cos\frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;

3) $\operatorname{ctg} 225^\circ - \cos 240^\circ - \sin^2 120^\circ + 0{,}75\operatorname{tg}^2 210^\circ$;

4) $\frac{3}{2}\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} + \frac{3}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{4\pi}{3} + \cos^2\frac{11\pi}{6} + \sin\frac{2\pi}{3}$.

996. 1) $m^2\operatorname{tg} 225^\circ - 4mn\sin 210^\circ + 3n^2\operatorname{tg}^2 30^\circ$;

2) $a^3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + a^2b\operatorname{tg}^2\frac{4\pi}{3} + 9ab^2\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{3} + 2b^3\cos\frac{5\pi}{3}$;

3) $2\cos^2 315^\circ + 3p\operatorname{ctg} 135^\circ + p^2\operatorname{tg}^2 300^\circ - 2p^3\sin^2 225^\circ$.

997. Найти числовые значения следующих выражений:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha$ при: а) $\alpha = 0^\circ$; б) $\alpha = 90^\circ$;
в) $\alpha = 180^\circ$; г) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$;

2) $\sin(\alpha + 45^\circ) + 2\sin(\alpha - 45^\circ) + 4\cos 2\alpha + 2\cos(\alpha + 135^\circ)$
при: а) $\alpha = 45^\circ$; б) $\alpha = 135^\circ$;

3) $\sin\alpha - \cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \sin 2\alpha$
при: а) $\alpha = 30^\circ$; б) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; в) $\alpha = 60^\circ$.

998. Вектор $\boldsymbol{a}$ образует с осью l угол α. Найти проекцию этого вектора на данную ось, если:

1) $|\boldsymbol{a}|=6$; $\alpha=60^\circ$; 2) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$; $\alpha=45^\circ$;

3) $|\boldsymbol{a}|=0,9$; $\alpha=90^\circ$; 4) $|\boldsymbol{a}|=1,2$; $\alpha=120^\circ$.

999. Определить длину вектора $\boldsymbol{a}$, зная проекцию x этого вектора на ось абсцисс и угол α между вектором и данной осью.

1) $x=\sqrt{3}$, $\alpha=30^\circ$; 2) $x=-0,5$, $\alpha=180^\circ$;

3) $x=2,5$, $\alpha=300^\circ$; 4) $x=-7$, $\alpha=240^\circ$.

1000. 1) Доказать, что всякая хорда единичной окружности равна удвоенному синусу половины центрального угла, соответствующего хорде.

2) Используя доказанное утверждение, найти значения тригонометрических функций углов 30°, 45° и 60°.

1001. Зная, что сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса R, равна $R\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, определить $\sin 18^\circ$.

1002. Проверить неравенства, заменив тригонометрические функции их значениями:

1) $\sin 30^\circ+\cos 45^\circ>1$; 2) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}>1$.

1003. Проверить равенство

$$\cos 30^\circ\cdot\operatorname{tg}60^\circ-1=\operatorname{ctg}^2 60^\circ(1+\sin^2 315^\circ).$$

1004. При каких значениях α на замкнутом интервале $[0; 2\pi]$:

1) $\sin\alpha$ обращается в нуль; 2) $\operatorname{tg}\alpha$ принимает значение, равное 1; 3) $\cos\alpha$ принимает свое наименьшее значение?

1005. При каких значениях α в открытом интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ разность $0,5\sqrt{3}-\cos\alpha$: 1) положительна; 2) отрицательна; 3) равна нулю?

1006. При каких значениях α в открытом интервале $(0; \pi)$ разность $\sin\alpha-0,5\sqrt{2}$: 1) положительна; 2) отрицательна; 3) равна нулю?

1007. При каких значениях α в открытом интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ сумма $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha$: 1) положительна; 2) отрицательна; 3) равна нулю?

1008. При каких значениях α на замкнутом интервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ выражение $\sqrt{0,5-\sin\alpha}$ имеет действительные значения?

1009. Определить знак разности:

1) $\cos\left(3\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}\right)-\operatorname{ctg}1$; 2) $\operatorname{tg}\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\right)$.

1010. Найти (по таблицам):

1) $\sin\left(\cos\frac{5\pi}{3}\right)$; 2) $\cos\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(\sin^2\frac{3\pi}{4}\right)$; 4) $\sin\left(1,2\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{3}\right)$.

Изменение тригонометрических функций

1011. 1) Исследовать изменение $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ с изменением угла α от 0° до 360° (от 0 до 2π) и заполнить таблицу 6 (стрелки ↗ и ↘ заменяют в таблице слова *возрастает* и *убывает*).

Таблица 6

α	0° (0)	I четв.	90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	II четв.	180° (π)	III четв.	270° $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	IV четв.	360° (2π)
$\sin\alpha$	0	↗	1						
$\cos\alpha$	1	↘	0						
$\operatorname{tg}\alpha$	0	↗	не существует						
$\operatorname{ctg}\alpha$	не существует	↘	0						

2) Что можно сказать о дальнейшем изменении тригонометрических функций, когда аргумент α принимает значения, большие 360° (2π), и об их изменении при отрицательных значениях аргумента?

1012. Какие области изменения имеют функции:

1) $\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha$?

1013. В каких границах может изменяться каждая из следующих функций:

1) $1+\sin\alpha$; 2) $1-\cos 2\alpha$;
3) $\sin|\alpha|$; 4) $|\cos\alpha|$?

1014. Какие из основных тригонометрических функций могут принимать значение, равное:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $-0{,}85$; 3) 1; 4) -1; 5) 1,2; 6) $-2{,}35$; 7) 2;
8) $\sqrt{0{,}5}$; 9) π; 10) $\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$; $a>0$, $b>0$;
11) $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$, $a>0$, $b>0$; 12) $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$; 13) $k+\frac{1}{k}$?

1015. 1) При каких значениях α на замкнутом интервале $[0;\ 2\pi]$ функция $\sin\alpha$: а) возрастает; б) убывает; в) положительна; г) отрицательна; д) принимает значение, равное нулю; е) принимает наибольшее и наименьшее значения?

2) Составить общие формулы углов α, синус которых: а) равен 0; б) равен 1; в) равен -1.

1016. Ответить на аналогичные вопросы (задача 1015) относительно функции $\cos\alpha$.

1017. В каких четвертях координатной плоскости функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ одновременно: 1) убывают; 2) возрастают?

1018. 1) При каких значениях аргумента α на замкнутом интервале $[0; \pi]$ функция $\operatorname{tg}\alpha$: а) возрастает; б) убывает; в) положительна; г) отрицательна; д) принимает значение, равное нулю; е) не существует?

2) Составить общие формулы углов α, тангенс которых: а) равен нулю; б) равен 1; в) равен -1; г) не существует.

1019. Ответить на аналогичные вопросы (задача 1018) относительно функции $\operatorname{ctg}\alpha$.

1020. Что больше: 1) $\sin 1$ или $\sin 10^\circ$; 2) $\cos 1$ или $\cos 1^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 0{,}1$ или 1; 4) $\sin 1$ или $\operatorname{tg}(\cos 0)$?

1021. Определить знак каждой из данных разностей:

1) $\sin 123^\circ - \sin 132^\circ$; 2) $\cos 35^\circ - \cos 40^\circ$;
3) $\operatorname{tg} 220^\circ - \operatorname{tg} 217^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 304^\circ - \operatorname{ctg} 316^\circ$;
5) $\sin 58^\circ - \cos 58^\circ$; 6) $\operatorname{ctg} 100^\circ - \operatorname{tg} 100^\circ$;
7) $\sin 81^\circ - \operatorname{tg} 81^\circ$; 8) $\operatorname{ctg} 125^\circ - \cos 125^\circ$.

1022. Какие значения в открытом интервале $(0^\circ; 360^\circ)$ можно давать α, чтобы выполнялись соотношения:

1) $\sin 200^\circ > \sin\alpha$; 2) $\cos\alpha < \cos 150^\circ$;
3) $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg} 225^\circ$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha$?

1023. 1) При каких значениях α на замкнутом интервале $[0; 2\pi]$ функция $\sin\alpha - \cos\alpha$: а) обращается в нуль; б) принимает положительные значения; в) принимает отрицательные значения?

2) Ответить на те же вопросы относительно функций

$$\sin\alpha + \cos\alpha \quad \text{и} \quad \sin\alpha\cdot\cos\alpha.$$

1024. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $2\sin\alpha + 3$; 2) $1 - 4\cos 2\alpha$; 3) $\sin^2\alpha$;
4) $\cos^2\alpha$; 5) $0{,}25 + 2\cos^2\alpha$; 6) $10 - 9\sin^2 3\alpha$.

1025. Определить, при каких значениях α следующие функции принимают наименьшее значение:

$$1)\ \frac{1}{1+\sin\alpha};\quad 2)\ \frac{1}{1-\cos\alpha}.$$

Найти это наименьшее значение.

1026. 1) При каких значениях α на замкнутом интервале $[0; 2\pi]$ функция $y = \sin(\sin\alpha)$ принимает наибольшее и наименьшее значения? Пользуясь таблицей натуральных значений тригонометрических функций, найти эти значения функции.

2) Выполнить то же задание относительно функции $y = 1 - \cos(\sin\alpha)$.

1027. Найти область изменения функций:

1) $1+\sin^2 x$; 2) $|\cos x|$; 3) $1-2|\sin 3x|$;

4) $\frac{1}{2-\cos 2x}$; 5) $\cos(\pi\sin x)$; 6) $\operatorname{tg}(\sin\pi x)$.

Построение угла по данному значению его тригонометрической функции. Главные углы. Простейшие тригонометрические уравнения

1028. 1) Построить угол α, если $\cos\alpha=\frac{1}{2}$. Сколько таких углов содержится в открытом интервале $(0;\ 2\pi)$; в открытом интервале $(0;\ \pi)$.

2) Измерить транспортиром величину наименьшего положительного угла α и составить общую формулу всех углов, косинус которых равен $\frac{1}{2}$.

3) Выполнить задания 1) и 2), принимая $\cos\alpha$ равным: а) $-\frac{1}{2}$; б) 0,4; в) —0,4; г) $\frac{1}{3}$; д) $-\frac{2}{3}$; е) —0,6.

1029. Как прочитать символ $\arccos m$? При каких значениях m имеет смысл это выражение?

1030. В какой четверти единичной окружности оканчивается дуга $\arccos m$, если: 1) $0<m<1$; 2) $-1<m<0$?

1031. Построить дуги: 1) $\arccos 0{,}75$; 2) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

1032. Доказать геометрически соотношение

$$\arccos(-m)=\pi-\arccos m, \quad |m|\leqslant 1.$$

1033. Найти:

1) $\arccos 0{,}5$; 2) $\arccos 0$; 3) $\arccos 1$;

4) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; 5) $\arccos(-1)$; 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1034. Пользуясь таблицами, найти в градусах и радианах:

1) $\arccos 0{,}7660$; 2) $\arccos 0{,}8599$;

3) $\arccos 0{,}2588$; 4) $\arccos(-0{,}4384)$;

5) $\arccos(-0{,}2588)$; 6) $\arccos(-0{,}8910)$.

1035. Определить:

1) $\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; 2) $\cos(\arccos 0{,}45)$;

3) $\cos\left[\arccos\left(-\frac{5}{7}\right)\right]$; 4) $\cos(\arccos m)$, $|m|\leqslant 1$;

5) $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$; 6) $\arccos(\cos 2\pi)$;

7) $\arccos\left[\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)\right]$; 8) $\arccos(\cos 3\pi)$.

1036. Найти x из уравнений:

1) $\arccos x = \frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos 2x = 158°$;

3) $\arccos \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4}$; 4) $\arccos (x - 1) = \frac{\pi}{2}$.

1037. Решить следующие простейшие тригонометрические уравнения:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos x = -0{,}5$;

3) $\cos x = 0{,}5736$ (по таблице);

4) $\cos x = -0{,}9848$ (по таблице).

При решении: а) определить главный угол (дугу), соответствующий заданной числовой величине косинуса; б) составить общую формулу углов (дуг), удовлетворяющих данному уравнению.

1038. Составить общую формулу углов x, удовлетворяющих уравнению $\cos x = m$, где $|m| \leqslant 1$. Привести геометрическое пояснение для случаев: 1) $0 < m < 1$; 2) $-1 < m < 0$.

1039. Решить уравнения:

1) $\cos 3x = -0{,}5\sqrt{3}$; 2) $\cos 2x = 0$; 3) $\cos\left(\frac{x}{2} + 10°\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\cos (x - 20°) = 1$; 5) $\cos 3x = -0{,}2588$ (по таблице);

6) $\cos \frac{x}{2} = -0{,}9397$ (по таблице).

1040. 1) Построить угол α, если $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. Сколько таких углов содержится в открытом интервале $(0; 2\pi)$; в открытом интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?

2) Измерить транспортиром наименьший по абсолютной величине угол α и составить общую формулу всех углов, синус которых равен $\frac{1}{2}$.

3) Выполнить задания 1) и 2), принимая $\sin \alpha$ равным: а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) 1; г) $-0{,}8$.

1041. 1) Как прочитать символ $\arcsin m$? При каких значениях m имеет смысл это выражение?

2) В какой четверти единичной окружности оканчивается дуга $\arcsin m$, если: а) $0 < m < 1$; б) $-1 < m < 0$?

1042. Построить дуги: 1) $\arcsin \frac{2}{5}$; 2) $\arcsin (-0{,}6)$.

1043. Доказать геометрически соотношение

$$\arcsin (-m) = -\arcsin m, \quad |m| \leqslant 1.$$

1044. Найти:

1) $\arcsin\frac{1}{2}$; 2) $\arcsin(-0{,}5)$; 3) $\arcsin 1$;

4) $\arcsin(-1)$; 5) $\arcsin 0$; 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1045. Пользуясь таблицами, найти в градусах и радианах:

1) $\arcsin 0{,}6820$; 2) $\arcsin 0{,}8829$;

3) $\arcsin 0{,}4226$; 4) $\arcsin(-0{,}3420)$;

5) $\arcsin(-0{,}8415)$; 6) $\arcsin(-0{,}7660)$.

1046. Определить:

1) $\sin\left(\arcsin\frac{2}{9}\right)$; 2) $\sin[\arcsin(-0{,}68)]$;

3) $\sin(\arcsin m)$, $|m| \leqslant 1$; 4) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

5) $\arcsin(\sin 0)$; 6) $\arcsin(\sin\pi)$; 7) $\arcsin[\sin(-0{,}75\pi)]$.

1047. Найти x из уравнений:

1) $\arcsin x = 20°$; 2) $\arcsin 2x = -\frac{\pi}{6}$;

3) $\arcsin\frac{x}{2} = -47°$; 4) $\arcsin(1-x) = 0$.

1048. Решить простейшие тригонометрические уравнения. При решении: а) определить главный угол, соответствующий заданной числовой величине синуса; б) составить общую формулу углов, удовлетворяющих данному уравнению:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\sin x = 0{,}4848$ (по таблице);

4) $\sin x = -0{,}9511$ (по таблице).

1049. Составить общую формулу углов, удовлетворяющих уравнению $\sin x = m$, где $|m| \leqslant 1$. Привести геометрическую иллюстрацию для случаев: 1) $0 < m < 1$; 2) $-1 < m < 0$.

1050. Решить уравнения:

1) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = 0$; 2) $\sin 3x = -1$;

3) $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right) = 1$;

5) $\sin 2x = -0{,}7524$ (по таблице);

6) $\sin(x+18°) = 0{,}7431$ (по таблице).

1051. 1) Построить угол α, если $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$. Сколько таких углов содержится в открытом интервале $(0;\ 2\pi)$; в открытом интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$?

2) Измерить транспортиром наименьший по абсолютной величине угол α и составить общую формулу всех углов, тангенс которых равен 1,5.

3) Выполнить задания 1) и 2), принимая $\operatorname{tg}\alpha$ равным: а) -1; б) $\frac{3}{4}$; в) 2; г) $-0,6$.

1052. Как прочитать символ $\operatorname{arctg} m$? При каких значениях m имеет смысл это выражение?

1053. В какой четверти единичной окружности оканчивается дуга $\operatorname{arctg} m$, если: 1) $m > 0$; 2) $m < 0$?

1054. Построить дуги: 1) $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$; 2) $\operatorname{arctg}(-0,4)$.

1055. Доказать геометрически соотношение

$$\operatorname{arctg}(-m) = -\operatorname{arctg} m.$$

1056. Найти:

1) $\operatorname{arctg} 1$; 2) $\operatorname{arctg}(-1)$; 3) $\operatorname{arctg} 0$;

4) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; 5) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\operatorname{arctg}(-1)+\frac{\pi}{4}$.

1057. Пользуясь таблицами, найти в градусах и радианах:

1) $\operatorname{arctg} 3,655$; 2) $\operatorname{arctg}(-1,0724)$; 3) $\operatorname{arctg}(-14,30)$;

4) $\operatorname{arctg} 0,6009$; 5) $\operatorname{arctg} 0,6420$; 6) $\operatorname{arctg}(-2,050)$.

1058. Определить:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3,1)$; 2) $\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$; 3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} m)$; 4) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)$;

5) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1,25\pi)$; 6) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\pi)$; 7) $\operatorname{arctg}[\sin(-0,5\pi)]$.

1059. Найти x из уравнений:

1) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arctg} 0,5x = -\frac{\pi}{4}$;

3) $\operatorname{arctg} 5x = -64^\circ$; 4) $\operatorname{arctg}(x+1) = 0$.

1060. Решить простейшие тригонометрические уравнения:

1) $\operatorname{tg} x = 1$; 2) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -1$;

3) $\operatorname{tg}(x-17^\circ) = 0,4245$ (по таблице);

4) $\operatorname{tg} 3x = -3,230$ (по таблице).

При решении: а) определить главный угол, соответствующий заданной числовой величине тангенса; б) составить общую формулу углов, удовлетворяющих данному уравнению.

1061. Составить общую формулу углов, удовлетворяющих уравнению $\operatorname{tg} x = m$. Привести геометрическое пояснение для случаев: 1) $m > 0$; 2) $m < 0$.

1062. Решить уравнения:

1) $\operatorname{tg} x = 0$; 2) $\operatorname{tg} 2x = 1$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - 25^\circ\right) = -1$;

4) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; 5) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$;

6) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 7) $\operatorname{tg} 2x = \pm 1$.

1063. 1) Построить угол α, если $\operatorname{ctg}\alpha = 2$. Сколько таких углов содержится в открытом интервале $(0; 2\pi)$; в открытом интервале $(0; \pi)$?

2) Измерить транспортиром величину наименьшего положительного угла α и составить общую формулу углов, котангенс которых равен 2.

3) Выполнить задания 1) и 2), принимая $\operatorname{ctg}\alpha$ равным: а) -2; б) 1; в) 0,8; г) $-\frac{2}{3}$.

1064. Как прочитать символ $\operatorname{arcctg} m$? При каких значениях m имеет смысл это выражение?

1065. В какой четверти единичной окружности оканчивается дуга $\operatorname{arcctg} m$, если: 1) $m > 0$; 2) $m < 0$?

1066. Построить дуги: 1) $\operatorname{arcctg}\frac{2}{5}$; 2) $\operatorname{arcctg}(-1{,}5)$.

1067. Доказать геометрически соотношение

$$\operatorname{arcctg}(-m) = \pi - \operatorname{arcctg} m.$$

1068. Найти:

1) $\operatorname{arcctg} 1$; 2) $\operatorname{arcctg}(-1)$; 3) $\operatorname{arcctg} 0$;

4) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$; 5) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 6) $\operatorname{arcctg}(-1) + \pi$.

1069. Пользуясь таблицами, найти в градусах и радианах:

1) $\operatorname{arcctg} 0{,}0840$; 2) $\operatorname{arcctg}(-3{,}006)$; 3) $\operatorname{arcctg}(-0{,}4348)$;
4) $\operatorname{arcctg}(-14{,}30)$; 5) $\operatorname{arcctg} 0{,}7212$; 6) $\operatorname{arcctg}(-25{,}26)$.

1070. Определить:

1) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 2{,}5)$; 2) $\operatorname{ctg}[\operatorname{arcctg}(-0{,}2)]$;

3) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} m)$; 4) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}\right)$;

5) $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$; 6) $\operatorname{arcctg}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

7) $\operatorname{arcctg}(\cos 3\pi)$.

1071. Найти x из уравнений (по таблице):

1) $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{18}$; 2) $\operatorname{arcctg} x = 146^\circ$;

3) $\operatorname{arcctg}(x - 1) = 14^\circ$; 4) $\operatorname{arcctg} 0{,}2x = 176^\circ$.

1072. Решить следующие простейшие тригонометрические уравнения:

1) $\operatorname{ctg} x = 1$; 2) $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$;

3) $\operatorname{ctg} 3x = 0$; 4) $\operatorname{ctg}(x + 42°) = -11{,}43$ (по таблице).

При решении: а) определить главный угол, соответствующий заданной числовой величине котангенса; б) составить общую формулу углов, удовлетворяющих данному уравнению.

1073. Составить общую формулу углов, удовлетворяющих уравнению $\operatorname{ctg} x = m$. Привести геометрические пояснения для случаев: 1) $m > 0$; 2) $m < 0$.

1074. Решить уравнения:

1) $\operatorname{ctg} 0{,}5x = 1$; 2) $\operatorname{ctg} 3x = 0$;

3) $\operatorname{ctg}(2x - 15°) = -1$; 4) $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.

1075. Какие из главных углов (дуг) — $\arccos m$, $\arcsin m$, $\operatorname{arctg} m$ и $\operatorname{arcctg} m$ — и при каких значениях m могут принимать: а) отрицательные значения; б) значения, большие $\frac{\pi}{2}$?

1076. Почему главный угол (дуга) при заданном значении синуса выбирается на замкнутом интервале $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а при заданном значении косинуса на замкнутом интервале $[0; \pi]$?

1077. Известно, что $0 \leqslant \arccos m \leqslant \pi$ и $0 < \operatorname{arcctg} m < \pi$. Почему $\arccos m$ может принимать значения 0 и π, а $\operatorname{arcctg} m$ таких значений принимать не может?

1078. Известно, что $\sin\frac{5\pi}{6} = 0{,}5$. Можно ли на основании этого написать, что $\arcsin 0{,}5 = \frac{5\pi}{6}$?

1079. Представить x как функцию от y:

1) $y = \arcsin\frac{x}{2}$; 2) $y = 2\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$; 3) $y = 5\arccos 3x$;

4) $y - 1 = 3\arccos\frac{x}{2}$; 5) $2y = 3\operatorname{arcctg}\frac{2}{x}$.

1080. Найти:

1) $2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $3\operatorname{arctg} 1$;

3) $\operatorname{arcctg} 0 + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; 4) $0{,}2\arccos(-1) - \arcsin 0{,}5$.

1081. Найти числовое значение выражения $x + \arcsin x$ при:

1) $x = 0$; 2) $x = \frac{1}{2}$; 3) $x = 0{,}5\sqrt{2}$; 4) $x = 0{,}5\sqrt{3}$; 5) $x = 1$.

1082. Пользуясь таблицами, найти с точностью до 0,001 числовое значение выражения $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} 3x$ при:

1) $x = 0,1$; 2) $x = 1$; 3) $x = \frac{1}{3}$;

4) $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 5) $x = -0,5$; 6) $x = -1$.

§ 22. ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Построение синусоиды. Свойства синуса

1083. 1) Используя модель, описанную в лабораторной работе (стр. 30), найти приближенные значения (до 0,01) функции $y = \sin x$ при $x = 0$; $\frac{\pi}{12} (\approx 0,26)$; $\frac{\pi}{6} (\approx 0,52)$; $\frac{\pi}{4} (\approx 0,78)$; ...; $2\pi (\approx 6,28)$. Полученные результаты занести в следующую таблицу.

Таблица 7

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$\sin x$													

x	π	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$	2π
$\sin x$													

2) Пользуясь данными таблицы, построить график функции $y = \sin x$ (за масштабную единицу на обеих осях принять отрезок, равный 1 *см*).

3) Найти по графику значения (с точностью до 0,1):

а) $\sin 1$; $\sin 0,8$; $\sin \sqrt{2}$; $\sin 2,6$; $\sin 0,64$;

б) $\arcsin 0,48$; $\arcsin(-0,26)$; $\arcsin 0,16$; $\arcsin 1,2$; $\arcsin(-0,84)$.

1084. На рисунке 44 дан геометрический способ построения графика функции $y = \sin x$ (синусоиды) на замкнутом интервале $[0; 2\pi]$. Пользуясь этим рисунком, ответить на следующие вопросы:

1) Какая точка единичной окружности симметрична точке M_4 относительно: а) вертикального диаметра; б) горизонтального диаметра?

2) Какие точки оси абсцисс соответствуют точкам M_4, M_8, M_{16} и M_{20} единичной окружности?

3) Относительно каких точек оси абсцисс симметричны между собой точки N_4 и N_8; точки N_{16} и N_{20}? В чем причина симметрии этих точек?

4) Показать, что: а) точки K_4 и K_8 графика функции симметричны между собой относительно прямой $x=\frac{\pi}{2}$, и указать несколько осей симметрии синусоиды; б) точки K_4 и K_{20} графика симметричны между собой относительно точки (π; 0), и указать несколько центров симметрии синусоиды. Какие обобщения можно

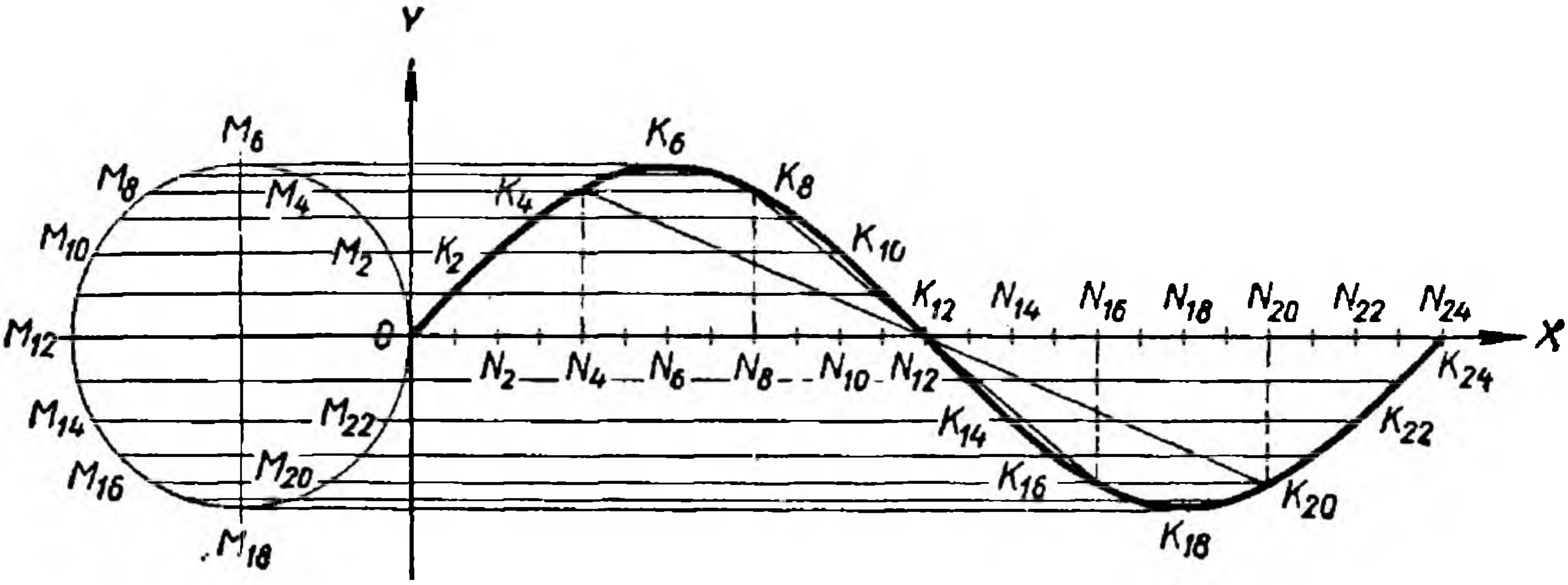


Рис. 44

сделать относительно осевой и центральной симметрии графика функции $y=\sin x$? Как можно использовать осевую и центральную симметрию синусоиды при ее построении?

5) Как получить график функции $y=\sin x$: а) на замкнутом интервале $[-2\pi;\ 0]$; б) при дальнейшем возрастании аргумента по абсолютной величине?

1085. Построить схематически синусоиду на замкнутом интервале $[-3\pi;\ 3\pi]$. При построении: 1) отметить на оси абсцисс точки $\left(\frac{\pi n}{2};\ 0\right)$, приняв за масштабную единицу отрезок в 1 *см*; 2) через точки (0; 1) и (0; -1) провести пунктиром прямые, параллельные оси абсцисс; 3) отметить точки синусоиды с абсциссами $\frac{\pi n}{2}$; 4) вычертить (от руки) синусоиду.

1086. Пользуясь схематическим графиком функции $y=\sin x$ (задача 1085), выполнить следующие упражнения:

1) Указать на оси абсцисс замкнутые интервалы, соответствующие: а) 1-й, 2-й, 3-й и 4-й четвертям окружности; б) правой, левой, верхней и нижней полуокружностям. Как изменяется функция $y=\sin x$ на каждом из этих интервалов?

2) Проиллюстрировать на графике, что:

а) функция $y=\sin x$ не может принимать значений, по абсолютной величине превосходящих единицу, т. е. $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$.

б) Каждому действительному значению аргумента соответствует только одно значение функции $y=\sin x$ (свойство однозначности синуса).

в) При замене произвольного значения аргумента x противоположным ему значением $-x$ значение функции y заменяется противоположным ему значением $-y$, т. е. $\sin(-x) = -\sin x$ (свойство нечетности синуса). Показать справедливость этого свойства, пользуясь единичной окружностью. Как можно использовать свойство нечетности синуса при построении его графика?

г) При изменении произвольного значения аргумента x на число, кратное числу 2π, значение функции не изменяется, т. е. $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$ (свойство периодичности синуса). Проиллюстрировать свойство периодичности синуса на единичной окружности. Как можно использовать периодичность синуса при построении его графика?

д) При изменении произвольного значения аргумента x на число π значение функции y заменяется противоположным ему значением $-y$, т. е. $\sin(x + \pi) = -\sin x$ (свойство полупериода синуса). Подтвердить это свойство на единичной окружности.

е) Уравнение $\sin x = -0{,}5$ имеет бесчисленное множество решений. Назвать несколько частных решений этого уравнения.

3) Указать замкнутые интервалы, в которых функция $y = \sin x$ принимает положительные значения и в каких отрицательные значения. Какие четверти единичной окружности соответствуют этим интервалам?

4) Выделить на оси абсцисс и на единичной окружности замкнутые интервалы, в которых функция $y = \sin x$: а) возрастает; б) убывает. Проиллюстрировать на графике, что в любом промежутке монотонности функция синуса последовательно принимает все свои возможные значения, каждому из которых соответствует только одно значение аргумента в рассматриваемом интервале.

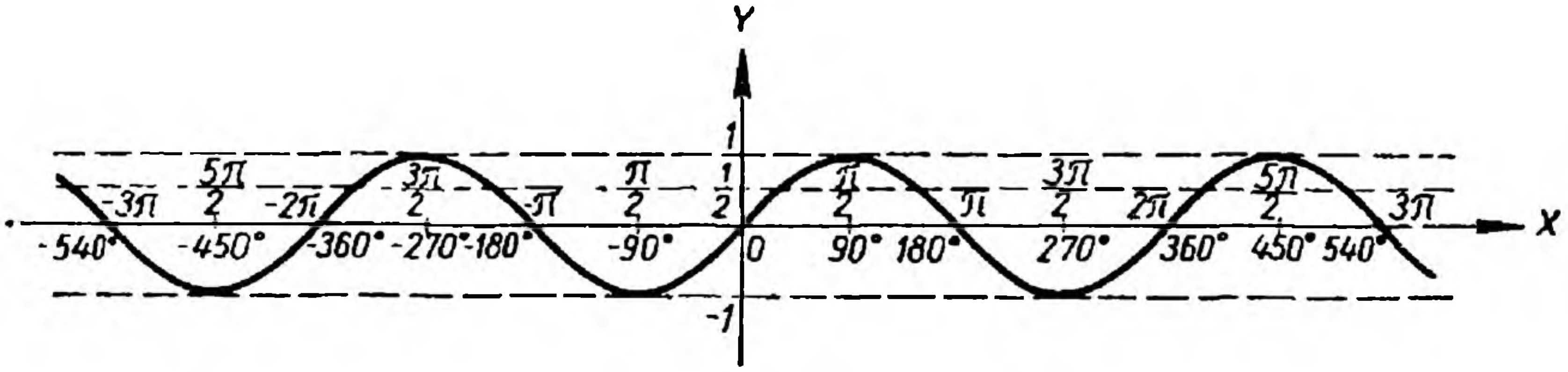


Рис. 45

1087. Пользуясь графиком функции $y = \sin x$ (рис. 45), ответить устно на следующие вопросы:

1) Как изменяется $\sin x$ при изменении аргумента x: а) от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$; б) от 540° до 720°; в) от 90° до $-90°$; г) от $-\pi$ до π; д) от 0 до -2π?

2) Можно ли сказать, что функция $\sin x$ есть возрастающая функция на замкнутом интервале: а) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; в) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$?

3) Если угол (дуга) содержит *a рад*, то сколько значений имеет синус этого угла (дуги)? Как найти значение $\sin a$ по графику?

4) Чему равен синус числа: а) $1,5\pi$; б) $-\pi$; в) $-1,5\pi$; г) $2,5\pi$?

5) Что больше: а) $\sin 0,5$ или $\sin 1$; б) $\sin(-0,2)$ или $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; в) $\sin 2$ или $\sin 3$; г) $\sin(\pi - 1)$ или $\sin 1$?

6) Назвать несколько отрицательных значений аргумента x, для которых синус равен: а) 0,5; б) $-0,5$; в) 0.

7) Указать интервалы, в которых: а) $\sin x > \frac{1}{2}$; б) $|\sin x| < \frac{1}{2}$.

Простейшие преобразования синусоиды

1088. Дана функция $y = 2\sin x$.

1) Используя таблицу значений функции $y = \sin x$ на замкнутом интервале $[0; 2\pi]$ (задача 1083), составить таблицу значений данной функции $y = 2\sin x$ для тех же значений аргумента.

2) Построить график функции $y = 2\sin x$ на замкнутом интервале $[0; 2\pi]$.

3) Имеет ли график данной функции осевую или центральную симметрию? Как продолжить график функции $y = 2\sin x$ на замкнутом интервале $[-2\pi; 0]$?

4) Чем отличается график данной функции от графика функции $y = \sin x$?

1089. Дана функция $y = 0,5\sin x$.

1) Найти области определения и изменения функции и ее период.

2) Выяснить, является ли данная функция четной или нечетной или не является ни четной, ни нечетной.

3) Определить, при каких значениях аргумента x данная функция: а) положительна; б) отрицательна; в) обращается в нуль; г) достигает наибольшего и наименьшего значений и каких именно.

4) Указать интервалы возрастания и убывания функции.

5) Исходя из свойств функции, построить (схематически) ее график и объяснить, как при построении графика можно использовать свойство нечетности (четности) функции и ее периодичность.

6) Путем сопоставления графика данной функции с графиком функции $y = \sin x$ выяснить, каким преобразованиям (сдвиг, растяжение) надо подвергнуть обыкновенную синусоиду, чтобы получить график функции $y = 0,5\sin x$.

1090. Выполнить аналогичные упражнения (задача 1089) относительно следующих функций:

1) $y = -\sin x$; 2) $y = \sin x + 1$; 3) $y = \sin x - 2$; 4) $y = \sin 2x$; 5) $y = \sin\frac{x}{2}$; 6) $y = \sin(x - 60°)$; 7) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

1091*. Определить вид и положение относительно координатных осей графиков следующих функций:

1) $y = \sin x + b$, если: а) $b > 0$; б) $b < 0$;

2) $y = a \sin x$, если: а) $|a| > 1$; б) $|a| < 1$; в) $a < 0$. Какой физический смысл имеет параметр a?

3) $y = \sin mx$, если: а) $|m| > 1$; б) $|m| < 1$; в) $m < 0$. Какой физический смысл имеет параметр m?

4) $y = \sin(x + n)$, если: а) $n > 0$; б) $n < 0$. Какой физический смысл имеет параметр n?

1092. Построить график функции: 1) $y = |\sin x|$; 2) $y = \sin |x|$. Чем отличаются графики этих функций от графика функции $y = \sin x$?

1093. Дана функция $y = \sin 2x + 1$. Не вычерчивая графика этой функции: 1) описать вид и положение кривой относительно координатных осей; 2) выяснить, имеет ли кривая ось или центр симметрии; 3) найти наименьший положительный период l функции; 4) установить знак функции и характер ее изменения при возрастании аргумента x от 0 до l; 5) определить, при каких значениях аргумента x данная функция принимает наибольшее и наименьшее значения и каковы эти значения функции.

1094. Выполнить аналогичные упражнения (задача 1093) относительно функций:

1) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 2 \sin \frac{x}{2} - 1$; 3) $y = -\sin |x|$.

Лабораторная работа № 4

I. Из плотного картона изготовить шаблоны для вычерчивания графиков функций:

а) $y = \sin x$; б) $y = 2 \sin x$;

в) $y = 0{,}5 \sin x$; г) $y = \sin 2x$; д) $y = \sin \frac{x}{2}$.

За масштабную единицу в каждом случае принять отрезок, равный 1 *см* (рис. 46, *а*, *б*, *в*, *г*, *д*).

II. Пользуясь изготовленными шаблонами, построить графики функций:

а) $y = \sin x + 1$; б) $y = 1 - \sin x$; в) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

г) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; д) $y = -\sin 2x$; е) $y = 2(1 - \sin x)$;

ж) $y = 0{,}5 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; з) $y = 1 - \sin \frac{x}{2}$;

и) $y = 0{,}5 \sin(x + 1) - 2$; к) $y = \arcsin x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

III. 1) Вычертить на миллиметровой бумаге график функции $y = \sin x$ (за масштабную единицу принять отрезок, равный 5 *см*).

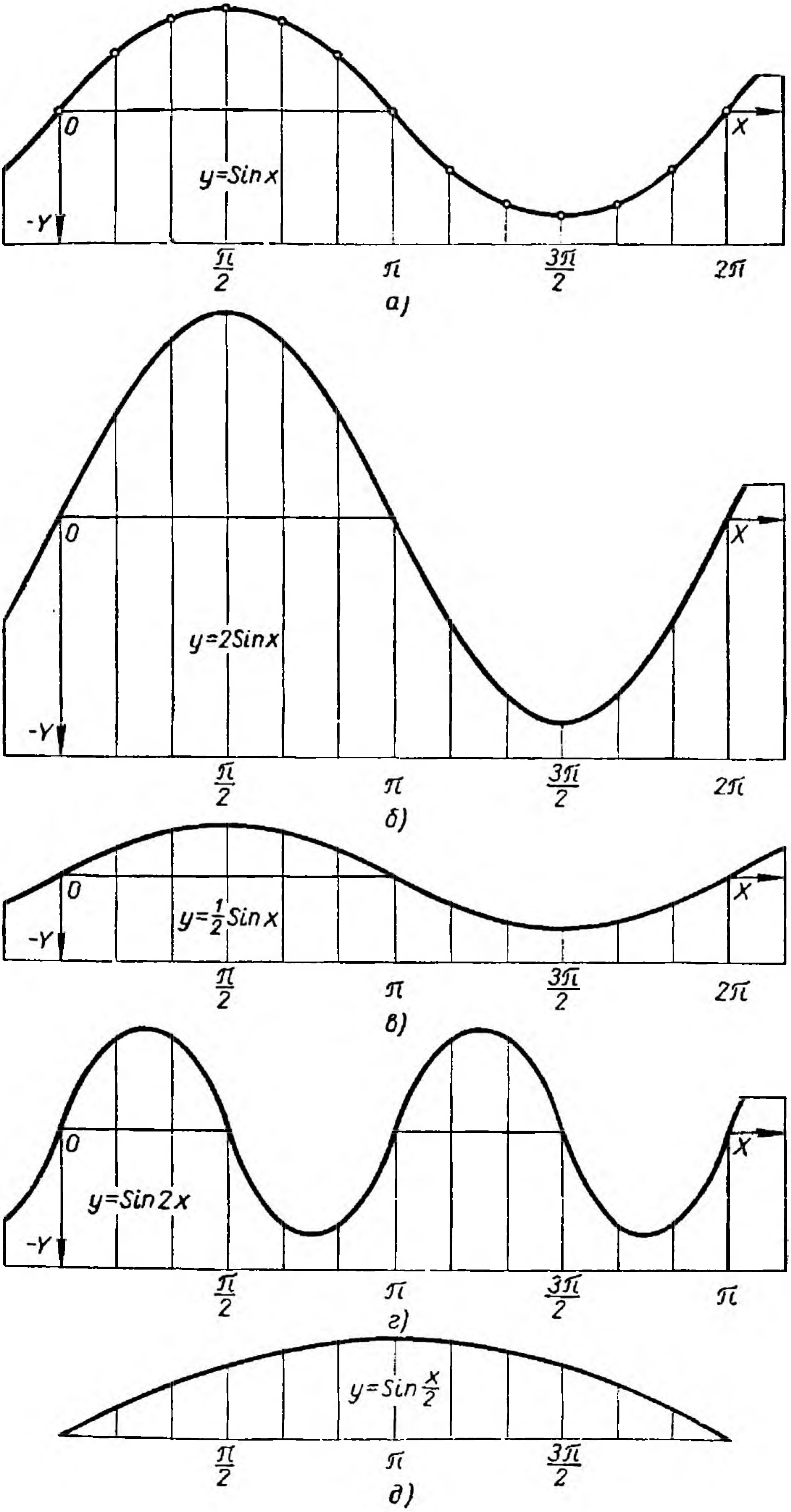

y=Sin x
0
X
-Y
π/2
π
3π/2
2π
а)
y=2Sin x
0
X
-Y
π/2
π
3π/2
2π
б)
y=1/2 Sin x
0
X
-Y
π/2
π
3π/2
2π
в)
y=Sin 2x
0
X
-Y
π/2
π
3π/2
π
г)
y=Sin x/2
π/2
π
3π/2
д)

Рис. 46

2) Наложить на чертеж линейку так, чтобы определяемая ей прямая соответствовала графику функции $y=\pi-0{,}5x$, и найти (с точностью до 0,01) корни уравнения $\sin x=\pi-0{,}5x$.

3) При помощи графика $y=\sin x$ и линейки решить уравнения:

$$\text{а) } \sin x=x;\quad \text{б) } \pi\sin x=x-\pi;\quad \text{в) } \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=x;$$

$$\text{г) } \pi x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

IV. 1) Вычертить на отдельных листах кальки графики функций:

$$\text{а) } y=\sin x;\quad \text{б) } y=x^2;\quad \text{в) } y=x^3;\quad \text{г) } y=x^{\frac{1}{2}};\quad \text{д) } y=x^{-1}.$$

За масштабную единицу принять отрезок, равный 2 *см*.

2) Накладывая соответствующий шаблон на лист миллиметровой бумаги, расположить его так, чтобы в системе координат, вычерченных на миллиметровке, получить графики функций:

$$\text{а) } y=1+\sin x;\qquad \text{б) } y=2-\sin x;$$

$$\text{в) } y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right);\qquad \text{г) } y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

3) Наложив на график $y=1+\sin x$ шаблон 1, б) так, чтобы определяемая им кривая изображала в новой системе координат (на миллиметровке) график функции $y=(x-1)^2$, найти (с точностью до 0,01) корни уравнения $1+\sin x=(x-1)^2$.

4) Пользуясь шаблонами 1, а), 1, б), 1, в), 1, г) и 1, д), найти (с точностью до 0,01) корни уравнения:

$$\text{а) } \sin x=x^2;\quad \text{б) } \frac{1}{2}\sin x=|x|-1;\quad \text{в) } 1-\sin 2x=\frac{x}{2};$$

$$\text{г) } (x-3)^2-\sin\frac{x}{2}+2=0;\quad \text{д) } 2\sin x=3+x^{-1}.$$

Построение косинусоиды. Свойства косинуса

1095. 1) Доказать геометрически соотношение $\cos\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$.

Рассмотреть случаи:

$$\text{а) } 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\ \text{(рис. 47)};\qquad \text{б) } \frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi;$$

$$\text{в) } \pi<\alpha\leqslant\frac{3\pi}{2};\qquad \text{г) } \frac{3\pi}{2}<\alpha\leqslant 2\pi.$$

2) Исходя из доказанного соотношения, указать геометрический способ построения графика функции $y=\cos x$.

3) Каким преобразованиям надо подвергнуть обыкновенную синусоиду, чтобы получить график функции $y=\cos x$ (косинусоиду)?

4) Имеет ли косинусоида центры и оси симметрии? Ответ обосновать на единичной окружности.

1096. Построить схематически косинусоиду на замкнутом интервале $[-3\pi; 3\pi]$ и выполнить следующие упражнения:

1) Проиллюстрировать по графику, что:

а) функция $\cos x$ не может принимать значений, превосходящих по абсолютной величине единицу, т. е. $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$;

б) каждому действительному значению x соответствует только одно значение $\cos x$ (свойство однозначности косинуса);

в) при замене произвольного значения аргумента x противоположным ему значением $-x$ значение функции не изменяется, т. е. $\cos(-x) = \cos x$ (свойство четности косинуса). Подтвердить это свойство на единичной окружности. Как можно использовать свойство четности косинуса при построении его графика;

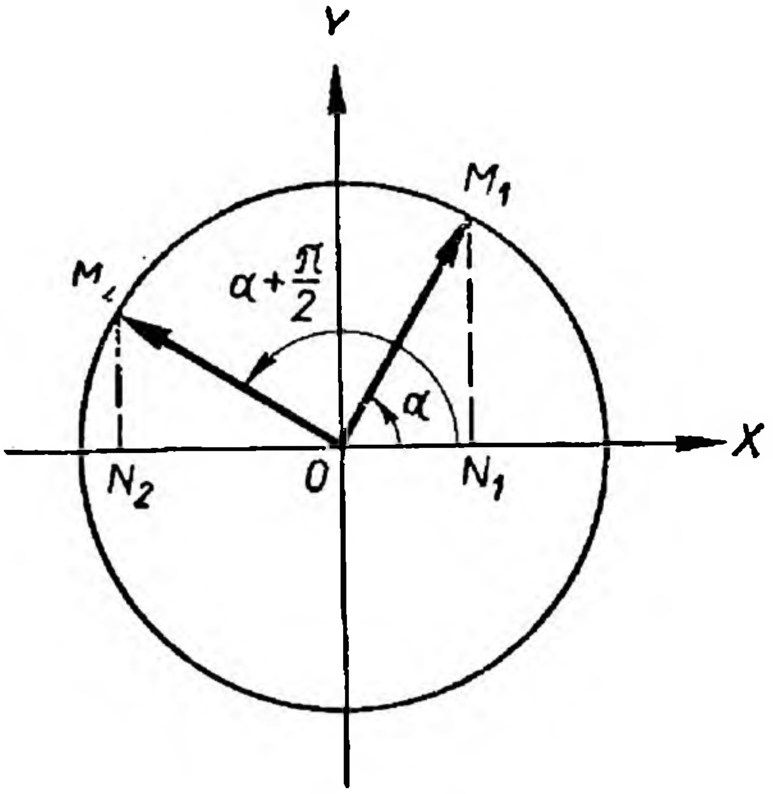


Рис. 47

г) при изменении произвольного значения аргумента на число, кратное числу 2π, значение функции $\cos x$ не изменяется, т. е. $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$ (свойство периодичности косинуса). Проиллюстрировать свойство периодичности косинуса на единичной окружности. Как можно использовать периодичность косинуса при построении его графика;

д) при изменении произвольного значения аргумента на число π значение функции y заменяется противоположным ему значением $-y$, т. е. $\cos(x \pm \pi) = -\cos x$. Подтвердить это свойство на единичной окружности;

е) уравнение $\cos x = 0{,}5$ имеет бесчисленное множество решений. Назвать несколько частных решений этого уравнения.

2) Указать интервалы, в которых функция $y = \cos x$ принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения. Какие четверти единичной окружности соответствуют этим интервалам?

3) Выделить на оси абсцисс и на единичной окружности замкнутые интервалы, в которых функция $y = \cos x$: а) возрастает; б) убывает. Проиллюстрировать на графике, что в любом интервале монотонности косинус последовательно принимает все свои возможные значения, каждому из которых соответствует только одно значение аргумента в рассматриваемом интервале.

1097. По графику функции $\cos x$ (рис. 48) ответить на следующие вопросы:

1) Как изменяется $\cos x$, если аргумент x: а) увеличивается от -2π до π; б) уменьшается от $2{,}5\pi$ до $1{,}5\pi$?

2) Чему равен косинус числа: а) π; б) 2π; в) $-0{,}5\pi$; г) -2π?

3) Что меньше: а) $\cos 0{,}7$ или $\cos 1$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$ или $\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$?

4) При каких значениях x функция $\cos x$ равна: а) 0; б) 1; в) -1?

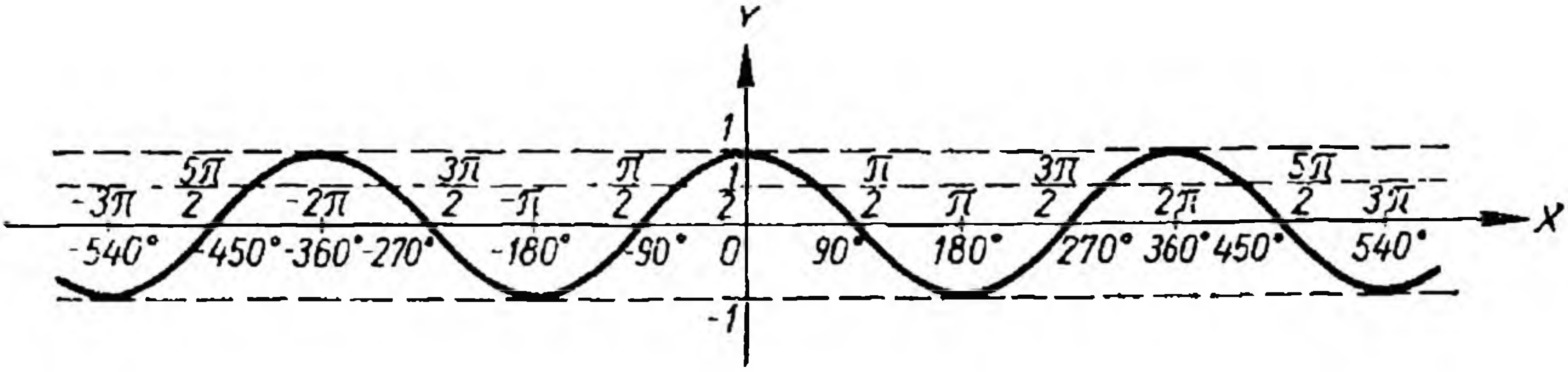


Рис. 48

5) Проиллюстрировать на графике, что не существует значений аргумента x, при которых функция $\cos x$ была равна 2.

Простейшие преобразования косинусоиды

1098. Пользуясь указаниями задачи 1089, исследовать следующие функции и построить их графики:

1) $y=0{,}5\cos x$; 2) $y=\cos x-1$; 3) $y=\cos x+2$;

4) $y=-\cos x$; 5) $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; 6) $y=\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$;

7) $y=\cos 3x+1$.

1099. Описать вид и положение относительно координатных осей графиков следующих функций:

1) $y=\cos x+b$, если: а) $b>0$; б) $b<0$;

2) $y=a\cos x$, если: а) $|a|>1$; б) $|a|<1$; в) $a<0$;

3) $y=\cos mx$, если: а) $|m|>1$; б) $|m|<1$; в) $m<0$;

4) $y=\cos(x+n)$, если: а) $n>0$; б) $n<0$.

Лабораторная работа № 5

1. Пользуясь шаблонами (рис. 46), построить графики функций:

1) $y=\cos x-1$; 2) $y=1-\cos x$;

3) $y=\cos\frac{x}{2}+1$; 4) $y=\frac{\cos x}{2}$;

5) $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 6) $y=1-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

II. При помощи шаблонов (лабораторная работа № 4) найти с точностью до 0,01 корни следующих уравнений:

1) $\cos 2x = x^2$; 2) $\cos x = \frac{x}{\pi} + 1$;

3) $\pi(\cos x + 1) = 2|x|$; 4) $\cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) - x = 0$;

5) $x + 2\cos x = 1$; 6) $\cos\left(x + \frac{1}{2}\right) - x^{-1} = 3$.

Построение тангенсоиды. Свойства тангенса

1100. 1) Пользуясь таблицей тангенса, найти (с точностью до 0,01) приближенные значения функции $y = \operatorname{tg} x$ при $x = 0$; $\frac{\pi}{12}(\approx 0{,}26)$; $\frac{\pi}{6}(\approx 0{,}52)$; $\frac{\pi}{4}(\approx 0{,}78)$; ...; $\pi(\approx 3{,}14)$.

Полученные данные занести в таблицу:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$\operatorname{tg} x$													

2) По данным таблицы построить график функции $y = \operatorname{tg} x$ (за единицу масштаба принять отрезок, равный 1 *см*).

3) Найти по графику с точностью до 0,1 значения: а) $\operatorname{tg} 1$; б) $\operatorname{tg} 0{,}4$; в) $\operatorname{tg} 1{,}7$; г) $\operatorname{tg} 2{,}5$; д) $\operatorname{arctg} 3$; е) $\operatorname{arctg} 0{,}8$.

4) Показать по таблице и на графике, что тангенс возрастает неравномерно.

1101. Построить схематически тангенсоиду на открытом интервале $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. При построении: 1) отметить на оси абсцисс точки, соответствующие числам $-1{,}5\pi$; $-\pi$; $-0{,}5\pi$; $0{,}5\pi$; π; $1{,}5\pi$ (за единицу масштаба принять отрезок, равный 1 *см*); 2) через точки $(-1{,}5\pi; 0)$; $(-0{,}5\pi; 0)$; $(0{,}5\pi; 0)$ и $(1{,}5\pi; 0)$ провести (пунктиром) прямые, параллельные оси ординат; 3) отметить точки тангенсоиды с ординатами ± 1; 4) вычертить (от руки) тангенсоиду.

1102. Пользуясь схематическим графиком функции $y = \operatorname{tg} x$ (задача 1101), выполнить следующие упражнения:

1) Указать интервалы, в которых функция принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения.

2) Определить, при каких значениях x на замкнутом интервале $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функция $y = \operatorname{tg} x$: а) убывает; б) возрастает; в) принимает значение, равное нулю; г) теряет смысл. Выразить формулой множество таких значений x, при которых $y = \operatorname{tg} x$ теряет смысл.

3) Убедиться, что каждому допустимому значению аргумента x соответствует только одно значение функции.

4) Проиллюстрировать на графике, что функция $y=\operatorname{tg} x$ есть периодическая функция с периодом π, т. е. $\operatorname{tg}(x+\pi k)=\operatorname{tg} x$.

5) Показать, что каждому значению функции y соответствует бесчисленное множество определенных значений аргумента x.

6) Решить неравенства: а) $\operatorname{tg} x > -1$; б) $|\operatorname{tg} x| < 1$.

Лабораторная работа № 6

1) Из плотного картона изготовить шаблон для вычерчивания графика функции $y=\operatorname{tg} x$ (за масштабную единицу принять отрезок, равный 1 *см*).

2) При помощи шаблона вычертить графики следующих функций:

а) $y=\operatorname{tg} x+1$; б) $y=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; в) $y=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$;

г) $y=-\operatorname{tg} x$; д) $y=-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

1103. Построить на одном чертеже графики функций:

$$y=x; \quad y=\sin x \quad \text{и} \quad y=\operatorname{tg} x, \quad \text{если} \quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Пользуясь чертежом, проиллюстрировать неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Построение котангенсоиды. Свойства котангенса

1104. 1) Доказать соотношение

$$\operatorname{ctg} x=-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

2) Каким преобразованиям надо подвергнуть обыкновенную тангенсоиду $y=\operatorname{tg} x$, чтобы получить график функции $y=\operatorname{ctg} x$ (котангенсоиду).

3) Имеет ли котангенсоида ось или центр симметрии?

1105. Построить схематически на открытом интервале $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ график функции $y=\operatorname{ctg} x$ и решить по графику следующие упражнения:

1) Найти интервалы, в которых функция принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения.

2) Определить, при каких значениях x в открытом интервале $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ функция: а) убывает; б) возрастает; в) принимает значение, равное нулю; г) не существует. Выразить формулой множество таких значений x, для которых $\operatorname{ctg} x$ не существует.

3) Проиллюстрировать на графике, что функция $y=\operatorname{ctg} x$ есть периодическая функция с периодом π, т. е. $\operatorname{ctg}(x+\pi k)=\operatorname{ctg} x$.

4) Показать на графике значения $\operatorname{ctg} 1$; $\operatorname{ctg}(-2)$; $\operatorname{arcctg} 0{,}5$; $\operatorname{arcctg}(-1)$.

5) Решить неравенства: а) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$; б) $\operatorname{ctg} x < -1$.

Лабораторная работа № 7

Пользуясь шаблоном для вычерчивания тангенсоиды, построить графики следующих функций:

1) $y = \operatorname{ctg} x$; 2) $y = -\operatorname{ctg} x$; 3) $y = 1 + \operatorname{ctg} x$;

4) $y = 1 - \operatorname{ctg} x$; 5) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; 6) $y = 2 + \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

§ 23. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ АРГУМЕНТА

1106. Существует ли такое значение угла α, для которого:

1) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, а $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; 2) $\sin\alpha = 0{,}4$, а $\cos\alpha = 0{,}87$;

3) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, а $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$; 4) $\cos\alpha = \frac{20}{101}$, а $\operatorname{tg}\alpha = 4{,}95$?

1107. Выразить тригонометрические функции угла α через 1) $\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha$ и полученные зависимости свести в одну таблицу.

1108. Найти значения тригонометрических функций угла α по заданному значению одной из них. Вычисления произвести двумя способами: а) по таблицам; б) применяя тригонометрические тождества.

1) Дано: $\sin\alpha = 0{,}8$, $0° < \alpha < 90°$.
Определить $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

2) Дано: $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $90° < \alpha < 180°$.
Определить $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

3) Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 3\frac{15}{16}$, $180° < \alpha < 270°$.
Определить $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

4) Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{9}{40}$, $270° < \alpha < 360°$.
Определить $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

1109. Найти значения всех тригонометрических функций угла α, если известно, что:

1) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha = -0{,}6$; 3) $\cos\alpha = \frac{45}{53}$;

4) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$; 5) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}225$; 6) $\operatorname{tg}\alpha = -3\frac{3}{7}$;

7) $\operatorname{ctg}\alpha = 1\frac{7}{8}$; 8) $\operatorname{ctg}\alpha = -2{,}4$; 9) $\sin\alpha = \frac{m}{n}$, $0 < m < n$.

1110. Какие значения могут принимать $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ в задаче 972?

1111. Полагая $0° < \alpha < 90°$, вычислить значение тригонометрической функции угла α по заданному значению другой тригонометрической функции того же угла:

1) $\sin\alpha = 0{,}28$; вычислить $\cos\alpha$; 2) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; вычислить $\operatorname{tg}\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$; вычислить $\sin\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{8}{15}$; вычислить $\sin\alpha$.

1112. Считая $90° < \alpha < 180°$, вычислить значение тригонометрической функции угла α по заданному значению другой тригонометрической функции того же угла.

1) $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}75$; вычислить $\sin\alpha$;

2) $\sin\alpha = \frac{15}{17}$; вычислить $\cos\alpha$;

3) $\sin\alpha = \frac{20}{101}$; вычислить $\operatorname{tg}\alpha$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha = -0{,}5$; вычислить $\cos\alpha$.

1113. Положив $180° < \alpha < 270°$, вычислить значение тригонометрической функции угла α по заданному значению другой тригонометрической функции того же угла:

1) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$; вычислить $\sin\alpha$;

2) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$; вычислить $\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = 1\frac{7}{8}$; вычислить $\cos\alpha$;

4) $\sin\alpha = -\sqrt{1-a^2}$; вычислить $\cos\alpha$.

Каким должно быть число a?

1114. Принимая $270° < \alpha < 360°$, вычислить значения тригонометрических функций угла α по заданному значению другой тригонометрической функции того же угла:

1) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{12}$; вычислить $\sin\alpha$;

2) $\cos\alpha = 0{,}5\sqrt{3}$; вычислить $\operatorname{tg}\alpha$;

3) $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$; вычислить $\operatorname{tg}\alpha$;

4) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$; вычислить $\cos\alpha$.

1115. Дано: $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$, $\cos\alpha = 1 + a$. Вычислить $\sin\alpha$. Каким должно быть число a?

Вычислить.

1116. 1) $\sin(\arcsin 0{,}34)$; 2) $\cos(\arcsin 0{,}6)$;

3) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{21}{29}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{15}{17}\right)$.

1117. 1) $\cos\left(\arccos\frac{1}{\pi}\right)$; 2) $\sin[\arccos(-0{,}28)]$;
3) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{5}{13}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}(\arccos 0{,}8)$.

1118. 1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\sqrt{5})$; 2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 3)$;
3) $\sin\left[\operatorname{arctg}\left(-1\frac{7}{8}\right)\right]$; 4) $\cos(\operatorname{arctg} 0{,}225)$.

1119. 1) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}\pi)$; 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 3{,}5)$;
3) $\sin\left(\operatorname{arcctg}\frac{11}{60}\right)$; 4) $\cos[\operatorname{arcctg}(-1{,}05)]$.

1120*. Выразить через арксинус:
1) $\arccos\frac{12}{13}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{8}{15}$; 3) $\operatorname{arcctg}\frac{20}{21}$.

1121*. Выразить через арккосинус:
1) $\arcsin\frac{33}{65}$; 2) $\operatorname{arctg} 0{,}75$; 3) $\operatorname{arcctg}\frac{65}{72}$.

1122*. Выразить через арктангенс:
1) $\arcsin\frac{35}{37}$; 2) $\arccos\frac{11}{61}$; 3) $\operatorname{arcctg} 3\frac{15}{16}$.

1123*. Выразить через арккотангенс:
1) $\arcsin\frac{9}{41}$; 2) $\arccos\frac{5}{13}$; 3) $\operatorname{arctg} 1\frac{7}{8}$.

Упростить следующие выражения и указать в каждом случае допустимые значения для аргументов.

1124. 1) $1-\sin^2\alpha$; 2) $1-\cos^2\alpha$; 3) $\sin^2\beta-1$; 4) $\cos^2 2\alpha-1$.

1125. 1) $(1+\sin x)(1-\sin x)$; 2) $\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)$.

1126. 1) $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+1$; 2) $1-\sin^2 3\alpha-\cos^2 3\alpha$.

1127. 1) $\sin^2 t+\cos^2 t+\operatorname{tg}^2 y$; 2) $\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha+\operatorname{ctg}^2 5\alpha$.

1128. 1) $\frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x}+\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{tg}\beta$; 2) $\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{ctg}\gamma}+\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x$.

1129. 1) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$; 2) $1-\frac{1}{\sin^2\beta}$.

1130. 1) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 2) $\frac{\cos^2 2\alpha-1}{\sin^2 2\alpha-1}$.

1131. 1) $\frac{\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha}$; 2) $\frac{\sin 3\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos 3\alpha\cdot\cos\alpha}$.

1132. 1) $\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

1133. 1) $\sin(\alpha+\beta):\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$; 2) $\cos(\alpha-\beta):\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$.

1134. 1) $\sin\alpha+\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\sin\beta\cdot\operatorname{ctg}\beta+\cos\beta$.

1135. 1) $\dfrac{1}{\cos^2\varphi} - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi$; 2) $\cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

1136. 1) $\dfrac{1}{\cos^2 a} - \operatorname{tg}^2 a\,(\cos^2 a + 1)$; 2) $(1+\sin^2 b)\cdot\operatorname{ctg}^2 b - \dfrac{1}{\sin^2 b}$.

1137. 1) $\dfrac{\sin^2\pi\alpha}{1+\cos\pi\alpha}$; 2) $\dfrac{\cos^2 0{,}5\pi\alpha}{\sin 0{,}5\pi\alpha - 1}$.

1138. 1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; 2) $\dfrac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x} + \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x}$.

1139. 1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha-\cos\alpha)^2$;

2) $(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}\beta)^2 - (\operatorname{tg}\beta-\operatorname{ctg}\beta)^2$.

1140. 1) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)$;

2) $\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+2)$.

1141. 1) $\dfrac{2\sin^2 2t - 1}{\sin 2t + \cos 2t}$; 2) $\dfrac{1-2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\varphi}{2}}$.

1142. 1) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{\cos b}{1+\sin b} + \dfrac{\cos b}{1-\sin b}$.

1143. 1) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2 + (1-\operatorname{tg}\alpha)^2$; 2) $(1+\operatorname{ctg}\beta)^2 + (1-\operatorname{ctg}\beta)^2$.

1144. 1) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

1145. 1) $\operatorname{ctg} x + \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$; 2) $\operatorname{tg} x + \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

1146. 1) $\sqrt{1-\cos^2 3\alpha}$; 2) $\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

1147. 1) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$;

2) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.

1148. $\left(\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)\cdot\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right)$.

Вычислить.

1149. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

1150. $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$, если: 1) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}(2)$.

1151. $(\operatorname{ctg}\alpha + \cos\alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha$, если $\alpha = 50^\circ$ (по таблице).

1152. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ при $\alpha = \dfrac{2}{9}\pi$ (по таблице).

1153.* Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha = p$.

Найти: 1) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha$;
3) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$; 4) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$.

1154*. Дано: $\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{ctg}\varphi = m$.

Определить: 1) $\operatorname{tg}^2\varphi+\operatorname{ctg}^2\varphi$; 2) $\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{ctg}\varphi$; 3) $\operatorname{tg}^3\varphi+\operatorname{ctg}^3\varphi$.

1155*. Вычислить $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$, если $\sin x\cdot\cos x=0{,}4$.

1156*. Вычислить $\operatorname{tg}^2 y+\frac{1}{\sin y}\cdot\frac{1}{\cos y}+\operatorname{ctg}^2 y$, если $\operatorname{tg} y+\operatorname{ctg} y=5$.

1157. Доказать неравенство при $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

1) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\geqslant 2$; 2) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\geqslant 2$.

В каждом случае установить, при каком значении α имеет место равенство.

1158. Проверить справедливость равенства $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=2-\operatorname{ctg}\alpha$ при $\alpha=30^\circ$ и $\alpha=150^\circ$. Можно ли назвать это равенство тригонометрическим тождеством?

1159. Проверить следующие равенства и установить, какие значения может принимать α:

1) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$;

2) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$.

1160. Проверить следующие равенства и установить, какие значения для α недопустимы:

1) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

2) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=(1+\sin\alpha)\cdot(1+\operatorname{ctg}\alpha)$.

1161. Проверить равенство и указать допустимые значения для аргументов α и β:

$$\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta}.$$

1162. Показать, что величина выражения $(a\sin\beta+b\cos\beta)^2+(b\sin\beta-a\cos\beta)^2$ не зависит от величины угла β.

1163. Выразить: 1) $\sin^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ через $\cos\alpha$;

2) $\cos^4\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$ через $\sin\alpha$.

Доказать тождества и указать в каждом случае допустимые значения для аргументов.

1164. 1) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$;

2) $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=1$.

1165. 1) $\frac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x}{1+\sin x}$; 2) $\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}=\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

1166. 1) $1+\sin\alpha=\frac{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=1+\cos\alpha$.

1167. 1) $(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)+(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta)=0$;

2) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)-\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\cos\beta}\right)=0$.

1168. 1) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\sin^2\alpha$; 2) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\cos^2\alpha$.

1169. 1) $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\frac{1+\operatorname{ctg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\gamma}=-\operatorname{ctg}\gamma$.

1170. 1) $\frac{(\sin z+\cos z)^2-1}{\operatorname{ctg} z-\sin z\cdot\cos z}=2\operatorname{tg}^2 z$; 2) $\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\operatorname{tg} x-\sin x\cdot\cos x}=2\operatorname{ctg}^2 x$.

1171. 1) $\sin^3\alpha\cdot(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha\cdot(1+\operatorname{tg}\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$;

2) $1-(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

1172. Доказать тождества:

1) $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=-2\operatorname{tg}\alpha,\ 90^\circ<\alpha<180^\circ$;

2) $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=2\operatorname{ctg}\alpha,\ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

1173. Исключить α из системы равенств:

1) $\begin{cases} x=3\cos\alpha, \\ y=3\sin\alpha; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\frac{5}{\sin\alpha}, \\ y=4\operatorname{ctg}\alpha; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin\alpha+\cos\alpha=x, \\ \sin\alpha\cdot\cos\alpha=y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha=x, \\ \operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha=x, \\ \frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha=y. \end{cases}$

1174*. Исключить α и β из системы равенств:

1) $\begin{cases} x\sin^2\alpha+y\cos^2\alpha=1, \\ y\sin^2\beta+x\cos^2\beta=1, \\ x\operatorname{tg}\alpha-y\operatorname{tg}\beta=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x\cos\alpha+y\sin\beta=a, \\ x\sin\beta-y\cos\alpha=b, \\ (x^2+y^2)(\sin^2\alpha+\cos^2\beta)=2ab. \end{cases}$

1175. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y=3\sin^2 x+2\cos^2 x$; 2) $y=\cos^2 x-2\sin^2 x$.

1176. При каких значениях x на замкнутом интервале $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ следующие функции принимают наибольшее и наименьшее значения и какие именно:

1) $y=\sin^2(\cos x)+0{,}5\cos^2(\cos x)$;

2) $y=\sin^2(\sin x)-2\cos^2(\sin x)$?

1177*. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=a\sin^2 x+b\cos^2 x.$$

1178*. Доказать тождество $\arcsin m=\arccos\sqrt{1-m^2},\ 0\leqslant m\leqslant 1$.

Как изменится эта формула для отрицательных значений m? Привести геометрические пояснения в обоих случаях.

1179*. Доказать тождество

$$\arccos m = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-m^2}, & \text{если } 0 \leqslant m \leqslant 1; \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-m^2}, & \text{если } -1 \leqslant m \leqslant 0. \end{cases}$$

1180*. Доказать тождество

$$\operatorname{arctg} m = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \frac{1}{m}, & \text{если } m > 0; \\ \operatorname{arcctg} \frac{1}{m} - \pi, & \text{если } m < 0. \end{cases}$$

1181. Решить тригонометрические уравнения как алгебраические относительно данной тригонометрической функции:

1) $\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$; 2) $2\cos^2 x = 3\cos x + 2$;
3) $2\sin^2 x - \sin x = 0$; 4) $\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3} = (1+\sqrt{3}) \cdot \operatorname{tg} x$;
5) $\cos x(2\cos x + 1) = 1$; 6) $\operatorname{tg}^4 x - 5\operatorname{tg}^2 x + 4 = 0$.

1182. Решить следующие уравнения, преобразовав их в алгебраические относительно какой-либо тригонометрической функции:

1) $8\sin^2 x - 2\cos x = 5$; 2) $3\sin x = 2\cos^2 x$;
3) $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 4$; 4) $\sin^2 x - \sin^4 x + \cos^4 x = 1$;
5) $\sin^6 x + \cos^2 x + 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \sin x$.

1183. Решить тригонометрические уравнения разложением левой части уравнения на множители:

1) $\sin^2 x - \sin x = 0$; 2) $0{,}5\cos^2 x + \cos x = 0$;
3) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 0$; 4) $\operatorname{ctg}^3 x = \operatorname{ctg} x$;
5) $1 + \cos x = \sin x + \operatorname{tg} x$; 6) $\sin x - \cos x + 2\sin x \cdot \cos x = 0{,}5$.

1184. Решить тригонометрические уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$:

1) $\sin x = \cos x$; 2) $5\sin x - 2\cos x = 0$;
3) $\sin^2 x = 3\cos^2 x$; 4) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$;
5) $\sin^2 x = 3\sin x \cdot \cos x$;
6) $4\sin^2 x \cdot \cos x - 4\sin x \cdot \cos^2 x + \cos^3 x = 0$.

1185. Решить тригонометрические уравнения, преобразовав их в однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$:

1) $\sin x \cdot \operatorname{ctg} x + \cos x \cdot \operatorname{tg} x = 0$;
2) $\sin^3 x \cdot (1 - \operatorname{ctg} x) - \cos^3 x \cdot (1 - \operatorname{tg} x) = 0$;
3) $\frac{1}{\cos x} = 4\sin x + 6\cos x$;
4) $\sin x - \cos x - 4\cos^2 x \cdot \sin x = 4\sin^3 x$;
5) $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$;
6) $2\sin^2 x + (\sqrt{3} + 1)(\cos x - \sin x)\cos x = 1$.

1186. Решить тригонометрические уравнения:

1) $2\sin x + \cos x \cdot \operatorname{ctg} x + 2 = 0$;

2) $\sin x \cdot \cos x + 2 = \cos x + 2\sin x$;

3) $\sin^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 1$;

4) $2(1 + \sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - \cos x = 0$;

5) $1 - \dfrac{\sin^2 x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} - \dfrac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0$.

§ 24. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

1187. Дан вектор $\overrightarrow{OM} = \{x;\ y\}$, образующий угол α с осью абсцисс (рис. 49).

1) Доказать, что при повороте этого вектора вокруг точки 0 на угол $\frac{\pi}{2}$ получается вектор $\overrightarrow{OM_1} = \{-y;\ x\}$, абсцисса которого равна ординате исходного вектора, взятой с противоположным знаком, а ордината равна абсциссе данного вектора.

2) Используя доказанное свойство, вывести формулы приведения для углов вида: $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$; $\pi \pm \alpha$; $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ и $2\pi - \alpha$.

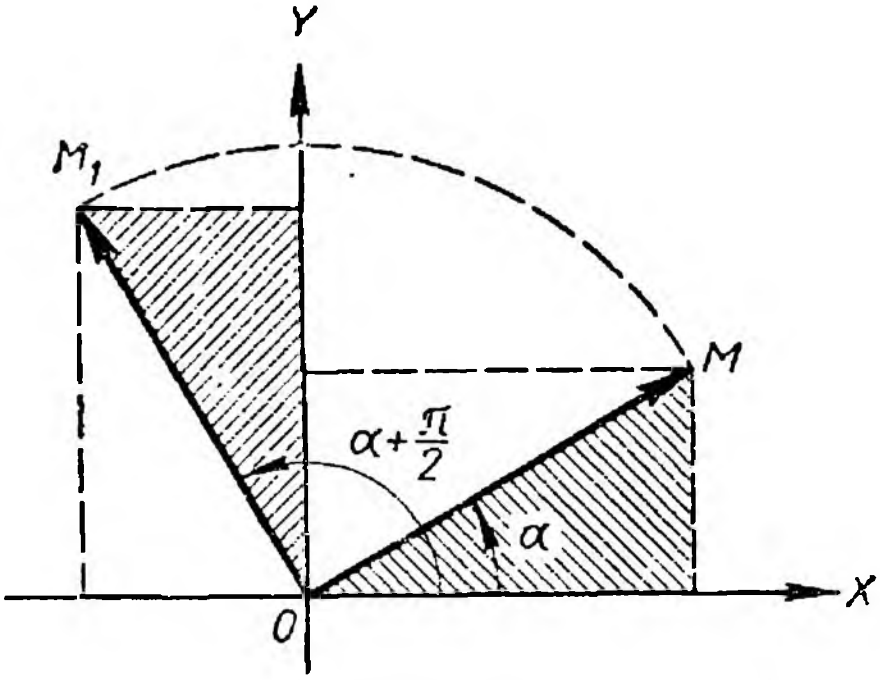


Рис. 49

1188. 1) Построить график функции $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

2) Сравнить полученный результат с графиком функции $y = \cos x$ и убедиться, что равенство $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ является тождеством.

1189. С помощью графиков доказать тождество $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

1190. Дать графическое истолкование тождествам:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$.

1191. На одном и том же чертеже построить графики функций: $y = \sin x$ и $y = \cos x$ (рис. 50).

Сопоставляя построенные графики, проиллюстрировать соотношения:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

Следующие функции заменить функциями дополнительного аргумента:

1192. 1) $\cos 65^\circ$; 2) $\cos 0{,}7\pi$; 3) $\cos(45^\circ+\alpha)$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)$.

1193. 1) $\sin 78^\circ$; 2) $\sin 0{,}6\pi$; 3) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; 4) $\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

1194. 1) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; 3) $\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha+84^\circ}{2}$.

1195. 1) $\operatorname{tg} 55^\circ$; 2) $\operatorname{tg}\frac{1}{3}\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; 4) $\operatorname{tg}(90^\circ-2\alpha)$.

1196. Сумма косинусов дополнительных аргументов равна m. Найти: 1) сумму квадратов синусов этих аргументов; 2) произведение синусов этих аргументов.

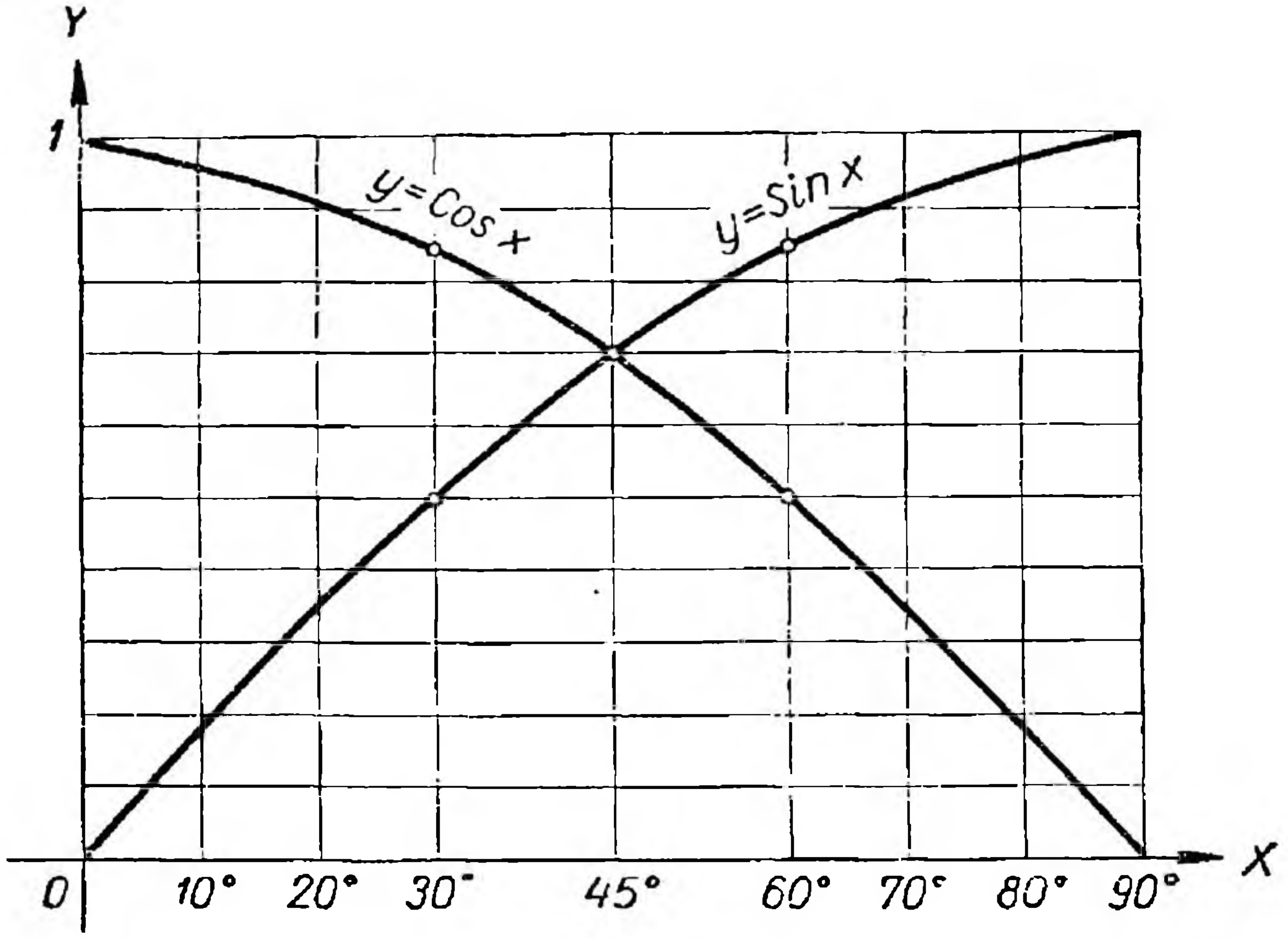


Рис. 50

1197. Дано: $\cos(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ-\alpha)=n$.

Определить: 1) $\cos^2(45^\circ+\alpha)+\cos^2(45^\circ-\alpha)$;

2) $\cos(45^\circ+\alpha)\cos(45^\circ-\alpha)$.

1198. Дано: $\operatorname{ctg}(60^\circ-2\alpha)+\operatorname{ctg}(30^\circ+2\alpha)=q$.

Определить $\operatorname{ctg}^2(60^\circ-2\alpha)+\operatorname{ctg}^2(30^\circ+2\alpha)$.

1199. Дано: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=p$.

Определить $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

1200. Вычислить:

1) $\operatorname{tg} 41^\circ\cdot\operatorname{tg} 42^\circ\cdot\operatorname{tg} 43^\circ\cdot\ \ldots\ \cdot\operatorname{tg} 49^\circ$;

2) $\operatorname{ctg} 5^\circ\cdot\operatorname{ctg} 15^\circ\cdot\operatorname{ctg} 25^\circ\cdot\ \ldots\ \cdot\operatorname{ctg} 75^\circ\cdot\operatorname{ctg} 85^\circ$;

3) $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B$, где A и B — острые углы прямоугольного треугольника;

4) $(\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ + \sin 40^\circ) -$

$- (\cos 50^\circ + \cos 60^\circ + \cos 70^\circ + \cos 80^\circ)$.

1201. Путем сравнения графиков функций а) $\cos(\pi + x)$ и $-\cos x$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ и $-\sin x$ проиллюстрировать следующие формулы приведения:

1) $\cos(\pi + x) = -\cos x$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$.

1202. Дать графическое истолкование каждому из следующих тождеств:

1) $\sin(\pi + x) = -\sin x$; 2) $\cos(\pi - x) = -\cos x$;
3) $\operatorname{ctg}(\pi + x) = \operatorname{ctg} x$; 4) $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$;
5) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$; 6) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg} x$;
7) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos x$; 8) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$.

1203. Показать графически, что соотношение $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$ не является тождеством. Написать общую формулу углов x, удовлетворяющих этому соотношению.

Доказать формулы.

1204. $$\sin(x + k \cdot \pi) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } k = 2n; \\ -\sin x, & \text{если } k = 2n + 1. \end{cases}$$

1205. $$\cos(x + k \cdot \pi) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } k = 2n; \\ -\cos x, & \text{если } k = 2n + 1. \end{cases}$$

1206. $$\sin x + \sin(x + \pi) + \sin(x + 2\pi) + \sin(x + 3\pi) + \ldots$$
$$\ldots + \sin(x + k \cdot \pi) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } k = 2n; \\ 0, & \text{если } k = 2n + 1. \end{cases}$$

1207. $$\cos x + \cos(x + \pi) + \cos(x + 2\pi) + \cos(x + 3\pi) + \ldots$$
$$\ldots + \cos(x + k \cdot \pi) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } k = 2n; \\ 0, & \text{если } k = 2n + 1. \end{cases}$$

1208. Вычислить:

1) $\cos 10\pi$; 2) $\sin 7\pi$; 3) $\sin 930^\circ$;
4) $\cos(-480^\circ)$; 5) $\cos 15{,}5\pi$; 6) $\sin\left(-7\frac{5}{6}\pi\right)$.

1209. Привести к функциям положительных углов, меньших 45°:

1) $\sin 78^\circ$; 2) $\cos 123^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 174^\circ$; 4) $\sin 216^\circ$;
5) $\operatorname{ctg} 194^\circ$; 6) $\operatorname{tg}(-218^\circ)$; 7) $\cos(-1961^\circ)$; 8) $\sin 5000^\circ$;
9) $\operatorname{tg} 1{,}2\pi$; 10) $\cos 8$.

1210. Привести к функциям острых положительных углов, сохранив наименование приводимой функции:

1) $\sin 152^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 345^\circ$; 3) $\cos 317^\circ$; 4) $\operatorname{ctg}(-213^\circ)$;
5) $\sin(-592^\circ)$; 6) $\sin 1{,}9\pi$; 7) $\operatorname{ctg} 2$; 8) $\sin 6$.

1211. Привести к функциям острых положительных углов, изменив наименование функции на сходное:

1) $\operatorname{tg} 278^\circ$; 2) $\cos 400^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 424^\circ$; 4) $\sin 3108^\circ$;
5) $\cos(-969^\circ)$; 6) $\operatorname{ctg}(-2814^\circ)$; 7) $\sin(-2005^\circ)$; 8) $\operatorname{tg} 10$.

1212. Привести к наименьшему положительному аргументу:

1) $\cos 1501^\circ$; 2) $\sin(-824^\circ)$; 3) $\operatorname{tg}(-700^\circ)$;
4) $\operatorname{ctg}(-0{,}7\pi)$; 5) $\cos 6{,}5$.

1213. Назвать несколько таких положительных и отрицательных углов, чтобы:

1) синус каждого из них был равен $\sin 23^\circ$;
2) косинус каждого из них был равен $\cos 68^\circ$;
3) тангенс каждого из них был равен $\operatorname{tg} 59^\circ$;
4) котангенс каждого из них был равен $\operatorname{ctg} 38^\circ$;
5) косинус каждого из них был равен $\sin 35^\circ$;
6) тангенс каждого из них был равен $\operatorname{ctg} 25^\circ$.

1214. Вычислить:

1) $\sin 540^\circ$; 2) $\sin 210^\circ$; 3) $\cos 330^\circ$; 4) $\cos(-855^\circ)$;
5) $\operatorname{tg} 300^\circ$; 6) $\cos 240^\circ$; 7) $\operatorname{tg} 3810^\circ$; 8) $\operatorname{ctg} 2{,}5\pi$;
9) $\cos 2\frac{2}{3}\pi$; 10) $\sin 7\frac{5}{6}\pi$.

1215. Найти по таблицам:

1) $\cos 1482^\circ$; 2) $\cos(-3301^\circ)$; 3) $\sin 2128^\circ$; 4) $\operatorname{tg}(-5188^\circ)$;
5) $\sin(-2005^\circ)$; 6) $\operatorname{ctg} 10\,000^\circ$; 7) $\operatorname{tg} 10{,}1$; 8) $\sin 25$.

Упростить выражения.

1216. 1) $\operatorname{tg}(360^\circ-\alpha)+\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)+\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)$;
2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)$.

1217. 1) $\sin\alpha-\sin(\alpha-90^\circ)-\sin(\alpha-180^\circ)-\sin(\alpha-270^\circ)-\sin(\alpha-360^\circ)$;
2) $\cos(\alpha+45^\circ)+\cos(\alpha+135^\circ)+\cos(\alpha+225^\circ)+\cos(\alpha+315^\circ)$.

1218. 1) $\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

1219. 1) $\sin(90^\circ+\alpha)\cdot\sin(180^\circ-\alpha)\cdot[\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}(270^\circ-\alpha)]$;
2) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\sin^2(\alpha-\pi)\sin^2(\alpha+\pi)-$
$-\cos^2(\alpha+\pi)\cdot\cos^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$.

1220. 1) $\sin 20^\circ \cdot \cos 70^\circ + \sin^2 110^\circ \cdot \cos^2 250^\circ + \sin^2 290^\circ \cdot \cos^2 340^\circ$;

2) $(\sin 75^\circ + \sin 100^\circ) \cdot (\sin 260^\circ - \sin 285^\circ) +$
$+ (\sin 165^\circ + \sin 190^\circ)(\cos 75^\circ - \cos 100^\circ)$.

1221. 1) $\operatorname{tg} 100^\circ + \dfrac{\sin 530^\circ}{1 + \sin 640^\circ}$; 2) $\operatorname{ctg} 0{,}4\pi - \dfrac{\cos 1{,}1\pi}{1 - \cos 0{,}6\pi}$.

1222. 1) $1 - \sin(x - 2\pi) \cdot \cos\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right) -$
$- \operatorname{tg}(\pi - x) \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) - 2\cos^2(\pi + x)$;

2) $\sin^2(\pi - x) + \operatorname{tg}^2(\pi - x) \cdot \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) \cdot \cos(x - 2\pi)$.

1223. $\left(\dfrac{\operatorname{tg}^2 590^\circ}{\cos^2 320^\circ} + \dfrac{\sin 111^\circ}{\cos 159^\circ}\right) \cdot \left(\dfrac{\cos 279^\circ}{\sin 549^\circ} + \dfrac{\operatorname{ctg}^2 950^\circ}{\sin^2 400^\circ}\right)$.

1224. Вычислить сумму:

1) $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \ldots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \ldots + \operatorname{tg} 160^\circ + \operatorname{tg} 180^\circ$;

3) $\sin 0^\circ + \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \ldots + \sin 359^\circ + \sin 360^\circ$;

4) $\operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ + \ldots + \operatorname{ctg} 165^\circ$.

Доказать тождества.

1225. 1) $\cos(45^\circ + \alpha) = \sin(45^\circ - \alpha)$; 2) $\cos(45^\circ - \alpha) = \sin(45^\circ + \alpha)$.

1226. 1) $\operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)$; 2) $\operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$.

1227. 1) $\sin(\alpha - \pi) \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \pi) + \dfrac{1}{\cos(\alpha - 2\pi)} = \cos\alpha$;

2) $\sin(2\pi + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(3\pi + \alpha) - \cos(2\pi - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(3\pi - \alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$.

1228. 1) $\sin 395^\circ \cdot \sin 505^\circ + \cos 575^\circ \cdot \cos 865^\circ + \operatorname{tg} 606^\circ \cdot \operatorname{tg} 1104^\circ = 2$;

2) $\sin 405^\circ \cdot \cos 675^\circ + \operatorname{tg} 562^\circ \cdot \operatorname{tg} 788^\circ + \dfrac{1}{\cos 660^\circ} \cdot \dfrac{1}{\cos 1200^\circ} = -2{,}5$.

1229. 1) $\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x)\right]^2 + \left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi - x)\right]^2 = 2$;

2) $\left[\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right]^2 + \left[\operatorname{ctg}\dfrac{5\pi}{4} + \operatorname{ctg}(\pi - x)\right]^2 = \dfrac{2}{\sin^2 x}$.

1230. 1) $\dfrac{\sin(x - \pi) \cdot \cos(x - 2\pi) \cdot \sin(2\pi - x)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - x) \cdot \operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)} = \sin^2 x$;

2) $\dfrac{\sin(\pi + x) \cdot \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) \cdot \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \operatorname{tg}(\pi + x)} = \operatorname{ctg}^2 x$.

1231. 1) $\sin(2\pi - \varphi) \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \varphi\right) - \cos(\varphi - \pi) - \sin(\varphi - \pi) = \sin\varphi$;

2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \beta\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{2\pi}{3} + \beta\right) \cdot \cos\left(\dfrac{5\pi}{3} + \beta\right) +$
$+ \operatorname{tg}(\pi + \beta) \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \beta\right) = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} - \beta\right)$.

1232. Дано A, B и C — углы треугольника.

Доказать: 1) $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$;

3) $\sin(A+B)=\sin C$; 4) $\cos(A+B)=-\cos C$.

1233. Вычислить:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin 0{,}3\right)$; 2) $\cos\left(\pi+\arccos\frac{3}{7}\right)$;

3) $\sin\left(2\pi-\arccos\frac{5}{13}\right)$; 4) $\operatorname{tg}(2\pi-\operatorname{arcctg} 0{,}5)$;

5) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{3}{5}\right)$; 6) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\operatorname{arctg} 2{,}4\right)$.

1234. Определить $\cos x$, если $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

1235. Косинус одного из углов равен —0,8. Найти синус, косинус и тангенс смежного ему угла.

Решить уравнения.

1236. $\cos(\pi-0{,}5x)+\cos(\pi+0{,}5x)=0$.

1237. $\sin(45^\circ-x)+\cos(45^\circ+x)=1$.

1238. $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)=2$.

1239. $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{ctg}(x+\pi)$.

1240. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi+x)=0$.

1241. $\sin(x-90^\circ)+\sin(x-180^\circ)=0$.

1242. $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=\sqrt{2}$.

1243. $2\operatorname{ctg}(180^\circ-x)-\operatorname{ctg}405^\circ-\operatorname{ctg}(360^\circ-x)=0$.

1244. $\sin(30^\circ+x)-\sin(210^\circ+x)=2\sin 495^\circ$.

1245. $\cos 600^\circ+\cos(x-200^\circ)+\sin(x+250^\circ)=\sin 870^\circ$.

1246. $\sin(x-60^\circ)=\cos(x+30^\circ)$.

1247. $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0{,}5\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

1248. $\operatorname{tg}(202^\circ+x)\cdot\cos 1020^\circ=\sin(-690^\circ)$.

1249*. Найти наименьший положительный угол, удовлетворяющий уравнению $\sin(\cos x)=\cos\frac{5\pi}{3}$ (по таблице).

6

ПРОГРЕССИИ

§ 25. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Общий член числовой последовательности

1250. Общий член числовой последовательности выражается формулой

$$a_n = 2n - 1.$$

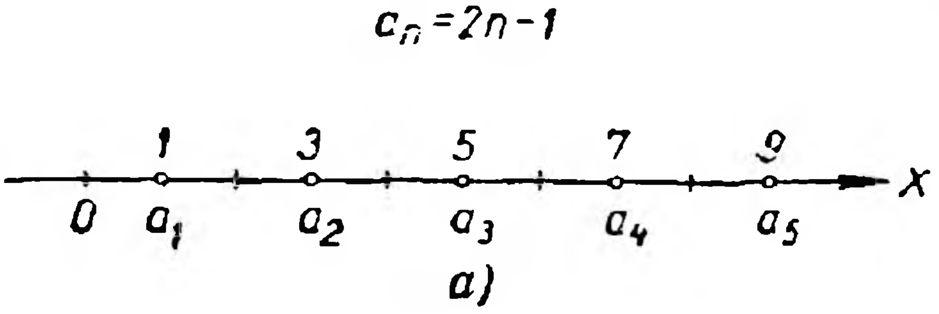
Вычислить первые пять членов этой последовательности и изобразить их: 1) точками числовой оси; 2) точками координатной плоскости (сравнить с рис. 51).

1251. 1) Вычислить первые шесть членов числовой последовательности, общий член которой выражается формулой:

а) $a_n = 2n$; б) $a_n = \frac{1}{n}$;

в) $a_n = \frac{n}{(-1)^n}$; г) $a_n = \frac{n}{n+1}$;

д) $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$; е) $a_n = -n^2 + 1$;



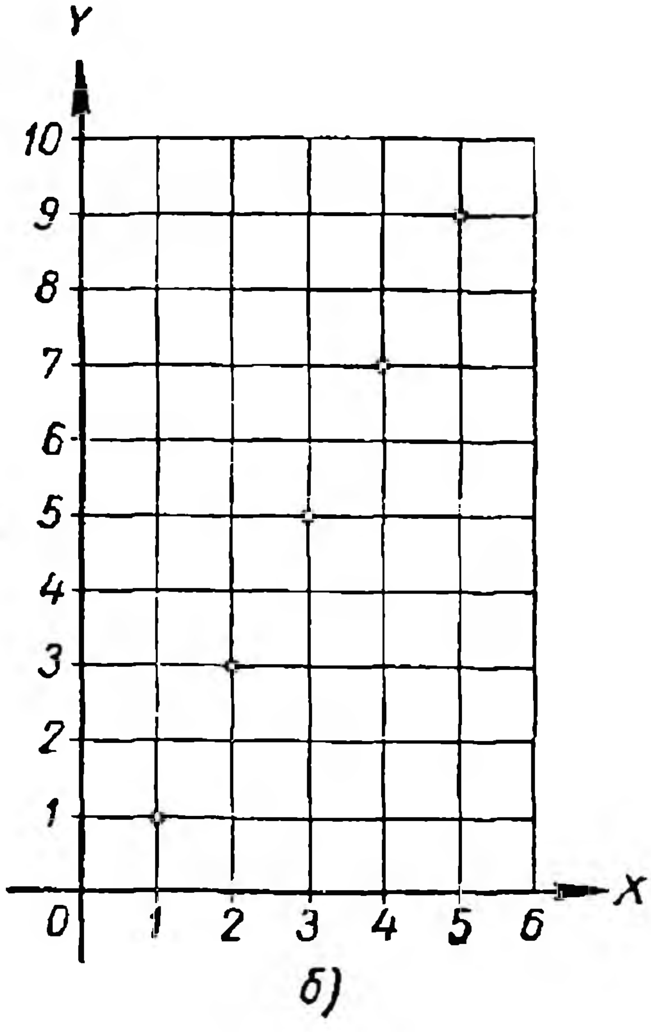


Рис. 51

ж) $a_n = \frac{n+1}{n}$;   з) $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{для четного } n; \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} & \text{для нечетного } n. \end{cases}$

2) Изобразить каждую из указанных числовых последовательностей на чертеже двумя способами.

3) Указать, какие из этих последовательностей являются: а) возрастающими; б) убывающими; в) колеблющимися; г) ограниченными; д) неограниченными.

1252. Можно ли по нескольким первым членам числовой последовательности определить (однозначно) формулу ее общего члена? Ответ подтвердить примерами.

1253. 1) Написать первые десять членов: а) последовательности четных чисел; б) последовательности чисел, обратных числам натурального ряда; в) последовательности квадратов чисел натурального ряда; г) последовательности чисел, которые при делении на 3 дают в остатке единицу.

2) Составить формулу общего члена каждой из указанных последовательностей.

1254. Написать: 1) первые пять членов последовательности приближенных значений $\sqrt{2}$ с точностью до $\frac{1}{10^n}$ по недостатку;

2) последовательности простых чисел, заключенных в натуральном ряду от 1 до 50.

1255. Общий член числовой последовательности выражается формулой

$$a_n = n^2 + 2n + 1.$$

1) Написать восемь первых членов этой последовательности.

2) Являются ли числа 289, 361, 1000, 1225 и 3025 членами этой последовательности, и если являются, то какой порядковый номер имеют?

1256. Написать общий член последовательности натуральных чисел, каждое из которых при делении на 4 дает остаток, равный 3. Установить, являются ли числа 543, 1234 и 3223 членами этой последовательности, и если являются, то какой порядковый номер имеют.

1257. Вычислить первые пять членов числовой последовательности, общий член которой выражается формулой

$$a_n = \frac{8}{n+4} \cdot \cos\frac{\pi n}{2},$$

и построить геометрическое изображение этой последовательности точками числовой оси.

1258. Общий член числовой последовательности $a_n = \frac{2n-1}{3n}$.

1) Найти разность между числом $\frac{2}{3}$ и сотым членом этой последовательности.

2) При каких значениях n справедливы следующие неравенства:

$$\text{а) } \frac{2}{3} - a_n < 10^{-3}; \quad \text{б) } \frac{2}{3} - a_n < 10^{-7}.$$

Предел числовой последовательности

1259. Центральный угол правильного многоугольника, имеющего n сторон, вычисляется по формуле

$$\alpha_n = \frac{360^\circ}{n}.$$

1) Какие значения может принимать буква n в этой формуле?

2) Вычислить с точностью до $1'$ значения семи первых членов последовательности α_n.

3) Показать, что значения величины центрального угла при неограниченном увеличении числа сторон многоугольника образуют убывающую числовую последовательность, ограниченную снизу.

4) При каких значениях n величина центрального угла будет меньше 1°; $1'$; $1''$?

1260. Внутренний угол правильного многоугольника, имеющего n сторон, вычисляется по формуле

$$\beta_n = \frac{180^\circ (n-2)}{n}.$$

1) Вычислить с точностью до $1'$ значения шести первых членов числовой последовательности β_n.

2) Показать, что значения величины внутреннего угла при неограниченном увеличении числа сторон (n) многоугольника образуют возрастающую числовую последовательность, ограниченную сверху. Какое число является ее верхней границей?

3) При каких значениях n справедливы неравенства:

$$|180^\circ - \beta_n| < 1^\circ;$$
$$|180^\circ - \beta_n| < 1';$$
$$|180^\circ - \beta_n| < 1''?$$

4) Записать с помощью математических знаков предел β_n.

1261. Общий член числовой последовательности выражается формулой

$$x_n = \frac{n-1}{n}.$$

1) Вычислить четыре первых члена последовательности.

2) Показать, что последовательность x_n возрастает, но остается меньше 1.

3) Найти, при каких значениях n абсолютная величина разности $|1 - x_n|$ меньше 0,01; 0,001.

4) Показать, что, каким бы малым ни было взято число $\varepsilon > 0$, всегда можно найти такое значение n, начиная с которого $|1 - x_n| < \varepsilon$. Чему равен предел $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$?

1262. Общий член последовательности выражается формулой

$$x_n = \frac{2n}{n-1}.$$

1) Вычислить шесть первых членов этой последовательности.

2) Отметить на числовой оси точки, абсциссы которых равны значениям найденных членов последовательности.

3) Показать, что последовательность x_n убывает, но остается больше 2.

4) При каких значениях n абсолютная величина разности $|x_n - 2|$ меньше 10^{-3}; 10^{-5}?

5) Показать, что, каким бы малым ни было число $\varepsilon > 0$, всегда можно найти такое значение n, начиная с которого $|x_n - 2| < \varepsilon$. Чему равен предел $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$?

1263. Общий член последовательности выражается формулой

$$x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

1) Вычислить восемь первых членов последовательности x_n.

2) Отметить найденные члены последовательности на числовой оси.

3) Показать, что последовательность x_n является колеблющейся и ограниченной.

4) При каких значениях n абсолютная величина разности $|x_n - 1|$ будет меньше 10^{-3}? Чему равен предел $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$?

1264. Найти предел каждой из следующих числовых последовательностей:

1) $x_n = \frac{n}{n+1}$; 2) $x_n = 2 - \frac{3}{n}$; 3) $x_n = \frac{n+1}{n}$;

4) $x_n = -\frac{1}{n}$; 5) $x_n = \frac{2n+3}{n+1}$; 6) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + 3$.

1265. Сумма внутренних углов правильного многоугольника, имеющего n сторон, вычисляется по формуле

$$S_n = 180^\circ (n-2).$$

1) Вычислить значения семи первых членов числовой последовательности S_n.

2) При каких значениях n величина S_n будет больше $100\,000^\circ$?

3) Показать, что значения величины S_n при неограниченном увеличении числа сторон (n) многоугольника образуют возрастающую неограниченную числовую последовательность. Как символически это записать?

1266. Исследовать характер изменения членов последовательностей:

1) $x_n = \frac{2n+1}{2}$; 2) $x_n = 0{,}1n^2$; 3) $x_n = \frac{n-1}{2}$.

1267. Показать, что числовая последовательность с общим членом $x_n = \frac{-n+1}{2}$ неограниченно убывает.

1268. В следующих примерах под знаком предела стоит общий член числовой последовательности.

Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-2}{n} = 1$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$.

1269. Даны две последовательности: $a_n = \frac{n}{n+1}$ и $b_n = \frac{n+1}{n}$.

Показать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

1270. Найти пределы следующих последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-3}{n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2}{2n+3}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{n-3}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3n-2}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{3n-1}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^4-3n^2+1}{3n^4-5n+2}$.

1271. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0{,}2$; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$.

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{2} + 5b_n\right)$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2a_n - 3b_n}{a_n} - 2b_n\right)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{(a_n + b_n)\cdot 2a_n}{b_n} - 3a_n\right]$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{9a_n^2 - 6a_nb_n + b_n^2}{3a_n - b_n}$

Найти пределы последовательностей.

1272. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{3n^2+3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{3n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n-1}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-5n}{2n^2+3}$.

1273. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+n}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+3n}{2\sqrt{3}-4n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{3n^2+1}}$.

1274. В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник, и вокруг той же окружности описан правильный n-угольник.

1) Выразить периметры p_n и P_n этих многоугольников через R и n.

2) На основании выведенных формул доказать, что при неограниченном возрастании n последовательности периметров p_n и P_n стремятся к одному и тому же пределу.

3) Зная, что $\lim\limits_{a\to 0}\frac{\sin a}{a}=1$, где a — радианная мера угла, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} p_n=\lim_{n\to\infty} P_n=2\pi R.$$

1275. 1) Выразить площади s_n и S_n правильных вписанного и описанного многоугольников через R и n.

2) Используя выведенные формулы, доказать, что при неограниченном возрастании n последовательности площадей s_n и S_n стремятся к одному и тому же пределу.

3) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\pi R^2$.

§ 26. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

1276. Лестница, ведущая на веранду, имеет 8 ступеней. Первая ступень — бетонная плита высотой 10 *см*; высота каждой из остальных ступенек 15 *см*. Найти высоту 2-й, 3-й, 4-й ступени над землей. На какой высоте над землей находится пол веранды (рис. 52)?

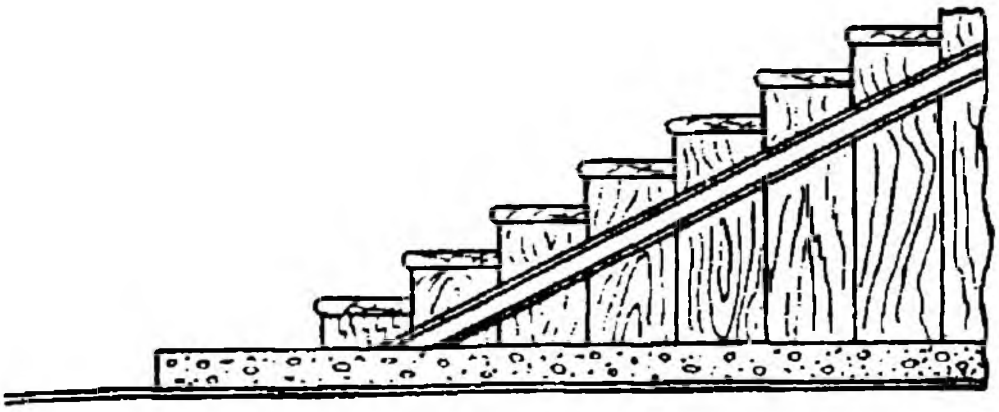


Рис. 52

1277. Какие из следующих последовательностей являются арифметическими прогрессиями:

1) 1; 4; 7; 10; 13; ...; 2) 2; 4; 8; 16; 32; ...;
3) 3; 0; —3; —6; ...; 4) 4; 9; 16; 25; ....

1278. Показать, что следующие числовые последовательности являются арифметическими прогрессиями:

1) $a_n = 4n + 3$; 2) $a_n = \frac{3n+2}{5}$; 3) $a_n = \frac{8n+1}{3}$.

1279. Какой зависимостью связаны между собой три последовательных члена арифметической прогрессии?

1280. Показать, что значения функции $\sin^2\alpha$ от углов $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

1281. Показать, что значения функции $\cos^2\alpha$ от углов $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ образуют убывающую арифметическую прогрессию.

1282. 1) Назвать прогрессию, состоящую из 5 членов, если ее первый член равен 11, а разность прогрессии равна —3.

2) Найти пятый член прогрессии: 3, 5, 7, ...

3) Найти шестой член прогрессии: a, $-2a$, $-5a$, ...

1283. 1) Дано: $a_5 = 19$; $a_9 = 35$. Найти d.

2) Дано: $a_4 = -13b$; $a_{10} = -43b$. Найти d.

3) Чему равна разность арифметической прогрессии, если $a_1 = \frac{1}{3}$ и $a_{10} = 6\frac{1}{3}$?

1284. Как изменится разность прогрессии, если порядок ее членов переменить на обратный?

1285. Выписаны две арифметические прогрессии. Если из каждого члена первой прогрессии вычесть соответствующий член второй прогрессии, то получится ли снова арифметическая прогрессия?

1286. В арифметической прогрессии опущены четные по порядку члены. Образуют ли оставшиеся члены прогрессию?

1287. В какой арифметической прогрессии

$$a_1 : a_2 = a_2 : a_4?$$

1288. Вычислить последний член арифметической прогрессии, в которой:

1) $a_1 = 10$; $d = 4$; $n = 11$;

2) $a_1 = 0$; $d = -2$; $n = 17$;

3) $a_1 = 22{,}4$; $d = -0{,}2$; $n = 100$;

4) $a_1 = -3{,}6$; $d = \frac{2}{3}$; $n = 13$;

5) $a_1 = 9\sqrt{3} - 2$; $d = 2 - \sqrt{3}$; $n = 12$.

1289. Найти число членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 3$; $d = -5$; $a_n = -37$.

1290. В арифметической прогрессии, содержащей 7 членов, последний член равен $3\frac{5}{6}$. Найти первый член прогрессии, если ее разность равна $\frac{3}{4}$.

1291. 1) Дана прогрессия 2; 1,9; 1,8; 1,7; .... Начиная с какого номера ее члены будут отрицательные?

2) Какие номера имеют члены арифметической прогрессии +7; 10; 13; ..., большие 100, но меньшие 200?

1292. Найти сумму членов арифметической прогрессии, зная, что:

1) $a_1 = 3$; $a_n = 39$; $n = 11$;

2) $a_1 = -0{,}2$; $a_n = -18{,}4$; $n = 15$;

3) $a_1 = 5\frac{5}{8}$; $a_n = -3\frac{5}{6}$; $n = 36$;

4) $a_1 = \frac{2\sqrt{3}+3}{2}$; $a_n = -\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$; $n = 18$.

1293. Используя рисунок 53, проиллюстрировать формулу $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ — суммы всех членов арифметической прогрессии.

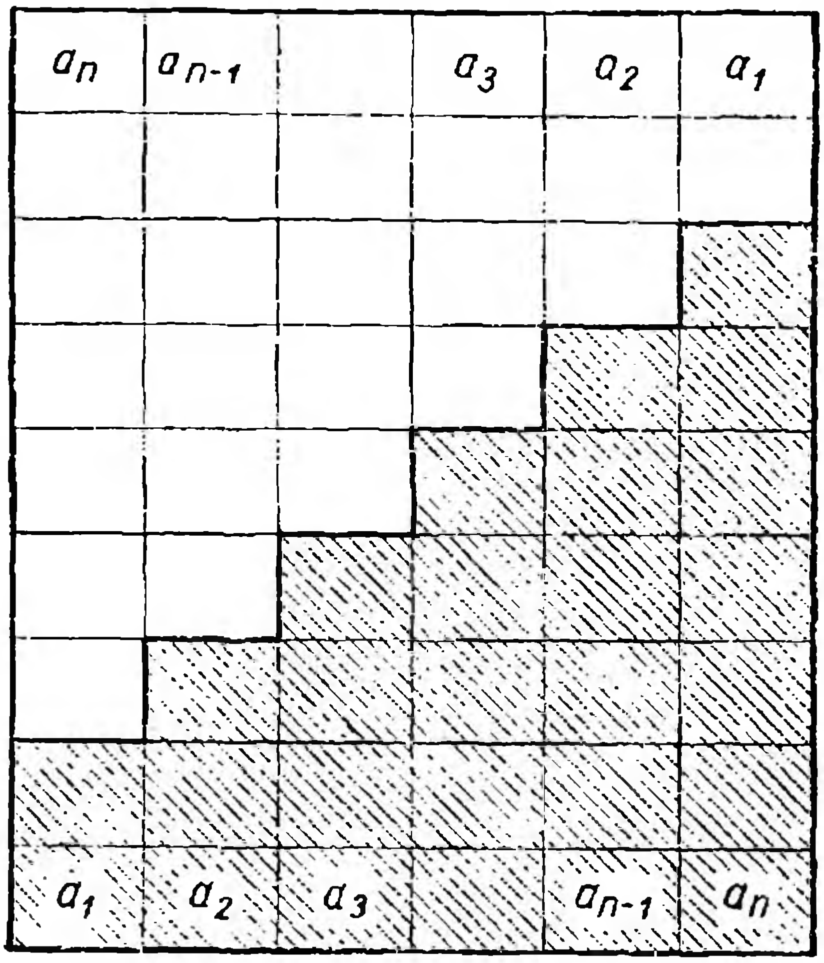


Рис. 53

1294. Вычислить сумму n членов арифметической прогрессии, в которой:

1) $a_1 = 1$; $d = 2$; $n = 11$;

2) $a_1 = \frac{2}{3}$; $d = \frac{3}{4}$; $n = 17$;

3) $a_1 = -1\frac{1}{2}$; $d = -3\frac{3}{4}$; $n = 21$;

4) $a_1 - 0{,}2$; $d = 0{,}(3)$; $n = 13$;

5) $a_1 = \frac{5\sqrt{3}-7}{3}$; $d = -\frac{\sqrt{3}-2}{3}$; $n = 8$.

1295. 1) Найти сумму всех натуральных чисел от 1 до 200.

2) Найти сумму первых n четных чисел.

3) Найти сумму первых n нечетных чисел.

4) Вычислить сумму всех двузначных чисел.

1296. 1) Найти сумму всех трехзначных чисел, кратных 4.

2) Найти сумму всех чисел, кратных k, начиная с k и кончая mk.

1297. Сколько нужно взять членов прогрессии 105; 98; 91; 84; ..., чтобы сумма их была равна нулю?

1298. Сколько раз часы пробьют за сутки, если они отбивают только целые часы?

1299. В каждой строке таблицы 8 по трем данным вычислить неизвестные значения величин.

Таблица 8

№	a_1	d	n	a_n	S_n	№	a_1	d	n	a_n	S_n
1		$-0,3$	15	$-2,94$		9	-20		20		-20
2		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	21	$2\sqrt{3}+5$		10	-45		41		0
3	$-1,3$			$-9,7$	$-82,5$	11			12	$-12,8$	$-166,8$
4	$\sqrt{2}-1$			$5(\sqrt{2}-1)$	$27(\sqrt{2}-1)$	12			33	-143	-2079
5	3,6		37	0		13		$\sqrt{3}-3$	10		$45\sqrt{3}-125$
6	$2\frac{3}{4}$		31	$14\frac{3}{4}$		14		$-\frac{3}{4}$	25		-225
7	0,1	0,2			22,5	15		$-\frac{4}{33}$		$-\frac{2}{3}$	0
8	0,5	0,5			76,5	16		0,3		5,6	55,1

1300. Найти сумму n членов прогрессии:

1) $\frac{x-1}{x}+\frac{x-3}{x}+\frac{x-5}{x}+\ldots;$

2) $\frac{x-a}{x+a}+\frac{3x-a}{x+a}+\frac{5x-a}{x+a}+\ldots.$

1301. В арифметической прогрессии дано: $a_p=q$; $a_q=p$. Найти a_n.

1302. 1) Диаметры 5 шкивов, насаженных на общий вал, образуют арифметическую прогрессию, крайние члены которой равны 110 *мм* и 206 *мм*. Найти диаметры промежуточных шкивов.

2) Между числами a и b поместить k чисел, которые вместе с данными числами составили бы арифметическую прогрессию. Выписать первые 3 члена этой прогрессии.

1303. В каждой строке приведенной таблицы по трем данным вычислить неизвестные значения величин.

Таблица 9

№	a_1	d	n	a_n	S_n	№	a_1	d	n	a_n	S_n
1	1,26	$-0{,}3$			$-0{,}9$	10	4,9	9,8	5		
2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$			$55\sqrt{3}$	11	$-2\frac{1}{3}$		19		$12\frac{2}{3}$
3		$-0{,}6$	17	9,5		12	0		100		$-49{,}5$
4		$\frac{1}{4}$	41	$10\frac{1}{2}$		13	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$1+3\sqrt{3}$	
5		$-0{,}2$	9		7,2	14	0	0,1		1	
6		0,2	21		57,75	15			12	$-1{,}3$	-9
7		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$3\sqrt{2}$	$\frac{21\sqrt{2}}{2}$	16			11	$-2{,}5$	0
8		$-0{,}4$		$-3{,}2$	0	17	0,2		9	$-0{,}2$	
9	$-1{,}(3)$	$-2{,}(2)$	10			18	$\frac{5}{6}$		9	$-1\frac{5}{6}$	

1304. Пятый член арифметической прогрессии, состоящей из 10 членов, равен 11, а восьмой ее член равен 17. Найти сумму всех членов этой прогрессии.

1305. Третий член арифметической прогрессии равен 10, а восьмой 30. Сколько нужно взять членов, чтобы сумма их равнялась 242?

1306. Восьмой член арифметической прогрессии составляет 40% от четвертого, а их сумма равна 2,8. Сколько нужно взять членов этой прогрессии, чтобы сумма их равнялась 14,3?

1307. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, в которой:

1) $\begin{cases} a_2 + a_8 = 10, \\ a_3 + a_{14} = 31; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_3 + a_5 + a_8 = 18, \\ a_4 + a_2 = -2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} S_5 - S_2 - a_5 = 0{,}1, \\ S_4 + a_7 = 0{,}1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a_2 + a_4 + a_6 = 36, \\ a_2 \cdot a_3 = 54; \end{cases}$

5) $\begin{cases} S_4 = 9, \\ S_6 = 22\frac{1}{2}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} a_5 - a_3 = -4, \\ a_2 \cdot a_4 = -3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} a_5 : a_3 = 4, \\ a_2 \cdot a_6 = -11; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} a_3^2 + a_7^2 = 122, \\ a_1 + a_7 = 4; \end{cases}$

9) $\begin{cases} a_2 + a_3 + a_1 + a_5 = 34, \\ a_2 \cdot a_3 = 28. \end{cases}$

1308. Найти число членов арифметической прогрессии, в которой:

1) $\begin{cases} S_3 = 9, \\ S_4 = 16, \\ S_n = 100; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_3 + a_5 = 14, \\ S_{12} = 129, \\ a_n = 195; \end{cases}$

3) $\begin{cases} S_n - a_2 = 103, \\ S_n - a_n = 88, \\ S_n - a_2 - a_{n-1} = 87\frac{1}{2}. \end{cases}$

1309. Решить уравнения:

1) $2 + 5 + 8 + \ldots + x = 155;$

2) $1 - 5 - 11 - \ldots - x = -207;$

3) $x - 1 + x - 3 + \ldots + x - 27 = 70.$

1310. Найти натуральное число, которое равно сумме всех ему предшествующих натуральных чисел.

1311. Найти три последовательных нечетных числа, зная, что сумма их квадратов на 55 больше суммы квадратов заключенных между ними четных чисел.

1312*. Определить такую арифметическую прогрессию, в которой отношение между суммой n первых членов и суммой n членов, следующих за ними, не зависит от числа членов.

1313. Доказать, что выражения $(a+b)^2$; (a^2+b^2); $(a-b)^2$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Найти сумму ее n членов.

1314. Если числа a^2, b^2, c^2 составляют арифметическую прогрессию, то числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ также образуют арифметическую прогрессию. Доказать.

1315. Показать, что если числа a, b и c являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии, то существует тождество

$$\frac{2}{9}(a+b+c)^3 = a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b).$$

1316*. Доказать тождество

$$\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \frac{1}{a_3 a_{n-2}} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} a_2} + \frac{1}{a_n a_1} =$$
$$= \frac{2}{a_1 + a_n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}\right),$$

где a_1, a_2, a_3, ..., a_n — члены арифметической прогрессии.

1317. Найти сумму

$$50^2-49^2+48^2-47^2+\ldots+2^2-1.$$

1318. Найти сумму первых двадцати нечетных чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 1.

1319. Первый член арифметической прогрессии равен 7, второй и третий соответственно равны квадратам двух последовательных натуральных чисел. Найти прогрессию.

1320. Арифметическая прогрессия содержит 8 членов. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 28, а на нечетных местах 16. Найти прогрессию.

1321. Найти $a_1+a_6+a_{11}+a_{16}$, если известно, что $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — арифметическая прогрессия и что $a_1+a_4+a_7+\ldots+a_{16}=147$.

1322. Могут ли числа 1, $\sqrt{3}$, 3 быть членами арифметической прогрессии?

1323*. Некоторые члены арифметических прогрессий 9; 12; 15; 18; ... и 8; 12; 16; 20; ... одинаковы. Найти сумму первых 50 одинаковых членов этих прогрессий.

1324. Показать, что числа, выражающие суммы внутренних углов треугольника, четырехугольника, пятиугольника и т. д., составляют арифметическую прогрессию.

1325*. Если длины сторон a, b, d и c четырехугольника составляют арифметическую прогрессию, то в него можно вписать окружность. Доказать.

1326. Найти число сторон многоугольника, у которого число градусов, содержащихся в последовательных внутренних углах его, составляют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 100°, а разность 10°.

1327. Числа, измеряющие углы треугольника, составляют арифметическую прогрессию. Найти средний член этой прогрессии.

1328. При свободном падении тело проходит в первую секунду 4,9 *м*, а в каждую следующую секунду на 9,8 *м* больше, чем в предыдущую.

Найти: 1) какой путь пройдет тело за одиннадцатую секунду; 2) какой путь пройдет тело за 11 *сек*; 3) сколько времени будет падать тело с высоты 4410 *м*?

1329. 1) Через сколько секунд свободного падения камень упадет на дно шахты, если ее глубина равна 80 *м*?

2) Найти глубину шахты, если свободно падающее тело достигло дна шахты через 5 *сек* после начала падения.

1330. Два тела начали свободно падать с определенной высоты одно после другого спустя 6 *сек*. Через сколько секунд после начала падения первого тела оно будет на расстоянии 294 *м* от другого тела?

1331. Отрезки параллельных прямых, заключенные между сторонами угла, составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна 5 *см*. Найти число членов этой прогрессии, если наименьший отрезок равен 2 *см*, а сумма длин всех отрезков равна 245 *см*.

1332. Два тела движутся навстречу друг другу из двух мест, расстояние между которыми равно 127 *м*. Первое тело движется равномерно со скоростью 5 *м/сек*. Второе тело, вышедшее на 3 *сек* позже первого, в первую секунду проходит 5 *м*, а в каждую следующую на 2 *м* больше, чем в предыдущую. Сколько секунд двигалось первое тело до встречи?

1333. Длины сторон многоугольника составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна 3 *см*. Наибольшая сторона многоугольника содержит 38 *см*. Найти число сторон многоугольника, если его периметр равен 258 *см*.

1334. По шоссе в одном и том же направлении движутся грузовой и легковой автомобили, расстояние между которыми 297 *м*. Грузовой автомобиль идет впереди с начальной скоростью 10 *м/сек*, а в каждую следующую секунду его скорость возрастает на 0,1 *м/сек*. Легковой автомобиль имеет начальную скорость 12 *м/сек*, а его ускорение 0,2 *м/сек*^{2}. Сколько потребуется времени, чтобы автомобили поравнялись?

1335. Поезд, отходя от станции, равномерно увеличивает скорость и через 20 *мин* достигает скорости 60 *км/ч*. Чему равно ускорение поезда в минуту?

1336. Шар, скатывающийся по наклонному желобу, в первую секунду проходит 0,6 *м*, а в каждую следующую секунду его скорость увеличивается на 0,6 *м*. Сколько времени будет двигаться шар по шестиметровому желобу?

1337. Для награждения победителей в соревновании было выделено несколько ценных призов; стоимость наибольшего приза 30 руб., а стоимость каждого следующего приза уменьшается на одну и ту же сумму до самого меньшего в 6 руб. Сколько участников соревнований было премировано и какой стоимости приз получил каждый из них, если на премирование было израсходовано 72 руб?

1338. Два тела движутся навстречу друг другу из точек, отстоящих одна от другой на расстоянии 555 *см*. Через сколько секунд тела встретятся, если первое тело проходит в первую секунду своего движения 30 *см*, а в каждую следующую на 5 *см* больше, чем в предыдущую; второе же тело в первую секунду проходит 60 *см*, а в каждую следующую на 4 *см* меньше, чем в предыдущую?

1339. Из точки M начало двигаться тело A, проходя в первую секунду 1 *м* и в каждую следующую на 2 *м* больше, чем в предыдущую. Спустя 3 *сек* из той же точки M в том же направлении вышло второе тело B, которое проходило в первую секунду 12 *м*, а в каждую следующую на 1 *м* больше, чем в предыдущую. Через сколько секунд после выхода тела B последнее догонит тело A?

1340. Для поливки 20 деревьев, расположенных по прямой линии на расстоянии 2 *м* друг от друга, садовник приносит воду для каждого отдельного дерева из колодца, находящегося на той же прямой линии в 10 *м* от первого дерева. Сколько всего метров пройдет садовник, чтобы полить все деревья и возвратиться к колодцу?

§ 27. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

1341. Показать, что последовательность, общий член которой выражается одной из следующих формул, есть геометрическая прогрессия:

1) $a_n = 3 \cdot 2^n$; 2) $a_n = \frac{2}{5} \cdot 3^n$;

3) $a_n = \frac{3}{2^n}$; 4) $a_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Вычислить первые четыре члена каждой прогрессии.

1342. Чему равен знаменатель геометрической прогрессии:

1) $2;\ \sqrt{2};\ 1;\ \ldots$; 2) $a_5 = 96;\ a_6 = 192$;

3) $a^n;\ a^{n-1};\ a^{n-2};\ \ldots$; 4) $a_{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ a_n = \frac{2\sqrt{3}}{3}$?

1343. Какой зависимостью связаны между собой три последовательных члена геометрической прогрессии?

1344. Образуют ли геометрическую прогрессию следующие числа:

1) $2^x,\ 2^{2x},\ 2^{3x}$; 2) $2^{x^2},\ 2^{2x^2},\ 2^{3x^2}$?

1345. 1) Показать, что значения функции $\operatorname{tg}\alpha$ от углов $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ образуют возрастающую геометрическую прогрессию.

2) Показать, что значения функции $\operatorname{ctg}\alpha$ от углов $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ образуют убывающую геометрическую прогрессию.

1346. Найти шестой член геометрической прогрессии:

1) $\div\div\, 3;\ 9;\ 27;\ \ldots$; 2) $\div\div\, -2;\ 8;\ -32;\ \ldots$;

3) $\div\div\, 4;\ -1;\ \frac{1}{4};\ \ldots$; 4) $\div\div\, \frac{\sqrt{3}}{2};\ 1;\ \frac{2\sqrt{3}}{3};\ \ldots$

1347. Найти число членов геометрической прогрессии, в которой $a_1 = 3$; $q = \frac{1}{2}$; $a_n = \frac{3}{64}$.

1348. В геометрической прогрессии, содержащей пять членов, последний член равен $\frac{16}{27}$. Найти первый член прогрессии, если ее знаменатель равен $-\frac{2}{3}$.

1349. Чему равен знаменатель геометрической прогрессии, состоящей из четырех членов, если $a_1 = \frac{2}{3}$ и $a_n = \frac{9}{32}$.

1350. Как изменится знаменатель прогрессии, если порядок ее членов изменить на обратный?

1351. Найти сумму n членов геометрической прогрессии, в которой:

1) $a_1 = 5;\quad q = 3;\quad n = 5;$
2) $a_1 = 3;\quad q = -2;\quad n = 6;$
3) $a_1 = -2;\quad q = -\frac{1}{2};\quad n = 7;$
4) $a_1 = \sqrt{\frac{2}{3}};\quad q = \sqrt{\frac{3}{2}};\quad n = 8;$
5) $a_1 = \sqrt{6};\quad q = \sqrt{2};\quad n = 9.$

1352. Найти первый член и сумму n членов геометрической прогрессии, в которой:

1) $a_n = 192;\quad q = 2;\quad n = 7;$
2) $a_n = \frac{32}{81};\quad q = -\frac{2}{3};\quad n = 6;$
3) $a_n = 9\sqrt{6};\quad q = \sqrt{3};\quad n = 5.$

1353. В каждой строке приведенной таблицы вычислить неизвестные значения величин.

Таблица 10

№	a_1	q	n	a_n	S_n	№	a_1	q	n	a_n	S_n
1	-2		6	-486		9		$\frac{1}{2}$		2	254
2	$\sqrt{6}$		9	$16\sqrt{6}$		10		$1\frac{1}{2}$		$3\frac{3}{8}$	$8\frac{19}{24}$
3		$-\frac{1}{2}$	8		$1\frac{21}{64}$	11	15		3		$21\frac{2}{3}$
4		$\sqrt{2}$	7		$15\sqrt{2}+14$	12	$\sqrt{2}$		3		$4\sqrt{2}+\sqrt{6}$
5	9			$\frac{64}{81}$	$25\frac{34}{81}$	13			3	18	26
6	$\sqrt{3}$			$4\sqrt{3}$	$7\sqrt{3}+3\sqrt{6}$	14			3	135	195
7	-2	$-1\frac{1}{2}$			$8\frac{5}{16}$	15		$1\frac{1}{2}$	6	$2\frac{17}{32}$	
8	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$			$4(3+\sqrt{3})$	16		3	4	54	

1354. Чему равно произведение

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{3}\,?$$

1355. Доказать, что произведение двух равноотстоящих от концов членов геометрической прогрессии, равно произведению крайних членов.

1356. Вывести формулу произведения n членов геометрической прогрессии с положительными членами в зависимости от крайних ее членов a_1 и a_n.

1357. Найти произведение n членов геометрической прогрессии:

1) $\div\div\, 6\frac{3}{4};\ 4\frac{1}{2};\ 3;\ \ldots;\ n=8;$

2) $\div\div\, \sqrt{6};\ 3\sqrt{2};\ 3\sqrt{6};\ \ldots;\ n=7;$

3) $\div\div\, \sqrt{\frac{2}{3}};\ 1;\ \sqrt{\frac{3}{2}};\ \ldots;\ n=6;$

4) $\div\div\, a;\ \frac{1}{a};\ \frac{1}{a^3};\ \ldots;\ n=5.$

1358. Между числами 243 и 1 поместить четыре числа, которые вместе с данными числами образовали бы геометрическую прогрессию.

1359. Между числами 8 и 128 поместить три средних геометрических.

1360. Между числами $\frac{a}{b^2}$ и $\frac{b}{a^{[illegible]}}$ вставить пять средних геометрических.

1361. Начиная с какого номера члены геометрической прогрессии $-8;\ 4;\ -2;\ \ldots$ по абсолютной величине меньше 0,001?

1362. Определить первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если:

1) $\begin{cases} a_4 - a_2 = 18, \\ a_5 - a_3 = 36; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_1 - a_3 + a_5 = -65, \\ a_1 + a_7 = -325. \end{cases}$

1363. Определить первый член, знаменатель и число членов геометрической прогрессии, если:

1) $\begin{cases} a_7 - a_4 = -216, \\ a_5 - a_4 = -72, \\ S_n = 1023; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_1 + a_5 = 17, \\ a_2 + a_6 = 34, \\ S_n = 31. \end{cases}$

1364. В геометрической прогрессии с положительными членами $S_2 = 4$, а $S_3 = 13$. Найти S_5.

1365. Разность между шестым и четвертым членами геометрической прогрессии равна 72, а между третьим и первым равна 9. Найти сумму 8 членов этой прогрессии.

1366. Геометрическая прогрессия состоит из 6 членов. Найти ее знаменатель, зная, что сумма 3 первых членов в 8 раз меньше суммы 3 последних членов.

1367. Найти 4 числа, составляющие убывающую геометрическую прогрессию, зная, что сумма ее крайних членов равна $11\frac{2}{3}$, а сумма средних 10.

1368. Найти геометрическую прогрессию, имеющую шесть членов, зная, что сумма членов, стоящих на четных местах, равна 99,75, а сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна 66,5.

1369. Показать, что если числа a, b, c и d составляют геометрическую прогрессию, то между этими числами существуют следующие соотношения:

1) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$;
2) $(a-d)^2=(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2$;
3) $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$.

1370. Сумма 3 первых членов геометрической прогрессии равна 13, а сумма квадратов тех же членов 91. Найти прогрессию.

1371. Найти геометрическую прогрессию с вещественными членами, если сумма 3 первых членов ее равна 13, а произведение их 27.

1372. Три числа, сумма которых равна 21, составляют арифметическую прогрессию. Если из второго числа вычесть единицу, а к третьему прибавить единицу, то эти 3 числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

1373. Три числа, сумма которых равна 28, составляют геометрическую прогрессию. Если большее из них уменьшить на 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

1374. Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 42; те же числа составляют первый, второй и шестой члены возрастающей арифметической прогрессии. Найти эти числа.

1375. В геометрической прогрессии второй член равен 8, а пятый равен 512. Составить арифметическую прогрессию, у которой разность в два раза меньше знаменателя геометрической прогрессии, а суммы трех первых членов в одной и другой прогрессиях были бы равны.

1376. В арифметической прогрессии второй член равен 14, а пятый равен 20. Составить геометрическую прогрессию, у которой знаменатель в два раза больше разности арифметической прогрессии, а сумма трех первых членов была бы равна сумме тех же членов арифметической прогрессии.

1377. Три числа, сумма которых равна 19,5, являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии и одновременно вторым, восьмым и двадцать третьим членами арифметической прогрессии. Найти сумму пяти членов геометрической прогрессии.

1378. Первый и третий члены арифметической прогрессии соответственно равны первому и третьему членам геометрической прогрессии, а второй член арифметической прогрессии превышает второй член геометрической прогрессии на 0,25. Определить сумму первых пяти членов арифметической прогрессии, если первый член ее 2.

1379. Сумма трех чисел, составляющих возрастающую арифметическую прогрессию, равна 51. Если от этих чисел отнять соответственно 1, 7 и 8, то получатся три числа, составляющие геометрическую прогрессию. Сколько членов арифметической прогрессии надо взять, чтобы их сумма равнялась 555?

1380. Сумма трех чисел, составляющих геометрическую возрастающую прогрессию, равна 65. Если от этих чисел отнять соответственно 1, 8, 35, то получатся три числа, составляющие арифметическую прогрессию. Сколько членов геометрической прогрессии надо взять, чтобы их сумма равнялась 200?

1381. Три числа, сумма которых равна 217, можно рассматривать как три последовательных члена геометрической прогрессии или как второй, девятый и сорок четвертый члены арифметической прогрессии. Сколько членов этой арифметической прогрессии надо взять, чтобы их сумма была равна 820?

1382. Три числа, сумма которых равна 76, можно рассматривать как три последовательных члена геометрической прогрессии или как первый, четвертый и шестой члены арифметической прогрессии. Сколько членов этой арифметической прогрессии надо взять, чтобы их сумма была равна 176?

1383. Разность между вторым и первым членами геометрической прогрессии равна 4, а разность между третьим и вторым членами той же прогрессии равна 12. Определить сумму 10 членов арифметической прогрессии, первый и пятый члены которой соответственно равны первому и третьему членам данной прогрессии.

1384. В геометрической прогрессии, все члены которой — положительные числа, разность между третьим и первым членами равна 9, а разность между пятым и третьим членами той же прогрессии равна 36. Определить сумму 12 первых членов арифметической прогрессии, первый и третий члены которой соответственно равны первому и второму членам данной геометрической прогрессии.

1385. Сумма трех первых членов убывающей арифметической прогрессии равна 54. Если ее первый член оставить без изменения, второй уменьшить на 9, а третий — на 6, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти арифметическую прогрессию.

1386. Известно, что период полураспада радиоактивного газа радона $T = 3{,}825$ суток. Определить, какое количество радона осталось в запаянной ампуле через $t = 38{,}25$ суток, если его первоначальное количество $M_0 = 0{,}5$ *кг*?

§ 28. БЕСКОНЕЧНО УБЫВАЮЩАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

1387. 1) $2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \ldots;$ 2) $4;\ 2\frac{2}{3};\ 1\frac{7}{9};\ \ldots;$

3) $2;\ -1;\ \frac{1}{2};\ \ldots;$ 4) $1;\ -\frac{2}{3};\ \frac{4}{9};\ \ldots.$

1388. 1) $\sqrt{2};\ -1;\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \ldots;$ 2) $2\sqrt{3};\ 2;\ \frac{2}{3}\sqrt{3};\ \ldots;$

3) $3\sqrt{3};\ 3;\ \sqrt{3};\ \ldots;$ 4) $\sqrt{\frac{3}{2}};\ 1;\ \sqrt{\frac{2}{3}};\ \ldots.$

1389. 1) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1};\ \frac{1}{2-\sqrt{2}};\ \frac{1}{2};\ \ldots;$

2) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1};\ 1;\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1};\ \ldots;$

3) $\frac{x}{y};\ \frac{x^2}{y^2};\ \frac{x^3}{y^3};\ \ldots\ \left(\left|\frac{x}{y}\right|<1\right).$

1390*. В какой системе счисления сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{3}{2};\ \frac{3}{4};\ \frac{3}{8};\ \ldots$ может быть записана в следующем виде: 11?

1391. Найти первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если: 1) сумма прогрессии равна 4, а ее знаменатель $\frac{1}{2}$; 2) сумма прогрессии равна $2(\sqrt{2}+1)$, а ее знаменатель $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) сумма пяти первых членов равна $\frac{11}{8}$, а сумма прогрессии $\frac{4}{3}$.

1392. Первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен $3\sqrt{3}$, а сумма прогрессии $\frac{9(\sqrt{3}+1)}{2}$. Найти знаменатель прогрессии.

1393. Знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен $\frac{1}{6}\sqrt{30}$, а сумма прогрессии $\frac{6(\sqrt{30}+5)}{5}$. Найти третий член прогрессии.

1394. Найти число членов арифметической прогрессии, первый член которой равен 5, а разность равна 1, если сумма всех ее членов равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии, имеющей вторым членом $15\frac{3}{7}$, а третьим $13\frac{11}{49}$.

1395. Следующие чистые периодические дроби представить в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии и найти эту сумму:

1) 0,(2); 2) 2,(7); 3) 1,(3);
4) 2,(21); 5) 1,(27); 6) 0,(19);
7) 3,(342); 8) 0,(901); 9) 5,(002).

1396. Следующие смешанные периодические дроби представить в виде суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и вычислить эту сумму:

1) $0{,}2(3)$; 2) $1{,}0(7)$; 3) $2{,}3(24)$;
4) $3{,}7(288)$; 5) $3{,}20(3)$; 6) $2{,}15(30)$;
7) $1{,}06(32)$; 8) $0{,}00(819)$; 9) $0{,}111(2)$.

1397. Найти сумму следующих бесконечно убывающих геометрических прогрессий:

1) $1+\sin\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^3\frac{\pi}{6}+$
2) $1-\cos\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}-\cos^3\frac{\pi}{6}+$
3) $1-\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8}-\sin^6\frac{\pi}{8}+\ldots$;
4) $1+\cos^2\frac{\pi}{12}+\cos^4\frac{\pi}{12}+\cos^6\frac{\pi}{12}+\ldots$.

1398. Найти предел суммы последовательности:

1) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\ldots$;
2) $\frac{2}{3}+1+\frac{4}{9}+\frac{1}{2}+\frac{8}{27}+\frac{1}{4}+\ldots$;
3) $8+\sqrt{2}+4-1+2+\frac{\sqrt{2}}{2}+$
4) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\ldots$.

1399. Расстояние между автомобилем и пешеходом 1 *км*. Скорость автомобиля в 10 раз больше скорости пешехода. Какой путь должен пройти автомобиль, чтобы догнать пешехода, если они движутся равномерно.

1400. В 12 *ч* часовая и минутная стрелки часов совпадают. Через сколько времени стрелки вновь совместятся?

1401. В равносторонний треугольник, сторона которого 4 *см*, вписан другой треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника. В построенный треугольник таким же способом вписан новый треугольник и так далее до бесконечности. Найти предел: 1) суммы периметров этих треугольников; 2) суммы их площадей.

1402. Из высот правильного треугольника, сторона которого равна a, строят треугольник, из высот построенного треугольника строят новый треугольник и так далее. Определить сумму площадей полученных треугольников при неограниченном продолжении такого построения.

1403. В квадрат, сторона которого a, вписан круг; в круг вписан квадрат; в этот квадрат вписан круг и так до бесконечности. Найти предел суммы: 1) периметров всех квадратов; 2) площадей всех квадратов; 3) длин окружностей; 4) площадей всех кругов.

1404. В круг радиуса R вписан правильный треугольник; в треугольник вписан круг; в этот круг снова вписан треугольник и так до бесконечности. Найти предел суммы: 1) периметров всех треугольников; 2) площадей всех треугольников; 3) длин окружностей; 4) площадей кругов.

1405. Вершины правильного многоугольника соединены с его центром O отрезками AO, A_1O, A_2O и т. д. (рис. 54). Из вершины A на A_1O опущен перпендикуляр, длина которого a; из основания перпендикуляра на A_2O опущен второй перпендикуляр; из основания этого перпендикуляра на A_3O опущен третий перпендикуляр и так до бесконечности. Найти предел суммы длин перпендикуляров, полагая $n = 6$; 8; 12.

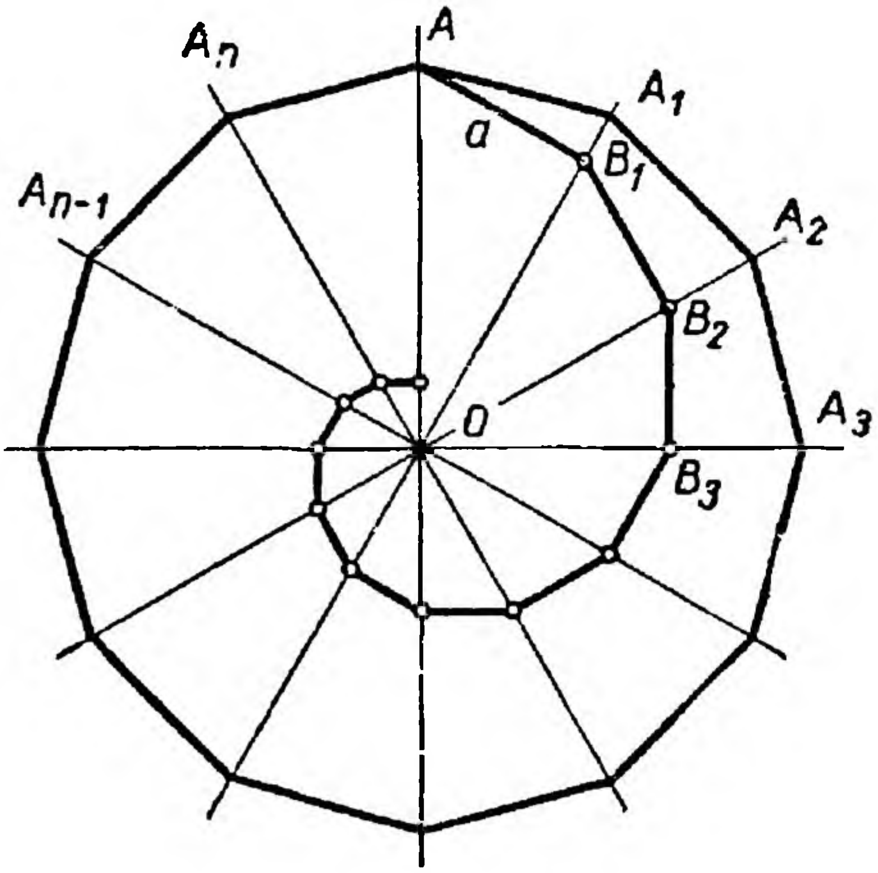


Рис. 54

7

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА IX КЛАССА

Уравнения и неравенства первой степени

1406. Найти наибольшее значение аргумента x, при котором приближенная формула $(1+x)^2 \approx 1+2x$ дает погрешность, не превышающую 0,005.

1407*. Какое наибольшее значение имеет выражение

$$|x-1|-|x-2|-|x|?$$

1408. Могут ли выражения

$$1)\ \frac{6}{2+a},\quad 2)\ \frac{15}{5+|a|},\quad 3)\ \frac{15}{6-\sin\alpha},\quad 4)\ \frac{9}{3+\cos\alpha}$$

быть большими числа 3?

1409. Решить уравнение

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+2}{x+3}+\frac{4}{x^2+2x-3}=0.$$

1410. Решить алгебраически и графически уравнение

$$|x|=2x-3.$$

1411*. Решить системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases} abx+aby=a^2+b^2, \\ a^2x+b^2y=a^2+2ab-b^2; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} |x-2|+|y-3|=1, \\ y=3+|x-2|. \end{cases}$$

1412. При каких значениях a уравнение $ax-7=4x-a$ будет иметь: 1) единственное решение; 2) нулевое решение; 3) бесчисленное множество решений; 4) не будет иметь ни одного решения?

1413. При каких значениях a уравнение

$$x(a^2-8a+15)=a^2-4a-5:$$

1) не имеет ни одного корня; 2) имеет бесчисленное множество корней; 3) имеет только один корень?

1414. Поставить знак $>$, $<$ или $=$ между выражениями:

1) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ и $0{,}3$; 2) $\sqrt{\frac{4-\sqrt{15}}{2}}$ и $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$.

1415. Пусть a, b, c и d — положительные числа и $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$. Доказать, что дробь $\frac{a+c}{b+d}$ больше дроби $\frac{c}{d}$.

1416*. Доказать неравенства:

1) $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$, где $a\geqslant 0$; $b\geqslant 0$; $c\geqslant 0$;

2) $(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)\geqslant -1$;

3) $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\ldots(1+x_n)\geqslant 2^n$, где $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ — положительные числа и $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n=1$;

4) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1$.

1417. Решить алгебраически и графически следующие неравенства:

1) $|x-2|<3$; 2) $x+|x-3|>5$.

1418*. Решить неравенства:

1) $|2x-5|-|3x-10|>0$;

2) $\left|\frac{3x-1}{x-3}\right|>1$; 3) $|x|+|x-2|<4$.

1419. Найти целые решения следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} 1-\frac{3x-88}{7}>5x, \\ 4x+5-\frac{1}{6}\left(25x+29\frac{1}{2}\right)<0. \end{cases}$$

1420. При каких целых значениях a дробь $\frac{0{,}6-0{,}5a}{0{,}3a-1{,}1}$ положительна?

1421. Найти область определения функций:

1) $y=\sqrt{\frac{3-x}{2x+5}}$; 2) $y=\sqrt{\frac{x}{x-5}+1}$.

1422. Решить неравенство $4x<x^2<4x+5$.

1423. Определить, при каких значениях a следующие уравнения имеют отрицательное решение:

1) $\frac{ax+11}{3}=\frac{4x-5a}{7}$; 2) $\frac{5}{a-3x}=\frac{2}{ax-2}$.

1424. При каких значениях n система уравнений

$$\begin{cases} 4x-3y=6, \\ ny-5x=8 \end{cases}$$

1) имеет единственное решение; 2) имеет бесконечное множество решений; 3) не имеет решений?

1425. * В каких пределах изменяется угол заострения β и угол резания δ у резца (рис. 55), зная, что задний угол α и передний угол γ изменяются в следующих пределах: $9^\circ \leqslant \alpha \leqslant 12^\circ$; $6^\circ \leqslant \gamma \leqslant 28^\circ$.

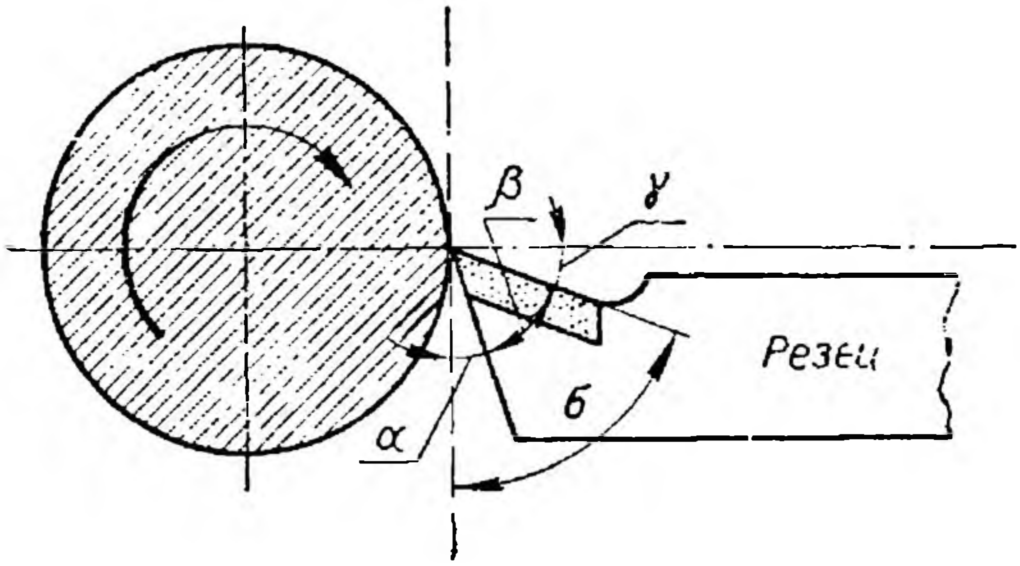


Рис. 55

1426. Расстояние между центрами двух окружностей, радиусы которых r_1 и r_2, равно d. Найти расстояние от точки пересечения внешней касательной к этим окружностям с линией центров до центра ближайшей окружности. Решение исследовать.

1427. Дорога от A до B имеет спуск, а потом от B до C подъем, причем углы подъема в обе стороны одинаковы. Машина идет на спусках со скоростью 40 *км/ч*, а на подъемах 30 *км/ч*. Путь от A до C она сделала за 6 *ч*, а обратно за t *ч*. Найти расстояние от A до B и от B до C и указать, при каких значениях t задача имеет положительное решение.

1428. Машина стоимостью p руб. может работать t лет без ремонта. Если машину по прошествии t лет отремонтировать за q руб., то срок ее службы увеличится до T лет. Найти условие, при котором затраты на ремонт оправдаются.

1429. 1) Два пешехода вышли одновременно один из A в B, а второй из B в A. Они двигаются равномерно с разными скоростями. После встречи до конца пути первому осталось идти 16 *мин*, а второму 9 *мин*. Сколько времени требуется каждому пешеходу, чтобы пройти путь AB?

2) Решить уравнение $k^2x + 3 = k(x + 3)$.

3) Решить уравнение алгебраически и графически:

$$|x - 1| = 2x - 3.$$

4) Если $x > 3$, то $\frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} > \frac{1}{3}$. Доказать.

1430. 1) В 9 *ч* от причала по реке отошла лодка, и одновременно в воду с нее упала шляпа. Через 15 *мин* на лодке заметили пропажу и повернули обратно. В какой момент времени лодка подошла к шляпе? Показать, что решение задачи не зависит от того, отошла ли лодка по течению или против течения реки.

2) Решить уравнение алгебраически и графически:

$|2x-3|=5.$

3) Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{2}-\dfrac{5-x}{3}>\dfrac{4x}{5}+\dfrac{5(x-1)}{6}, \\ \dfrac{3x-5}{7}+1+\dfrac{7-5x}{14}<\dfrac{x-1}{3}. \end{cases}$$

4) Доказать, что полупериметр треугольника больше каждой из его медиан.

1431. 1) Если число товарных вагонов в парке уменьшить на $10a$, то отношение числа товарных вагонов к числу пассажирских вагонов будет равно a. Если же число пассажирских вагонов увеличить в 5 раз, то пассажирских вагонов будет больше, чем товарных на 100. Сколько было товарных и сколько пассажирских вагонов в парке, если $a>2$ и a — целое число?

2) Решить алгебраически и графически неравенство

$$|x-1|+x>3.$$

Определить, при каких значениях a уравнение

$$\frac{3}{a-2x}=\frac{5}{ax-4}$$

имеет положительные решения.

1432. 1) Найти двузначное число, в котором цифра десятков в два раза меньше цифры единиц и отношение этого числа к числу обращенному равно a. Выяснить, при каком значении a задача возможна.

2) Дана система двух уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} (k-2)x+2y=4+3k, \\ x+(k-3)y=8. \end{cases}$$

Определить, при каких значениях параметра k эта система будет:

а) определенна; б) неопределенна; в) несовместна.

3) Доказать неравенство

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}>6,$$

где $x>0$, $y>0$, $z>0$ и $x\neq y\neq z$.

4) При каких значениях k прямые $2x+3y=k$ и $x+y=6$ пересекаются в точке, координаты которой положительны?

Задачи для контрольных работ

1433. 1) Решить неравенства алгебраически и графически:

а) $2x-3<x-1$; б) $|0{,}5x-2|>1$.

2) Доказать неравенство

$$\frac{x^2}{a}+\frac{a^2}{x}\geqslant a+x, \text{ если } a>0,\ x>0.$$

3) Если от некоторого двузначного числа отнять его третью часть, то в результате получится число, большее 29, но меньшее 32. Найти это число.

1434. 1) Решить неравенства алгебраически и графически:

а) $0{,}5x+1>3-x$; б) $|2x-2|<3$.

2) Доказать неравенство

$$x^3+y^3\geqslant xy(x+y), \text{ если } x>0,\ y>0.$$

3) В двузначном числе цифра десятков на 3 больше цифры единиц. Найти это число, если известно, что оно больше 35 и меньше 74.

1435. 1) Исследовать уравнение $ax+5=4x-1$ в зависимости от параметра a.

2) Определить, при каких значениях аргумента x функция $y=\frac{x+2}{x+3}$ больше $\frac{1}{2}$.

3) В одном совхозе 48 сеялок, в другом 12. Первый совхоз передал второму несколько сеялок, и тогда в первом стало сеялок в a раз больше, чем во втором. Сколько сеялок передал первый совхоз второму, если a — целое число?

1436. 1) Исследовать уравнение $k(x+1)+2=6(x+1)$ в зависимости от параметра k.

2) Определить, при каких значениях аргумента x функция $y=\frac{2x-1}{x+5}$ меньше 1.

3) В одной бригаде совхоза 22 трактора, в другой 7. На период сева в каждую бригаду добавили по одинаковому количеству тракторов, и тогда в первой бригаде их стало в a раз больше, чем во второй. Сколько тракторов добавили в каждую бригаду, если известно, что a — целое число?

1437. 1) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} |x|-y-2=0, \\ x-2y+2=0. \end{cases}$$

Дать графическое истолкование решения.

2) Определить, при каких значениях параметра k система уравнений

$$\begin{cases} (k+2)x+3y=9+3k, \\ x+(k+4)y=2 \end{cases}$$

а) имеет единственное решение; б) имеет бесконечное множество решений; в) не имеет решений.

1438. 1) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+2y-6=0, \\ |x-3|-y=0. \end{cases}$$

Привести геометрическую иллюстрацию решения.

2) При каких значениях m система

$$\begin{cases} (m-1)x+2my+2=0, \\ 2mx+(m-1)y-m+1=0 \end{cases}$$

а) имеет единственное решение, б) имеет бесчисленное множество решений, в) не имеет решений.

Действительные числа. Квадратные уравнения

1439. 1) Может ли число быть:

а) противоположным самому себе; б) обратным самому себе? Указать все такие числа.

2) Для всякого ли числа существует: а) противоположное ему число; б) обратное ему число?

1440. Даны два числа: —0,6 и —0,62. Указать какое-нибудь число: 1) меньшее меньшего из данных чисел; 2) большее бо́льшего из них; 3) заключенное между данными числами.

1441. Какое число надо вычесть из a, чтобы получить противоположное ему число?

1442. Выполнить указанные действия:

$$\frac{\left(7\frac{7}{24}-3\frac{5}{18}-3\frac{17}{20}\right):3\frac{5}{18}+1{,}5375:\frac{3}{4}-1\frac{1}{4}}{12\frac{1}{3}+50\frac{1}{6}:7-14{,}911:3{,}7+44\cdot 0{,}2265\cdot\frac{5}{11}}$$

и убедиться, что полученный результат меньше $\sqrt{0{,}002}$.

1443*. Дан отрезок, равный единице. Построить отрезки, равные следующим числам: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{10}$.

1444. Мачта телевизионного центра высотой 180 *м* находится от телезрителя на расстоянии 60 *км*. Будет ли уверенный прием (возможный в условиях прямой видимости) на антену высотой 15 *м*, если дальность D прямой видимости в километрах рассчитывается по формуле $D = 4{,}1 \cdot (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})$, где h_1 и h_2 — высоты установки передающей и принимающей антенны в метрах?

1445 *. Дано выражение

$$N = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2\ldots}}}.$$

1) Показать, что $N = \sqrt{2}$.

2) Найти рациональное приближение $\sqrt{2}$ с точностью до 0,001 путем вычисления значения выражения N.

1446 *. Найти основание системы счисления, если $534_x = 312_8$.

1447. Решить уравнение

$$(7 - 4\sqrt{3})x^2 + (2 - \sqrt{3})x - 2 = 0.$$

1448. Доказать, что корни уравнения $ax^2 + (a+2)x + 1 = 0$ действительные и неравные при всяком значении a.

1449. В квадратном уравнении $x^2 - x + a = 0$ определить a так, чтобы $x_1^2 + x_2^2 = 25$, где x_1 и x_2 — корни данного уравнения.

1450. Найти значение m, при котором один из корней уравнения $8x^2 - 11x + m^2 + 5m - 14 = 0$ равен нулю.

1451. Для каких значений m разность корней уравнения $2x^2 - (m+1)x + m + 3 = 0$ равна 1?

1452. Сократить дроби:

1) $\dfrac{x^2 - 10x + 25}{2x^2 - 14x + 20}$; 2) $\dfrac{4x^2 + 5x - 6}{16x^4 - 73x^2 + 36}$.

1453. Решить уравнения:

1) $(x^2 - 2x + 2)^2 - 15(x^2 - 2x + 2) - 34 = 0$;

2) $(x^2 + 5x - 1)^2 + 6x^2 + 30x - 13 = 0$.

1454. Разложить на множители:

$$(x^2 + 7x + 1)^2 - 6x(x^2 + 7x + 1) + 5x^2.$$

1455. Решить уравнения:

1) $\dfrac{x^4 - ab}{x^2} = a - b$, где $a > 0$, $b > 0$;

2) $\dfrac{x^3}{a - b} - \dfrac{4a^2b^2}{ax - bx} = 2(a + b)x$, где $a \neq b$;

3) $(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0$.

1456. Существуют ли такие значения x, при которых $3x^4$ меньше $28x^2$ на 9? Если существуют, то найти их.

1457. Бо́льшая сторона прямоугольника является средним пропорциональным между меньшей стороной и его полупериметром. Найти измерения прямоугольника, если его площадь равна a *м*^{2}.

Решить уравнения.

1458. 1) $\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=4$; 2) $\frac{1}{a}-\frac{1}{x}=\sqrt{\frac{1}{a^2}-\sqrt{\frac{4}{a^2x^2}-\frac{7}{x^4}}}$.

1459. 1) $\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x}+3=0$;

2) $2\sqrt{x^2-3x+6}-\sqrt{x^2-3x+11}=1$;

3) $x^2+x+1+\sqrt{x^2+x+3}=10$;

4) $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{(x-1)^2}=3\sqrt[3]{x^2-1}$;

5) $2\sqrt[5]{(x+1)^2}-2\sqrt[5]{(x-1)^2}=3\sqrt[5]{x^2-1}$.

1460. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+2y^2+3x+4y=34, \\ x^2-2y^2+3x-4y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=7, \\ x^2+xy-4y^2=-2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^4+y^4=82, \\ x+y=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=10, \\ \sqrt{xy}=16. \end{cases}$

1461 *. 1) Найти целые значения x, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} \frac{3x^2-2x+1}{x^2-3x-18}<0, \\ \frac{3x-7}{2}>-2. \end{cases}$$

2) Найти значения x, кратные 5, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} \frac{2x^2-3x-459}{1+x^2}>1, \\ x^2-31x+30<0. \end{cases}$$

1462. Найти координаты точек пересечения линий:

1) прямой $3x-y-5=0$ и параболы $y=\frac{2}{3}x^2-2x+4$;

2) прямой $2x-3y-3=0$ и гиперболы $xy=3$;

3) параболы $y=2x^2-3x-2$ и параболы $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-4\frac{1}{2}$.

1463. Квадратный трехчлен ax^2+bx+c при $x=-1$ обращается в нуль, а при значении $x=\frac{3}{4}$ принимает наименьшее значение, равное $-\frac{49}{8}$. Найти коэффициенты трехчлена.

1464. Вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ имеет координаты $x_0 = 4$; $y_0 = -1$. Одна из ветвей параболы проходит через точку с координатами (0; 15). Найти коэффициенты трехчлена.

1465*. В деревянном бруске, имеющем квадратное основание со стороной a и высоту h ($h < a$), нужно сделать квадратный вырез (рис. 56). Какой должна быть сторона основания этого выреза, чтобы полная поверхность оставшейся части бруска была наибольшей?

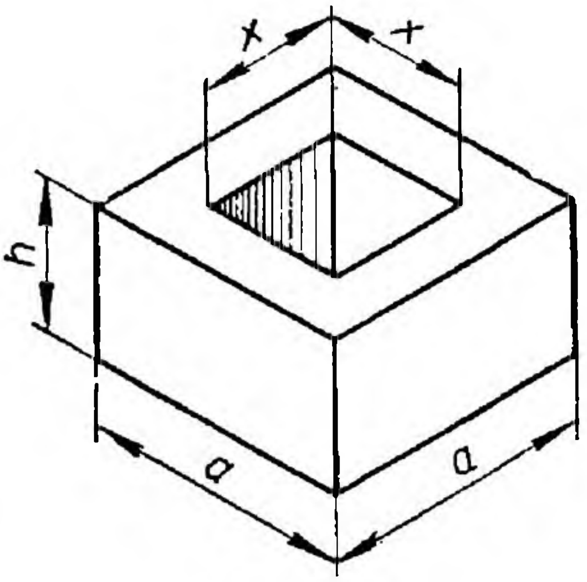


Рис. 56

1466. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0 = 30$ *м/сек*. Через сколько секунд: 1) тело будет на высоте 40 *м*; 2) упадет на землю (ускорение силы тяжести принять равным $g \approx 10$ *м/сек*^{2})?

1467. Турист наметил пройти путь 30 *км* с определенной скоростью. Однако первую половину пути он шел со скоростью на 1 *км/ч* меньшей, а вторую половину — со скоростью на 1 *км/ч* большей, чем намечал. На сколько минут опоздал турист, если на весь путь он затратил 8 *ч*?

1468. Два автомобиля выехали одновременно из пунктов M и N навстречу друг другу. Они встретились в 50 *км* от N, а затем, доехав до M и N, не останавливаясь, вернулись обратно и вновь встретились в 25 *км* от M. Найти расстояние MN, если скорость автомашин считать постоянной.

1469. 1) Составить квадратное уравнение по его корням:

а) $1 + \sqrt{2}$ и $1 - \sqrt{2}$; б) $-\frac{2}{3}$ и 0.

2) Не решая уравнения $6x^2 - x - 2 = 0$, найти сумму квадратов его корней.

3) В уравнении $5x^2 - 2x + c = 0$ один корень больше другого на 0,8. Найти c.

4) Сократить дробь $\frac{5 + 8a - 4a^2}{15 + 4a - 4a^2}$.

1470. 1) Из колхоза в город, расстояние между которыми 35 *км*, выехал велосипедист. Через 30 *мин* из того же колхоза в город выехал второй велосипедист, который проезжал в час на 2 *км* больше первого. Сколько километров в час проезжал каждый велосипедист, если второй догнал первого в 5 *км* от города?

2) Решить уравнение

$$\frac{x^2 + 2m^2}{(x - 2m)^2} = \frac{m}{x - 2m} - \frac{2m(x + m)}{4mx - x^2 - 4m^2}.$$

3) При каком значении c корни x_1 и x_2 уравнения $2x^2 - 11x + c = 0$ удовлетворяют условию: $2x_1 - x_2 = 3{,}5$?

1471. 1) Расстояние по реке между двумя пристанями равно 50 *км*. Отправившись от одной из них, катер возвратился обратно через 5 *ч*, затратив из этого времени 30 *мин* на стоянку у второй пристани. Найти собственную среднюю скорость катера (скорость в стоячей воде), зная, что скорость течения реки равна 2,5 *км/ч*.

2) При каких значениях n корни уравнения

$$x^2-2(2n-3)x-2n+3=0$$

равны между собой?

3) Решить алгебраически и графически неравенство

$$x^2-5x+6<0.$$

1472. 1) Найти два числа, если их среднее арифметическое на 16 меньше большего из этих чисел, а среднее геометрическое на 8 больше меньшего из чисел.

2) Решить уравнение

$$\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-3}=1.$$

3) Решить графически и алгебраически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y=x^2-5. \end{cases}$$

1473. 1) Груз из 14 одинаковых ящиков и одной бочки весит 658 *кГ*. Определить вес ящика и вес бочки, если вес бочки на 4% меньше веса 5 ящиков.

2) Решить графически и алгебраически уравнение

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2.$$

3) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2-3xy+y^2=61, \\ xy=-12. \end{cases}$$

Задачи для контрольных работ

1474. 1) Два автомобиля выезжают одновременно из одного города в другой. Скорость первого на 10 *км/ч* больше скорости второго, и поэтому первый автомобиль приезжает на место на 30 *мин* раньше второго. Определить скорость каждого автомобиля, если известно, что расстояние между городами S *км*.

Каким может быть в этой задаче S, если скорость второго автомобиля больше 45 *км/ч*, но меньше 55 *км/ч*?

2) Определить, при каких значениях n один из корней квадратного уравнения $(2-n)x^2-3x+2n-n^2=0$ равен нулю.

1475. 1) Тракторная бригада должна была вспахать к определенному сроку a *га*, но бригада вспахивала ежедневно на 5 *га* больше, чем намечалось по плану, и поэтому закончила работу на 2 дня раньше срока. Сколько гектаров вспахивала бригада ежедневно?

Каким может быть в этой задаче a, если известно, что бригада вспахивала ежедневно больше 20 *га*, но меньше 30 *га*?

2) Определить, при каких значениях k уравнение $(k+2)x^2+(k^2-4)x-20=0$ имеет корни, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку.

1476. 1) Составить квадратное уравнение, в котором свободный член равнялся бы 0,1 и один корень был бы на 0,3 меньше другого.

2) Исследовать, при каких значениях параметра k уравнение

$$2kx^2+(4k-5)x+2k=0:$$

а) имеет корни действительные и различные; б) имеет корни действительные равные; в) не имеет действительных корней.

3) Показать на графике, что уравнение $x^2-2x+m=0$ при $m<0$ имеет два действительных корня разных знаков, причем абсолютная величина положительного корня больше абсолютной величины отрицательного корня.

1477. 1) Составить квадратное уравнение, в котором коэффициент при неизвестном в первой степени равнялся бы -8 и один корень был бы втрое больше другого.

2) Доказать, что уравнение $3x^2+(3m+n)x+(mn-1)=0$ при всех значениях m и n имеет действительные корни.

3) Показать на графике, что уравнение $x^2-2x+k=0$ при $0<k<1$ имеет два различных положительных корня.

1478. 1) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+3xy=18, \\ xy+4y^2=7. \end{cases}$$

2) Найти четные значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{-x^2+10x-9}{x^2+x+10}>0.$$

3) Показать на графике, что уравнение $\sqrt{x+2}+3=0$ не имеет действительных корней.

1479. 1) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ 2xy-y^2=15. \end{cases}$$

2) Найти целые значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{x^2-7x+6}{x^2+3}<0.$$

3) Решить графически уравнение

$$\sqrt{x+1}=5-x.$$

Степень с рациональным показателем. Степенная функция

1480. Что больше:

1) 10^{20} или 90^{10}; 2) $\left(\frac{1}{8}\right)^{10}$ или $\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$?

1481*. Вычислить, представив подкоренное выражение в виде квадрата разности (суммы) двух чисел:

1) $\sqrt{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{28-16\sqrt{3}}}$;

3) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$; 4) $\sqrt{15-4\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$.

1482. Найти сумму

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

1483. Разложить на множители:

1) $x-y+3\sqrt{x}+3\sqrt{y}$;

2) $x\sqrt[3]{y}+2\sqrt[6]{x^4y^5}+y\sqrt[3]{xy}$.

1484. Доказать, что выражение

$$2m^{-1}n^{-1}\colon (m^{-1}-n^{-1})^2-(m^2+n^2)(m-n)^{-2}$$

не зависит от m и n.

1485. На одном и том же чертеже построить графики функций $y=2$ и $y=|x^{-1}|$. Найти точки пересечения этих графиков.

1486. Решить графически уравнение $x^{-1}=2{,}5-x$.

1487. Решить уравнения:

1) $\dfrac{3x^{\frac{1}{2}}-4}{x^{\frac{1}{2}}+2}=\dfrac{15+3x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+40}$;

2) $(2x+9)^{\frac{1}{2}}\cdot(4x-7)^{\frac{1}{2}}=3x+1$;

3) $(5x+14)^{\frac{1}{2}}+2(5x+14)^{-\frac{1}{2}}=(2x+13)^{\frac{1}{2}}$;

4) $2(x+7)^{\frac{1}{2}}-(5x-1)^{\frac{1}{2}}-3=0$.

1488. Вычислить с точностью до 0,001:

$$\frac{4^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{-\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}}.$$

1489*. Упростить:

1) $\dfrac{a^2\sqrt{b}-b^2\sqrt{a}-3ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(a+b)\sqrt{ab}-2ab}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b});$

2) $\dfrac{8-a}{\left(2\sqrt[6]{a}+\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt[3]{a^2}}-\left[\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}-4}\right]^{-1};$

3) $\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)^{-2}-\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\right)^{-2}.$

Задачи для контрольных работ

1490. 1) Упростить:

а) $\left[(1-x^{-3})^{-1}-(1+x^{-3})^{-1}\right]:x^3(1-x^6)^{-1};$

б) $\dfrac{3^{-1}\cdot 3^0+15\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}}{4-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}.$

2) Выполнить действия:

$$\left(4a^{-3}b-0{,}125^{-1}a^{-2}+4a^{-1}b^{-1}\right)\cdot 2^{-2}ab^{-1}.$$

3) Решить графически уравнение $x^{-2}-|x|=0.$

1491. 1) Упростить:

а) $\left[(1+x^{-2})^{-1}+(1-x^{-2})^{-1}\right]\cdot(x^{-4}-1);$

б) $\dfrac{2^{-3}+\left(-\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}{15\cdot 5^0-(0{,}1)^{-1}}.$

2) Выполнить действия:

$$\left(0{,}04a^{-3}b^2-\frac{2}{25}a^{-2}b+5^{-2}a^{-1}\right):5^{-2}a^{-1}b^2.$$

3) Определить графически, сколько корней имеет уравнение

$$x^{-2}=4-x^2.$$

1492. 1) Упростить выражение

$$\left(\frac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}\right)^{-1}:\left(\frac{2x^{0}-x^{-1}}{x^{2}-x^{-1}}\right)^{-1}$$

2) Вычислить

$$\sqrt{8-2\sqrt{(1+\sqrt{5})^{2}}}.$$

3) Решить уравнение

$$\sqrt{x-7}-\frac{21}{\sqrt{x-7}}+\sqrt{x}=0.$$

1493. 1) Упростить выражение

$$\left(\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{4}}\right)^{-1}$$

2) Вычислить с точностью до 0,001:

$$\frac{3^{\frac{1}{2}}\;9^{-\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{3}}{5\cdot\sqrt[3]{24}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}}.$$

3) Решить уравнение

$$(x-2)(2x-4)^{-\frac{1}{2}}=(x-5)^{\frac{1}{2}}.$$

1494. 1) Упростить выражение

$$\frac{a-b}{\sqrt[4]{a^{3}}-\sqrt[4]{a^{2}b}+\sqrt[4]{ab^{2}}-\sqrt[4]{b^{3}}}:\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}+\frac{1}{\sqrt[4]{b}}\right).$$

2) Вычислить с точностью до 0,001

$$\frac{1}{3}\sqrt{24}-\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-6}.$$

3) Выделить из данных пар чисел пары взаимно обратных чисел

а) $3-\sqrt{7}$ и $3+\sqrt{7}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{2\sqrt{3}}{3}$;

в) $5+2\sqrt{6}$ и $5-2\sqrt{6}$.

1495. 1) Упростить выражение

$$\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$$

2) Составить квадратное уравнение, которое имело бы корни

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

3) Среди следующих иррациональных чисел найти наибольшее число:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{4}}, \quad \frac{1}{\sqrt[5]{5}}.$$

Тригонометрические функции любого аргумента

1496. Верно ли равенство

$$\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 3{,}2?$$

1497. Дано: $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ и $270° < \alpha < 360°$. Найти значения остальных тригонометрических функций.

1498. Существуют ли углы x и y такие, что

$$\sin x \cdot \sin y \cdot \cos(x+y) = 1{,}1?$$

1499. Дано: $\sin\alpha = \sqrt{1-a^4}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Определить $\cos\alpha$. Каким должно быть число a?

1500. Вычислить $\operatorname{ctg}[\arcsin(-0{,}28)]$.

1501. Показать, что величина выражения

$$(a\sin\alpha + b)(a\sin\alpha - b) + (a\cos\alpha + b)(a\cos\alpha - b)$$

не зависит от величины угла α.

1502. Решить уравнения:

1) $\operatorname{tg}(x - 15°) = 1$; 2) $\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$.

1503. Доказать тождества:

1) $\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right)\cdot\left(\operatorname{ctg}\alpha + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right) = \frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$;

2) $\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

3) $\frac{1}{\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha} = \cos^2\alpha$.

1504*. При каких значениях аргумента x на замкнутом интервале $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = 3 - 2\sin^2 x$ принимает наибольшее и наименьшее значения и каковы эти значения?

1505. Найти наименьший положительный период функции

$$y = \frac{1}{2}\cos 2\alpha.$$

1506. Упростить выражение

$$\sin 245^\circ \cdot \cos 205^\circ + \frac{\operatorname{ctg} 295^\circ}{\operatorname{tg} 155^\circ + \operatorname{tg} 115^\circ}.$$

1507. Доказать тождества:

1) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) +$
$+ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \cos^2\alpha;$

2) $\sin^6 x + 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^6 x = 1.$

1508. Вычислить сумму

$$\sin 110^\circ + \sin 130^\circ + \sin 150^\circ + \ldots + \sin 230^\circ + \sin 250^\circ + \sin 270^\circ.$$

1509*. Доказать, что если $(1 - \sin A) \cdot (1 - \sin B) = \cos A \cdot \cos B$, то и $(1 + \sin A) \cdot (1 + \sin B) = \cos A \cdot \cos B$.

1510. Доказать, что выражение $\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$ $\left(x \neq \frac{\pi k}{2}\right)$ не может принимать отрицательных значений.

1511*. Исследовать функцию $y = 2\sin\frac{x}{2} - 1$ и построить ее график.

1512. Для каких значений x в интервале от 0 до 2π выполняется неравенство $|\sin x - 1| > 1$?

1513. Сколько действительных корней имеет уравнение

$$\cos x = |x|?$$

1514. 1) Найти нечетные значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{x^2 - 5x - 6}{3 - \sin x} < 0.$$

2) Найти целые значения x удовлетворяющие неравенству

$$\frac{\cos x - 2}{x^2 - 3x - 10} > 0.$$

Задачи для контрольных работ

1515. 1) На координатной плоскости построить угол, равный -400°, и назвать еще несколько положительных и отрицательных углов, стороны которых соответственно совпадают со сторонами построенного угла. Составить общую формулу таких углов.

2) Пользуясь формулой перехода от радианной меры угла к градусной, найти (с точностью до $1'$) градусную меру угла, равного 2,3 *рад*.

3) Найти по таблицам радианную меру угла, содержащего $154^\circ 42'$.

4) Из множества дуг единичной окружности, заданных формулой $\alpha = \frac{\pi}{6}(3k - 1)$, где $k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$, выделить те,

которые заключены в открытом интервале $(0; \pi)$. Найти координаты концов этих дуг.

1516. 1) Вектор $\overrightarrow{OA}$, повернувшись вокруг точки O, образовал с начальным своим положением угол AOM, равный 2,8 *рад*. Построить чертеж и назвать несколько положительных и отрицательных углов, начальной и конечной сторонами которых являются соответственно векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OM}$. Написать общую формулу таких углов.

2) Пользуясь формулой перехода от градусной меры угла к радианной, найти (с точностью до 0,01 *рад*) радианную меру угла, содержащего 126°.

3) Найти по таблицам градусную меру угла, равного 2,345 *рад*.

4) Из множества дуг единичной окружности, содержащихся в формуле $\alpha = 30^\circ\ (3k - 1)$, где $k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$, выделить те, которые заключены в открытом интервале $(-90^\circ, 90^\circ)$. Найти координаты концов этих дуг.

1517. 1) Исходя из определения тригонометрических функций, найти

$$\text{а) } \cos\frac{4\pi}{3}; \quad \text{б) } \operatorname{tg}(-60^\circ).$$

2) Не находя числовых значений тригонометрических функций, определить, что больше: $\cos 20^\circ$ или $\operatorname{ctg} 20^\circ$. Ответ проиллюстрировать на единичной окружности.

3) Найти числовое значение выражения

$$\sin(\alpha + 10^\circ) + \cos 2\alpha - \operatorname{tg}(3\alpha - 15^\circ) + \operatorname{ctg}(4\alpha + 10^\circ) \text{ при } \alpha = 20^\circ.$$

4) Построить дугу $\operatorname{arcctg}(-1{,}25)$.

5) При каких значениях x в открытом интервале $(0; 2\pi)$ функция $y = 3 - 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ принимает наименьшее значение? Найти его.

1518. 1) Пользуясь определениями тригонометрических функций, вычислить: а) $\sin(-30^\circ)$; б) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}$.

2) Не находя числовых значений тригонометрических функций, установить знак разности $\sin 50^\circ - \operatorname{tg} 50^\circ$. Привести геометрическую иллюстрацию на единичной окружности.

3) Найти числовое значение выражения

$$\operatorname{tg}(\alpha + 20^\circ) \cdot \sin(70^\circ - \alpha) - \cos(6\alpha + 60^\circ) \cdot \operatorname{ctg}(65^\circ - 2\alpha)$$

$$\text{при } \alpha = 10^\circ.$$

4) Построить дугу $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$.

5) При каких значениях x в открытом интервале $(0; 2\pi)$ функция $y = 2 - 3\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ принимает наибольшее значение? Найти его.

1519. 1) Показать, что функция $y = x \cdot \operatorname{tg} x$ является четной, и определить значение функции при $x = -\frac{\pi}{4}$.

2) Привести данные тригонометрические функции к наименьшему положительному аргументу и найти их значения:

а) $\cos 1140°$; $\operatorname{ctg} 7{,}08$ (по таблицам).

3) Исследовать функцию $y = \sin 2x + 1$ и построить ее график.

1520. 1) Показать, что функция $y = x - \sin x$ является нечетной, и определить значение функции при $x = -\frac{\pi}{6}$.

2) Привести данные тригонометрические функции к наименьшему положительному аргументу и найти их значения:

а) $\sin 1110°$; б) $\operatorname{tg} 16{,}24$ (по таблицам).

3) Исследовать функцию $y = \cos 2x - 1$ и построить ее график.

1521. 1) Вычислить $\cos [\operatorname{arcctg}(-0{,}75)]$.

2) Доказать тождество

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha)} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha)} = \sin \alpha - \cos \alpha.$$

3) Найти наибольшее и наименьшее значения выражения

$$\sin^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x.$$

4) Решить уравнение

$$\sin (x + 15°) - \cos (x + 15°) = 0.$$

1522. 1) Вычислить $\sin [\operatorname{arctg}(-2{,}4)]$.

2) Доказать тождество

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - 1)} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha (\operatorname{ctg} \alpha - 1)} = \sin \alpha + \cos \alpha.$$

3) Найти наибольшее значение выражения

$$\cos^4 x - \cos^2 x + \sin^2 x.$$

4) Решить уравнение

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

1523. 1) Привести к наименьшему положительному аргументу и определить: а) $\operatorname{ctg}(-1200°)$; б) $\cos 14{,}48$ (по таблице).

2) Упростить выражение

$$2 \cos 140° \cdot \cos 220° + \sin 230° \cdot \sin 320° (\operatorname{tg} 130° + \operatorname{tg} 400°).$$

3) Доказать тождество

$$\frac{1-2\sin^2(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)}+\frac{1-2\cos^2(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)}=2\cos\alpha.$$

4) В открытом интервале (—90°, 90°) указать угол, тангенс которого равен $\operatorname{ctg} 520°$, и составить общую формулу углов, тангенс которых равен $\operatorname{ctg} 520°$.

1524. 1) Привести к наименьшему положительному аргументу и определить: а) $\operatorname{tg} 1050°$; б) $\sin 10{,}17$ (по таблице).

2) Упростить выражение

$$\cos^2 230° \cdot (1+\operatorname{ctg} 220°)+\sin^2 310° \cdot (1-\operatorname{ctg} 50°).$$

3) Доказать тождество

$$\frac{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)\right]^2-1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos(\pi-\alpha)}=2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

4) В открытом интервале (0°, 180°) указать угол, котангенс которого равен $\operatorname{tg} 660°$, и составить общую формулу углов, котангенс которых равен $\operatorname{tg} 660°$.

Прогрессии

1525. Найти первые десять членов последовательности, если

$$a_n=\begin{cases} n, & \text{когда } n \text{ — четное число,}\\ \frac{n+1}{n}, & \text{когда } n \text{ — нечетное число.}\end{cases}$$

Построить геометрическое изображение членов этой последовательности: 1) на числовой оси; 2) на координатной плоскости.

1526. Написать формулу для общего члена числовой последовательности:

$$\frac{1\cdot3}{2\cdot4},\ \frac{3\cdot5}{4\cdot6},\ \frac{5\cdot7}{6\cdot8},\ \frac{7\cdot9}{8\cdot10},\ \ldots.$$

1527. Вычислить первые пять членов числовой последовательности, общий член которой выражается формулой

$$a_n=2^{-n}\cdot\cos n\pi,$$

и построить геометрическое изображение этой последовательности точками числовой оси.

1528. Общий член последовательности выражается одной из следующих формул:

$$1)\ x_n=\frac{2n+1}{n+2};\quad 2)\ x_n=\frac{3n^2+2n+1}{n^2+2n+3};\quad 3)\ x_n=\frac{4n+1}{\sqrt{n^2+n-1}}.$$

Написать первые четыре члена и найти предел каждой последовательности.

1529. Дана окружность радиуса R. Найти апофему k_n правильного n-угольника, вписанного в окружность. Пользуясь тригонометрическими формулами, выяснить, к какой постоянной величине стремится последовательность длин апофем k_n при неограниченном возрастании n. Вычислить величину отношения $k_n : R$ при некоторых значениях n и заполнить таблицу.

Таблица 11

n	3	6	18	20	30	60	90
$180° : n$							
$k_n : R$							

1530. Могут ли числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ быть членами (не обязательно соседними) арифметической прогрессии?

1531. Найти первый член a_1 арифметической прогрессии и ее разность, если $a_2 - 3a_1 = 14{,}5$; $a_6 + 3a_3 = 3{,}5$.

1532. Найти сумму всех членов арифметической прогрессии, в которой первый член, разность и число членов прогрессии равны между собой, а последний член равен 2601.

1533. Прямоугольный лист разлинован на квадраты так, что их в длину листа помещается 12, а в ширину 10. В квадраты вписывают нечетные числа, начиная с единицы. Какое число будет написано в последнем квадрате и чему равна сумма всех написанных чисел?

1534. Четвертый член арифметической прогрессии 5, девятый член равен -10. Сколько членов этой прогрессии нужно взять, чтобы сумма их равнялась 39?

1535. Первый член арифметической прогрессии равен 36, а разность равна -12. Определить число членов прогрессии, если их сумма равна 60.

1536. Найти сумму первых ста натуральных чисел, которые при делении на 3 дают в остатке единицу.

1537. Сумма трех первых членов убывающей арифметической прогрессии равна 9, а их произведение равно -21. Найти первый член и разность прогрессии.

1538. Сумма третьего и восьмого членов арифметической прогрессии равна 0,6, а сумма первых одиннадцати ее членов равна 2,2. Начиная с какого номера члены этой прогрессии отрицательные?

1539*. Пользуясь формулой $(q+1)^3 = q^3 + 3q^2 + 3q + 1$, найти сумму квадратов всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

1540*. Пользуясь формулой $(q+1)^4 = q^4 + 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1$, показать, что $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

1541*. Найти сумму всех двузначных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 5.

1542*. Доказать, что если числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ образуют арифметическую прогрессию, то

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

1543. Образуют ли прогрессию следующие числа:

1) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$; 2) $\sin\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{3}$?

1544. Убедиться, что следующие числа образуют геометрическую прогрессию:

1) $2^{\sin^2\frac{\pi}{6}}, 2^{\sin^2\frac{\pi}{4}}, 2^{\sin^2\frac{\pi}{3}}$;

2) $\pi^{\cos^2\frac{\pi}{3}}, \pi^{\cos^2\frac{\pi}{4}}, \pi^{\cos^2\frac{\pi}{6}}$.

1545. Найти сумму первых шести членов геометрической прогрессии, в которой произведение первого члена на третий равно 9, а сумма третьего члена с четвертым равна 2,25.

1546. Первый член геометрической прогрессии равен 3, а последний равен 24. Определить знаменатель прогрессии, если ее сумма на 43 больше знаменателя.

1547. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют убывающую геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель с точностью до 0,01.

1548. Сумма трех первых членов возрастающей геометрической прогрессии равна $3+\sqrt{2}$, а их произведение равно $2\sqrt{2}$. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

1549*. 1) Показать, что $\frac{1-a^n}{1-a}=1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}$.

2) Вычислить: а) $\frac{1-a^7}{1-a}$; б) $\frac{x^3-x^{11}}{x^3-x^4}$.

1550*. Разложить на целые множители разность

$$(1+a+a^2+\ldots+a^n)^2-a^n.$$

1551. Найти углы прямоугольного треугольника, если синусы этих углов образуют: 1) арифметическую прогрессию; 2) геометрическую прогрессию.

1552*. Определить стороны треугольника, если они выражаются целыми числами, образующими геометрическую прогрессию, причем произведение этих чисел равно 216.

1553*. Определить стороны треугольника, если они выражаются целыми числами, образующими арифметическую прогрессию, причем периметр треугольника равен 15.

1554*. Найти четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую и если сумма крайних членов равна 14, а сумма средних равна 12.

1555. Из точек M и N одновременно начали двигаться два тела навстречу друг другу. Первое тело проходило каждую секунду 9 *м*, а второе в первую секунду прошло 5 *м*, а в каждую последующую проходило на 1,5 *м* больше, чем в предыдущую. Через сколько секунд оба тела встретятся, если расстояние между M и N равно 180 *м*?

1556. 1) Из пункта A движется прямолинейно тело. В первую минуту оно прошло 3 *м*, а в каждую следующую минуту скорость его увеличивается на 6 *м*. Через 5 *мин* после выхода первого тела из того же пункта в противоположном направлении вышло второе тело. В первую минуту оно прошло 54 *м*, а в каждую последующую минуту скорость его возрастает на 3 *м*. Через сколько минут после выхода второго тела оба тела будут находиться на одинаковом расстоянии от пункта А?

2) Решить уравнение

$$(2x+1)+(2x+2)+(2x+3)+\ldots+(2x+15)=15x+150.$$

1557. 1) Два тела A и B, находясь на расстоянии 13 *м* друг от друга, начали одновременно двигаться в одну и ту же сторону. Скорость тела A в первую секунду была равна 25 *м*, а в каждую последующую возрастала на 0,5 *м*. Скорость тела B в первую секунду была равна 30 *м*, а в каждую следующую убывала на 0,5 *м*. Через сколько секунд тело A догонит тело B?

2) Обратить смешанную периодическую дробь 3,21(3) в обыкновенную. Решение обосновать.

1558. 1) Найти четыре числа, если первые три из них составляют арифметическую прогрессию, а последние три — геометрическую. Известно, что разность арифметической прогрессии равна 4, а знаменатель геометрической прогрессии равен $\frac{4}{3}$.

2) Четвертый член арифметической прогрессии равен -1, а девятый равен 14. Сколько нужно взять членов этой прогрессии, чтобы их сумма равнялась 35?

3) Дана прогрессия $\div 2;\ 7;\ 12;\ 17;\ \ldots$. Начиная с какого номера ее члены будут больше 1000?

4) Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $(2+\sqrt{2});\ (\sqrt{2}+1);\ \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ \ldots$

Задачи для контрольных работ

1559. 1) Произведение первого члена убывающей арифметической прогрессии на ее разность равно -22, а сумма первых семи ее членов равна 35. Начиная с какого номера члены этой прогрессии отрицательны?

2) Найти сумму первых 25 членов арифметической прогрессии, в которой тринадцатый член равен 15.

3) Решить уравнение

$$3+7+11+\ldots+x=136.$$

1560. 1) Сумма восьми членов возрастающей арифметической прогрессии равна —24, а произведение первого члена на разность прогрессии равно —20. Начиная с какого номера члены этой прогрессии неотрицательны?

2) В арифметической прогрессии $a_5=12$, $a_{12}=5$, найти семнадцатый член прогрессии.

3) Найти сумму n членов прогрессии:

$$\frac{n-1}{n};\ \frac{n-2}{n};\ \frac{n-3}{n};\ \ldots.$$

1561. 1) Сумма первых 3 членов геометрической прогрессии, все члены которой — положительные числа, равна 21. Третий член прогрессии больше первого на 9. Сколько членов этой прогрессии надо взять, чтобы их сумма была равна 189?

2) Смешанную периодическую дробь 3,20(6) обратить в обыкновенную дробь. Решение обосновать.

3) Между числами 2 и 162 вставить три средних геометрических.

1562. 1) Первый член геометрической прогрессии, все члены которой — положительные числа, равен 1, а последний ее член 16. Определить число членов этой прогрессии, если ее сумма на 29 больше знаменателя прогрессии.

2) Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}};\ 1;\ \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}};$$

3) Показать, что последовательность, общий член которой выражается формулой $a_n=2\cdot 3^n$, есть геометрическая прогрессия. Найти сумму четырех членов этой прогрессии.

1563. 1) Сумма трех чисел, составляющих убывающую арифметическую прогрессию, равна 3. Если третье число увеличить на $\frac{1}{30}$, то полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Сколько членов арифметической прогрессии надо взять, чтобы их сумма была равна 2,2?

2) Найти арифметическую прогрессию, если сумма третьего и шестого членов ее равна 2, а сумма четвертого и девятого членов равна —14.

3) Пользуясь формулой общего члена последовательности $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2+1}$, написать восемь первых ее членов. Будет ли число $-\frac{1}{145}$ членом этой последовательности?

4) Общий член числовой последовательности выражается формулой

$$a_n = 2^{-n} \cdot \sin\frac{\pi}{2}(2n+1).$$

Вычислить первые четыре члена этой последовательности и построить ее геометрическое изображение точками числовой оси.

1564. 1) Три числа, сумма которых равна 7, составляют возрастающую геометрическую прогрессию. Если бы большее из этих чисел было на единицу меньше, то числа составили бы арифметическую прогрессию. Сколько членов геометрической прогрессии надо взять, чтобы их сумма была равна 255?

2) Сумма третьего и седьмого членов арифметической прогрессии равна 12, а пятый ее член больше второго в два раза. Найти первый член и разность этой прогрессии.

3) Дана последовательность $1; \frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{4}{7}; \dots$. Написать возможно более простую формулу для общего члена данной последовательности и, пользуясь этой формулой, найти ее сотый член.

4) Найти пределы последовательностей:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2+10}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^3+1}.$$

8

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

§ 29. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ СУММЫ И РАЗНОСТИ АРГУМЕНТОВ

Теоремы сложения для синуса и косинуса

1565. В координатной плоскости даны два единичных вектора e_1 и e_2, образующих с осью абсцисс углы, равные соответственно α и β (рис. 57).

1) Исходя из определения скалярного произведения двух векторов, найти скалярное произведение $e_1 \cdot e_2$ данных векторов.

2) Выразить координаты векторов e_1 и e_2 через тригонометрические функции углов α и β и определить скалярное произведение этих векторов в координатах.

3) Сравнивая полученные результаты, доказать формулу

$$\cos(\alpha - \beta) = \\ = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

4) Почему эта формула, выведенная при определенном положении векторов e_1 и e_2 на координатной плоскости, остается верной и для любого другого расположения этих векторов?

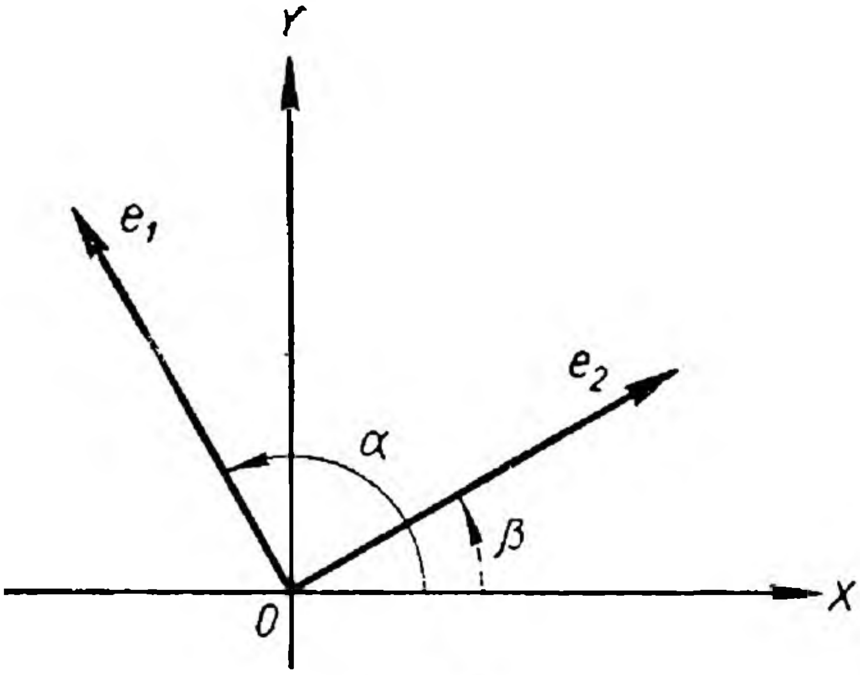


Рис. 57

5) Пользуясь формулой косинуса разности двух аргументов α и β, вывести формулу для косинуса суммы тех же аргументов.

1566. Упростить: 1) $\cos(60^\circ - \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha)$;

$$2)\ \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right).$$

1567. α и β — острые положительные углы, $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ и $\sin\beta = \frac{3}{5}$. Вычислить: 1) $\cos(\alpha+\beta)$; 2) $\cos(\alpha-\beta)$.

1568. Дано: $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$; $270° < \alpha < 360°$.
Вычислить: 1) $\cos(60°+\alpha)$; 2) $\cos(60°-\alpha)$.

1569. Вычислить $\cos 15°$, представив $15°$ как разность $60° - 45°$.

1570. Вычислить $\cos 75°$, представив $75°$ как сумму $30° + 45°$.

1571. Вычислить $\cos 105°$, представив $105°$ как сумму $45° + 60°$.

1572. Дано: $\sin\alpha = 0{,}6$; $\sin\beta = -0{,}28$; $0° < \alpha < 90°$ и $180° < \beta < 270°$. Вычислить: 1) $\cos(\alpha+\beta)$; 2) $\cos(\alpha-\beta)$.

1573. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = -3\frac{15}{16}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{33}{56}$; $90° < \alpha < 180°$ и $0° < \beta < 90°$.
Вычислить: 1) $\cos(\alpha+\beta)$; 2) $\cos(\alpha-\beta)$.

1574. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{8}{15}$; $\operatorname{ctg}\beta = -\frac{7}{24}$; $0° < \alpha < 90°$ и $90° < \beta < 180°$.
Вычислить: 1) $\cos(\alpha+\beta)$; 2) $\cos(\alpha-\beta)$.

1575. Дано: $\cos\alpha = \frac{1}{9}$; $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{2}{7}$; $0° < \alpha < 90°$ и $0° < \beta < 90°$. Найти $\cos\beta$.

1576. Пользуясь формулами косинуса суммы и разности двух аргументов, доказать следующие формулы приведения:

1) $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$;
2) $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$;
3) $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$;
4) $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$;
5) $\cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha$;
6) $\cos(270° + \alpha) = \sin\alpha$;
7) $\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$.

1577. Пользуясь формулой косинуса суммы двух аргументов, доказать формулу (задача 1205)

$$\cos(\alpha + k\pi) = \begin{cases} \cos\alpha, & \text{если } k = 2n; \\ -\cos\alpha, & \text{если } k = 2n+1. \end{cases}$$

1578. Вычислить:

1) $\cos(\arcsin 0{,}6 + \arccos 0{,}8)$;
2) $\cos(\arccos 0{,}28 - \operatorname{arctg} 0{,}75)$;
3) $\cos\left(\arccos\frac{16}{65} + \operatorname{arcctg}\frac{4}{3}\right)$.

1579*. Выразить через арккосинус:

1) $\arcsin\frac{15}{17} + \arcsin\frac{3}{5}$;
2) $\arccos\frac{5}{13} - \arcsin\frac{4}{5}$;
3) $\operatorname{arctg} 0{,}225 + \arccos 0{,}28$;
4) $\arcsin\frac{15}{17} - \operatorname{arcctg} 1{,}05$.

1580. Синусы двух острых углов треугольника равны соответственно $\frac{20}{29}$ и $\frac{3}{5}$. Найти косинус внешнего угла треугольника, не смежного с двумя данными углами.

1581. Решить уравнения:

1) $\sin x \cdot \sin 2x + \cos x \cdot \cos 2x = 0$;
2) $\sin x \cdot \sin 2x + \cos 3x = 0$;
3) $\cos 1{,}5\,x = \cos 0{,}5\,x \cdot \cos x$;
4) $\cos(45^\circ + 2x) \cdot \cos(60^\circ + x) + \cos(45^\circ - 2x) \cdot \cos(30^\circ - x) = 1$;
5) $\cos(40^\circ + x) + \cos(20^\circ + x) = \cos 10^\circ$.

1582. Пользуясь формулой косинуса разности двух аргументов α и β, доказать формулу $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

1583. Упростить:

1) $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)$;
2) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

1584. α и β — острые положительные углы; $\sin\alpha = 0{,}8$; $\sin\beta = 0{,}96$. Вычислить: 1) $\sin(\alpha + \beta)$; 2) $\sin(\alpha - \beta)$.

1585. Дано: $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Вычислить: 1) $\sin(\alpha + 45^\circ)$; 2) $\sin(\alpha - 45^\circ)$.

1586. Вычислить: 1) $\sin 15^\circ$; 2) $\sin 75^\circ$; 3) $\sin 105^\circ$.

1587. Вычислить $\sin(30^\circ + \alpha)$, если $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$, причем α — угол 1-й четверти.

1588. Дано: $\cos\alpha = -0{,}6$; $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Найти $\sin(60^\circ - \alpha)$.

1589. Определить $\sin 35^\circ$, если $\sin 10^\circ = p$.

1590. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{16}{63}$; $\operatorname{ctg}\beta = -1\frac{23}{33}$; $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; $90^\circ < \beta < 180^\circ$.

Найти: 1) $\sin(\alpha + \beta)$; 2) $\sin(\alpha - \beta)$.

1591. Дано: $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = -0{,}1\sqrt{2}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Найти $\sin\alpha$.

1592. Пользуясь формулами синуса суммы и разности двух аргументов, доказать следующие формулы приведения:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$;
2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$;
3) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$;
4) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$;
5) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$;
6) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$;
7) $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$.

1593. Пользуясь формулой синуса суммы двух аргументов, доказать формулу (задача 1204)

$$\sin(\alpha + k\pi) = \begin{cases} \sin\alpha, & \text{если } k = 2n, \\ -\sin\alpha, & \text{если } k = 2n + 1. \end{cases}$$

1594. Вычислить:

1) $\sin\left[\arcsin\frac{15}{17}+\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right]$;

2) $\sin\left(\arccos\frac{7}{25}-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$;

3) $\sin[\operatorname{arcctg}(-1{,}05)-\operatorname{arctg}2{,}4]$.

1595*. Выразить через арксинус:

1) $\arcsin\frac{35}{37}-\arccos\frac{15}{17}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{9}{40}+\arccos\frac{4}{5}$;

3) $\operatorname{arcctg}1\frac{7}{8}-\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$; 4) $\arcsin 0{,}8+\operatorname{arcctg}(-2{,}4)$.

1596. Косинусы двух углов треугольника равны соответственно $\frac{12}{13}$ и $\frac{20}{101}$. Найти синус третьего угла.

1597. Решить уравнения:

1) $\sin x\cdot\cos\frac{x}{2}+\cos x\cdot\sin\frac{x}{2}=0$;

2) $\sin 5x=\sin 2x\cdot\cos 3x$;

3) $\sin x+\sin 2x\cdot\cos 3x=0$;

4) $\sin(35^\circ+x)+\sin(25^\circ+x)=\cos 5^\circ$.

Упростить выражения.

1598. 1) $\sin 12^\circ\cdot\cos 18^\circ+\sin 18^\circ\cdot\cos 12^\circ$;

2) $\sin 65^\circ\cdot\sin 55^\circ+\cos 65^\circ\cdot\cos 55^\circ$.

1599. 1) $\sin 4{,}25\cdot\cos 1{,}11-\sin 1{,}11\cdot\cos 4{,}25$;

2) $\sin\frac{3\pi}{7}\cdot\sin\frac{5\pi}{21}-\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{21}$.

1600. 1) $\sin\varphi\cdot\cos 2\varphi+\cos\varphi\cdot\sin 2\varphi$;

2) $\sin(x+45^\circ)\cdot\cos(x-45^\circ)-\cos(x+45^\circ)\cdot\sin(x-45^\circ)$.

1601. 1) $\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\sin(15^\circ+\alpha)\cdot\cos(15^\circ-\alpha)+\sin(15^\circ-\alpha)\cdot\cos(15^\circ+\alpha)$.

1602. 1) $\sin nx\cdot\cos x\pm\cos nx\cdot\sin x$;

2) $\cos nx\cdot\cos x\mp\sin nx\cdot\sin x$.

1603. 1) $\cos 10^\circ+\cos 11^\circ\cdot\cos 21^\circ+\cos 69^\circ\cdot\cos 79^\circ$;

2) $\sin 20^\circ+\sin 13^\circ\cdot\sin 57^\circ-\sin 33^\circ\cdot\sin 77^\circ$.

1604. 1) $\dfrac{\sin 20^\circ\cdot\cos 5^\circ-\cos 20^\circ\cdot\sin 5^\circ}{\cos 10^\circ\cdot\cos 5^\circ-\sin 10^\circ\cdot\sin 5^\circ}$;

2) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{30}\cdot\cos\frac{\pi}{15}+\sin\frac{\pi}{30}\cdot\sin\frac{\pi}{15}}{\sin\frac{7\pi}{30}\cdot\cos\frac{4\pi}{15}+\cos\frac{7\pi}{30}\cdot\sin\frac{4\pi}{15}}$.

1605. 1) $\dfrac{\cos 18^\circ \cdot \cos 28^\circ + \cos 108^\circ \cdot \sin 208^\circ}{\sin 34^\circ \cdot \sin 146^\circ + \sin 236^\circ \cdot \sin 304^\circ}$;

2) $\dfrac{\sin 56^\circ \cdot \sin 124^\circ - \sin 34^\circ \cdot \cos 236^\circ}{\cos 28^\circ \cdot \cos 88^\circ + \cos 178^\circ \cdot \sin 208^\circ}$.

1606. 1) $\cos(\alpha + \beta) + 2\sin\alpha \cdot \sin\beta$; 2) $\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha \cdot \sin\beta$.

1607. 1) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \sin\beta \cdot \cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta) + \sin\beta \cdot \cos\alpha}$; 2) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos(\alpha - \beta) + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$.

1608. 1) $\dfrac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)}$; 2) $\dfrac{\sin(45^\circ - \alpha) + \cos(45^\circ - \alpha)}{\sin(45^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ - \alpha)}$.

1609. 1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$; 2) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$.

1610. 1) $\sin 6\alpha \cdot \operatorname{ctg} 3\alpha - \cos 6\alpha$; 2) $\cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{4} + \sin\dfrac{\alpha}{2}$.

1611. 1) $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$; 2) $\cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.

1612. 1) $\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ - \sin 100^\circ$;

2) $\cos 10^\circ - 2\cos 50^\circ - \cos 70^\circ$.

Доказать тождества.

1613. 1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha \cdot \cos\beta$;

2) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \cdot \sin\beta$.

1614. 1) $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta$;

2) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha \cdot \sin\beta$.

1615. 1) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;

2) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$.

1616. 1) $\cos^2\alpha - \cos(60^\circ + \alpha) \cdot \cos(60^\circ - \alpha) = 0{,}75$;

2) $0{,}5\sin^2\alpha + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = 0{,}5\cos^2\alpha$.

1617. 1) $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$;

2) $\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha$.

1618. 1) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{1}{\sin 2\alpha}$; 2) $1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{1}{\cos 2\alpha}$.

1619. 1) $\dfrac{\sin(\alpha - \beta) + 2\cos\alpha \cdot \sin\beta}{2\cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha \cdot \sin\beta}{2\cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

1620. 1) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos(45^\circ + \alpha)}{2\sin(45^\circ + \alpha) - \sqrt{2}\sin\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

2) $\dfrac{\sin\alpha + 2\sin(60^\circ - \alpha)}{2\cos(30^\circ - \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$.

1621. 1) $1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$.

1622. 1) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \cdot \cos\beta}$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \cdot \cos\beta}$.

1623. 1) $\cos 15^\circ + \sin 15^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 45^\circ}$; 2) $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ = \cos 45^\circ$.

1624. 1) $\sin^2(\alpha - 30^\circ) + \sin^2(\alpha + 30^\circ) - \sin^2\alpha = 0{,}5$;

2) $\cos^2(\alpha - 30^\circ) + \cos^2(\alpha + 30^\circ) + \sin^2\alpha = 1{,}5$.

1625. 1) $\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha \cdot \cos^3\beta - \cos\alpha \cdot \sin^3\beta = \sin\beta \cdot \cos\beta \cdot \cos(\alpha - \beta)$;

2) $\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \cdot \sin^3\beta - \cos\alpha \cdot \cos^3\beta = \sin\beta \cdot \cos\beta \cdot \sin(\alpha + \beta)$.

1626. 1) $\sin\alpha \cdot \sin(\beta + \gamma) - \sin\beta \cdot \sin(\gamma + \alpha) + \sin\gamma \cdot \sin(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma$;

2) $\cos\alpha \cdot \cos(\beta + \gamma) - \cos\beta \cdot \cos(\gamma + \alpha) + \cos\gamma \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta - \gamma)$.

1627. Выразить $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ и $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ через тригонометрические функции углов α, β и γ.

1628. Вычислить по таблицам:

1) $\sin(\sin 1) \cdot \sin(\sin 2) - \cos(\sin 1) \cdot \cos(\sin 2)$;

2) $\sin(\cos 1{,}5) \cdot \cos(\cos 2{,}2) - \sin(\cos 2{,}2) \cdot \cos(\cos 1{,}5)$.

1629. Дано: $x = A \cdot \sin(m + n)$; $y = A \cdot \sin(m - n)$.
Доказать $x + y = 2A \cdot \sin m \cdot \cos n$.

1630. Показать, что величина каждого из следующих выражений не зависит от величины угла α:

1) $\sin(x + \alpha)(\cos x \cdot \cos\alpha + \sin x \sin\alpha) + \sin(x - \alpha)(\cos x \cdot \cos\alpha - \sin x \sin\alpha)$;

2) $\cos(\alpha - x)(\sin\alpha \cos x + \cos\alpha \sin x) - \cos(\alpha + x)(\sin\alpha \cos x - \cos\alpha \sin x)$.

1631. Показать, что $\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$, если α и β — острые положительные углы.

1632. Доказать неравенства:

1) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ > 1$; 2) $\sin 15^\circ + \sin 45^\circ > 0{,}8$;

3) $\sin 25^\circ + \sin 85^\circ > 0{,}5$.

1633. Дано: $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \cdot \sin\gamma = \cos\gamma$. Найти зависимость между α, β и γ.

1634*. Доказать:

1) $\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$;

2) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos\frac{\sqrt{6} + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$;

3) $\arccos\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{7} = \arccos\left(-\frac{11}{14}\right)$;

4) $\arcsin 0{,}6 - \arcsin 0{,}8 = -\arcsin 0{,}28$.

1635. Доказать тождество

$$\arcsin m + \arccos m = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leqslant m \leqslant 1.$$

Привести геометрические пояснения для случаев: $m > 0$ и $m < 0$.

1636. Выразить через арккосинус $\frac{\pi}{2} - \arcsin 0{,}2$.

1637. Выразить через арксинус $\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{2}{3}$.

Решить следующие уравнения:

1638. $\sin(20° + x) + \sin(20° - x) = 0$.

1639. $\sin(\alpha + x) - \sin(\alpha - x) = 0$.

1640. $\cos(\alpha + x) - \cos(\alpha - x) = 0$.

1641. $\cos(a + \sin x) + \cos(a - \sin x) = 0$.

1642. $\cos(\alpha + x) \cdot \cos(\alpha - x) + \sin^2\alpha = 0{,}5$.

1643. $1 + \sin x \cdot \sin 2x = \cos x \cdot \cos 2x$.

1644. $\cos x \cdot \cos nx - \sin x \cdot \sin nx = 1, \quad n \neq -1$.

1645. $\cos x = \cos 2x \cdot \cos 3x$.

1646. $\sin 2x \cdot \operatorname{ctg} x - \cos 2x = \operatorname{tg} 3x$.

1647. $\cos 2x + \sin 2x \cdot \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

1648. $\sin(x + 30°) + \cos(x + 60°) = 2\cos^2 x$.

1649. $2\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$.

1650. $\cos(120° - x) + \cos(120° + x) = 1$.

1651. Определить вид треугольника ABC, если $\sin C = 2\sin B \cdot \cos A$.

Теорема сложения для тангенса

1652. Используя определение тангенса и теоремы сложения, доказать следующую формулу:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}.$$

1653. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$; $\quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$.

Вычислить: 1) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; 2) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

1654. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$.

Найти: 1) $\operatorname{tg}(45° + \alpha)$; 2) $\operatorname{tg}(45° - \alpha)$.

1655. Вычислить: 1) $\operatorname{tg} 15°$; 2) $\operatorname{tg} 75°$; 3) $\operatorname{tg} 105°$.

1656. Дано: $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$; $\quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Найти: 1) $\operatorname{tg}(\alpha + 45°)$; 2) $\operatorname{tg}(\alpha - 45°)$.

1657. Дано: $\operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ) = 3$. Найти $\operatorname{tg}\alpha$.

1658. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$. Найти: 1) $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$; 2) $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$.

1659. Пользуясь теоремой сложения для тангенса, доказать формулу

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\alpha \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}.$$

1660. Дано: $\operatorname{ctg}\varphi = -0{,}5$. Вычислить: 1) $\operatorname{ctg}(45^\circ + \varphi)$; 2) $\operatorname{ctg}(45^\circ - \varphi)$.

1661. Вычислить $\operatorname{ctg}(\alpha + 45^\circ)$, если $\sin\alpha = -0{,}7\sqrt{2}$ и α — угол 3-й четверти.

1662. Выразить $\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma)$ через $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{tg}\gamma$.

1663. Вычислить:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}25^\circ + \operatorname{tg}20^\circ}{1 - \operatorname{tg}25^\circ \cdot \operatorname{tg}20^\circ}$; 2) $\dfrac{\operatorname{ctg}40^\circ - \operatorname{tg}20^\circ}{\operatorname{ctg}40^\circ \cdot \operatorname{tg}20^\circ + 1}$;

3) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}70^\circ \cdot \operatorname{tg}65^\circ}{\operatorname{tg}70^\circ + \operatorname{tg}65^\circ}$; 4) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}2{,}4\pi \cdot \operatorname{tg}0{,}15\pi}{\operatorname{tg}2{,}4\pi - \operatorname{tg}0{,}15\pi}$.

1664. Определить:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}0{,}5 + \operatorname{arctg}1{,}5)$; 2) $\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{7}\right)\right]$;

3) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{1}{5\sqrt{2}} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{9}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}(\arccos 0{,}8 + \operatorname{arctg}2)$.

1665. Доказать тождество $\operatorname{arctg}m + \operatorname{arcctg}m = \frac{\pi}{2}$. Привести геометрическое пояснение для случаев: $m > 0$ и $m < 0$.

1666. Выразить:

1) $0{,}5\pi - \operatorname{arcctg}2$ через арктангенс;
2) $0{,}5\pi - \operatorname{arctg}0{,}8$ через арккотангенс.

1667*. Проверить равенства:

1) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \operatorname{arctg}\frac{4}{7}$;

2) $\operatorname{arctg}1\frac{1}{8} - \operatorname{arctg}\frac{2}{5} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arcctg}5 = \frac{\pi}{4}$;

4) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{9} + \operatorname{arcctg}\frac{4}{5} = \frac{3\pi}{4}$;

5) $\operatorname{arctg}1 + \operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}3 = \pi$.

1668. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{7}$; α и β — острые положительные углы. Показать, что $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

1669. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}5$; $\operatorname{tg}\beta = 3$; $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; $0^\circ < \beta < 90^\circ$. Найти $\alpha + \beta$.

1670. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 1\frac{2}{3}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{4}$; α и β — острые положительные углы. Найти $\alpha - \beta$.

1671. Найти $\alpha + \beta$, если $\operatorname{tg}\alpha = 5$ и $\operatorname{tg}\beta = 1{,}5$.

1672. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{5}$; $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{9}$; $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; $0^\circ < \beta < 90^\circ$. Доказать, что $\alpha + \beta = 135^\circ$.

1673. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{12}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{5}$; $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{3}$, причем α, β и γ — острые положительные углы. Доказать, что $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ$.

1674. Тангенсы трех положительных острых углов соответственно равны $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{7}$. Доказать, что первый угол равен сумме двух других углов.

Упростить следующие выражения:

1675. 1) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg}\alpha}$.

1676. 1) $\dfrac{\operatorname{tg} 2{,}22 + \operatorname{tg} 0{,}92}{1 - \operatorname{tg} 2{,}22 \cdot \operatorname{tg} 0{,}92}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg} 1{,}47 - \operatorname{tg} 0{,}69}{1 + \operatorname{tg} 1{,}47 \cdot \operatorname{tg} 0{,}69}$.

1677. 1) $\operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha) + \dfrac{1 - \operatorname{ctg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha}$; 2) $\operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha) + \dfrac{1 + \operatorname{ctg}\alpha}{1 - \operatorname{ctg}\alpha}$.

1678. 1) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$;

2) $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$.

1679*. 1) $\dfrac{3\operatorname{ctg}^2 15^\circ - 1}{3 - \operatorname{ctg}^2 15^\circ}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 5^\circ - 1}{\operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ}$.

Доказать тождества.

1680. 1) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$; 2) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ)} = \operatorname{ctg}\alpha$.

1681. 1) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$;

2) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$.

1682. 1) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$;

2) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\beta - 1}{\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{ctg}(\beta - \alpha)$.

1683. 1) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha}$;

2) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - 1}$.

1684. 1) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$;

2) $\dfrac{\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) - \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) + \operatorname{ctg}\beta} = \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}$.

1685. 1) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)+(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=2;$
2) $(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)-(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=2.$

1686. 1) $(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=$
$=2\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}(\alpha-\beta);$

2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=2.$

1687. $0{,}5\cdot\operatorname{ctg}15^\circ-0{,}5\cdot\operatorname{tg}15^\circ=\operatorname{tg}60^\circ.$

1688. Дано: $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}.$

Доказать: 1) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha;$ 2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}=\operatorname{tg}\beta.$

1689. Исключить α из системы равенств:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}(\alpha+x)=a,\\ \operatorname{tg}(\alpha-y)=b.\end{cases}$$

1690. Доказать, что величина выражения $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\cdot\operatorname{tg}\beta}$ не зависит от величины угла β.

1691. Доказать, что если $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$, то:

1) $(1+\operatorname{tg}\alpha)\cdot(1+\operatorname{tg}\beta)=2;$
2) $(1-\operatorname{ctg}\alpha)\cdot(1-\operatorname{ctg}\beta)=2.$

1692. Решить уравнения:

1) $\dfrac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}=1;$ 2) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}+\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\cdot\operatorname{tg}2x-1}=\sqrt{3};$

3) $\operatorname{tg}15^\circ-\operatorname{tg}x=1+\operatorname{tg}15^\circ\cdot\operatorname{tg}x.$

§ 30. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ДВОЙНОГО И ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

Функции двойного аргумента

1693. Следующие функции выразить через функции вдвое меньшего аргумента:

1) $\sin 3\alpha;$ 2) $\sin(\alpha\pm\beta);$ 3) $\cos 0{,}25\alpha;$
4) $\operatorname{tg}54^\circ;$ 5) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{2z}{3}-30^\circ\right);$ 6) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}+x\right);$
7) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-4\gamma\right);$ 8) $\cos(3\beta+0{,}1\gamma);$ 9) $\operatorname{tg}\left(2\alpha-\dfrac{\varphi}{2}\right).$

1694. Выразить $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$:
1) только через $\sin\alpha$; 2) только через $\cos\alpha$.

1695. Выразить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$:

1) через $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$; 2) только через $\sin\frac{\alpha}{2}$; 3) только через $\cos\frac{\alpha}{2}$.

1696. Вычислить:

1) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}96$ и $0° < \alpha < 90°$;

2) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{8}{17}$ и $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$.

1697. Вычислить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2{,}4$ и $90° < \frac{\alpha}{2} < 135°$.

1698. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = -2$. Найти: 1) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 2) $\operatorname{tg} 4\alpha$.

1699. Дано: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{6} = 0{,}5$. Найти $\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\varphi}{3}\right)$.

1700. Дано: $\operatorname{tg} x = -0{,}75$; $\operatorname{tg} y = 2{,}4$; $90° < x < 180°$; $0° < y < 90°$. Определить: 1) $\sin(x - 2y)$; 2) $\cos(2x + y)$.

1701. Пользуясь формулами двойного аргумента, выразить тригонометрические функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

1702. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0{,}5$.

1703. Дано: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 3$. Вычислить: 1) $\sin x + \cos x$; 2) $\sin x - \cos x$.

1704. Уравнение $\sin x + \cos x = 1$ решить двумя способами:

1) применяя формулы двойного аргумента;

2) выразив $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

1705. Доказать, что $\sin 2\alpha < 2\sin\alpha$, если $0° < \alpha < 90°$. Вывести условие, при котором $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$.

1706. Известно, что $0° < \alpha < 90°$. Что больше:

1) $\cos 2\alpha$ или $2\cos\alpha$? При каких значениях α имеет место равенство $\cos 2\alpha = 2\cos\alpha$?

2) $\operatorname{tg} 2\alpha$ или $2\operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha \neq 45°$? При каких значениях α имеет место равенство $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha$?

1707. Вычислить:

1) $\sin\left(2\arcsin\frac{40}{41}\right)$; 2) $\cos(2\arccos 0{,}2)$;

3) $\cos\left(2\arccos\frac{2}{3}\right)$; 4) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} 0{,}28)$.

1708. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен $\frac{15}{17}$; определить синус и косинус угла при вершине.

1709. Выразить соответственно через $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$:

1) $\sin 3\alpha$; $\cos 3\alpha$ и $\operatorname{tg} 3\alpha$; 2) $\sin 4\alpha$; $\cos 4\alpha$ и $\operatorname{tg} 4\alpha$.

1710. Дано: $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 2{,}2$. Найти: 1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$.

1711. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = 2$. Найти: 1) $\sin 4\alpha$; 2) $\cos 4\alpha$.

1712. Вычислить (без таблиц) $\sin 18°$.

1713. Вычислить:

1) $2\sin 15° \cdot \cos 15°$; 2) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$;

3) $\frac{2\operatorname{tg}75°}{1-\operatorname{tg}^2 75°}$; 4) $\cos^2 15° - \cos^2 75°$;

5) $\frac{10\operatorname{tg}0{,}3925}{1-\operatorname{tg}^2 0{,}3925}$.

1714. Вычислить:

1) $1 - 2\sin^2 15°$; 2) $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$;

3) $\frac{1-2\sin 22°{,}5}{2\cos^2 15° - 1}$; 4) $\frac{1+\operatorname{tg}^2 9°}{2\operatorname{tg}9°}$.

Упростить выражения.

1715. 1) $2\sin 40° \cdot \sin 50°$; 2) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

1716. 1) $(\sin 10° + \sin 80°) \cdot (\cos 80° - \cos 10°)$;
2) $[\sin(45° + \alpha) - \sin(45° - \alpha)] \cdot [\cos(45° + \alpha) + \cos(45° - \alpha)]$.

1717. 1) $(\sin\varphi - \cos\varphi)^2 + \sin 2\varphi$;

2) $\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)\right]^2 - \cos 4\alpha$.

1718. 1) $\frac{1+\sin 2x}{(\sin x + \cos x)^2}$; 2) $\frac{(\cos 0{,}75\alpha - \sin 0{,}75\alpha)^2}{1 - \sin 1{,}5\alpha}$.

1719. 1) $1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; 2) $2\cos^2 1{,}5x - 1$.

1720. 1) $1 - 8\sin^2\beta \cdot \cos^2\beta$; 2) $0{,}125 - \cos^2 x + \cos^4 x$.

1721. 1) $\operatorname{tg}\alpha \cdot (1 + \cos 2\alpha)$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha \cdot (1 - \cos 2\alpha)$.

1722. 1) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha$.

1723. 1) $\operatorname{tg}0{,}5\alpha + \operatorname{ctg}0{,}5\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

1724. 1) $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; 2) $\frac{1}{1+\operatorname{ctg}\alpha} - \frac{1}{1-\operatorname{ctg}\alpha}$.

1725. 1) $\frac{2\operatorname{tg}1{,}5\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 1{,}5\alpha}$; 2) $\frac{\operatorname{ctg}(45° - \alpha)}{\operatorname{ctg}^2(45° - \alpha) - 1}$.

1726. 1) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$.

1727. 1) $\frac{\operatorname{tg}2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$.

1728. Существует ли такой угол α, что:

1) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 40°$; 2) $\cos 2\alpha + \sin^2\alpha - 0{,}5 = \cos 40°$?

Доказать тождества.

1729. 1) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$; 2) $4\sin^4\alpha + \sin^2 2\alpha = 4\sin^2\alpha$.

1730. 1) $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 4$; 2) $\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ = 2 \operatorname{tg} 20^\circ$.

1731. 1) $\sin 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \cos 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$; 2) $\operatorname{ctg} \alpha - \sin 2\alpha = \cos 2\alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

1732. 1) $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$; 2) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{1}{\sin 2\alpha}$.

1733. 1) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 0$;

2) $4 \sin^3 \alpha \cdot \cos 3\alpha + 4 \cos^3 \alpha \cdot \sin 3\alpha = 3 \sin 4\alpha$.

1734. 1) $\dfrac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$; 2) $\dfrac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

1735. 1) $\dfrac{1 - 4 \cos^2 \alpha}{4 \sin^2 \alpha - 1} = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 3\alpha$;

2) $\dfrac{\operatorname{ctg} (\alpha - \beta)}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} - \dfrac{\operatorname{ctg} (\alpha + \beta)}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta} = \dfrac{\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta}{2 \sin (\alpha + \beta) \cdot \sin (\alpha - \beta)}$.

1736. 1) $\dfrac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg} \left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$;

2) $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} - \dfrac{1}{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \dfrac{1}{\cos 2\alpha}$.

1737. 1) $\cos \dfrac{\pi}{5} \cdot \cos \dfrac{2\pi}{5} = 0{,}25$; 2) $8 \cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \operatorname{ctg} 10^\circ$.

3) $16 \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = 1$.

1738. $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} 2\alpha + 4 \operatorname{tg} 4\alpha + 8 \operatorname{tg} 8\alpha + 16 \operatorname{tg} 16\alpha + 32 \operatorname{ctg} 32\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$.

1739*. $\operatorname{tg}^2 36^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 72^\circ = 5$.

Проверить справедливость равенств.

1740*. $\sin (2 \arcsin x) = 2x \sqrt{1 - x^2}$, $|x| \leqslant 1$.

1741*. $\cos (2 \arccos x) = 2x^2 - 1$, $|x| \leqslant 1$.

1742*. $\operatorname{tg} (2 \operatorname{arctg} x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$, $x \neq \pm 1$.

1743*. $\sin (2 \operatorname{arctg} x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$,

1744*. $\cos (2 \operatorname{arctg} x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

1745. Найти наименьшие положительные периоды следующих функций:

1) $y = \sin x \cdot \cos x$; 2) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$;

3) $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$; 4) $y = \operatorname{ctg} \dfrac{x}{2} - 2 \operatorname{ctg} x$;

5) $y = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 6}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2}$.

1746. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \sin \left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \cdot \sin \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \sin^4 x - \cos^4 x$;

3) $y = 1 - 8 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$; 4) $y = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x}$.

1747. Доказать, что из всех прямоугольных треугольников с данной гипотенузой наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

1748. Решить уравнения:

1) $4\sin^4 x+\sin^2 2x=2$;

2) $\sin(45^\circ-x)\cdot\sin(45^\circ+x)=0{,}5$; 3) $\sin x\cdot\cos x=\sin 31^\circ$;

4) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2$; 5) $\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2x=2$;

6) $\sin 2x-\frac{\sin 4x}{4\cos^2 x}=1$; 7) $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-x)\cdot\operatorname{tg}(60^\circ+x)=1$;

8) $\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x-\cos 3x}=\sqrt{3}$; 9) $\frac{1+\operatorname{tg}^2(45^\circ-x)}{1-\operatorname{tg}^2(45^\circ-x)}=2$.

Функции половинного аргумента

1749. Следующие функции выразить через косинус вдвое большего аргумента:

1) $\cos 1{,}5x$; 2) $\sin(\alpha-\beta)$; 3) $\cos\pi x$; 4) $\sin\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)$;

5) $\operatorname{tg}\left(2A-\frac{\pi}{8}\right)$; 6) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

1750. Зная, что $\cos 40^\circ\approx 0{,}7660$, найти $\sin 20^\circ$, $\cos 20^\circ$ и $\operatorname{tg} 20^\circ$. Полученные результаты сравнить с соответствующими значениями в таблицах.

1751. Найти без помощи таблиц синус, косинус и тангенс следующих углов: 1) $22^\circ 30'$; 2) 15°; 3) $7^\circ 30'$.

1752. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=\frac{161}{289}$ и $0^\circ<\alpha<90^\circ$;

2) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin 2\alpha=\frac{120}{169}$ и $180^\circ<\alpha<225^\circ$;

3) $\sin\frac{3\alpha}{2}$, $\cos\frac{3\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg} 3\alpha=3\frac{3}{7}$ и $60^\circ<\alpha<90^\circ$.

1753. Зная, что $\cos\alpha=-\frac{7}{25}$ и $180^\circ<\alpha<270^\circ$, определить тригонометрические функции аргумента $0{,}25\alpha$.

1754. Дано: $\cos 2\alpha=-\frac{527}{625}$ и $45^\circ<\alpha<90^\circ$. Вычислить $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$.

1755. В равнобедренном треугольнике косинус угла при вершине равен $\frac{7}{9}$. Определить синус и косинус угла при основании.

1756*. Выразить $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через $\sin\alpha$.

1757. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ выразить соответственно через $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

1758. Определить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-2{,}4$ и $270^\circ<\alpha<360^\circ$.

Доказать тождества.

1759. 1) $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 2) $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

1760. 1) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

1761. 1) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 2) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Показать, что в каждой из этих формул знак $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ совпадает со знаком $\sin\alpha$ для всех допустимых значений α.

Упростить выражения.

1762. 1) $\sqrt{2(1+\cos 2\alpha)}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

2) $\sqrt{0,5-0,5\cos 4\alpha}$, $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

1763. 1) $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha}$; 2) $\sqrt{2\sin 2\alpha+2}$.

1764. 1) $\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$; 2) $\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

1765. 1) $\operatorname{ctg}\alpha\cdot(1-\cos 2\alpha)$; 2) $\operatorname{tg}\alpha(1+\cos 2\alpha)$.

1766. 1) $\frac{\cos 40^\circ}{1+\sin 40^\circ}$; 2) $\frac{1-\sin(30^\circ+2\alpha)}{\cos(30^\circ+2\alpha)}$.

1767. 1) $2\sin^2(45^\circ-\alpha)+\sin 2\alpha$; 2) $2\cos^2(45^\circ-\alpha)-\sin 2\alpha$.

1768. 1) $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos 2\alpha}}-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos 2\alpha}}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

2) $\frac{\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1-\sin\alpha}}-\frac{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1+\sin\alpha}}$, $0^\circ<\alpha<180^\circ$.

1769. 1) $\sqrt{0,5+0,5\sqrt{0,5+0,5\cos\alpha}}$, $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$;

2) $\sqrt{0,5-0,5\sqrt{0,5+0,5\cos\alpha}}$, $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$.

1770. Существует ли такой угол α, что:

1) $\cos^2\alpha-\cos^2 25^\circ=\cos^2(45^\circ-\alpha)-\frac{1}{2}\sin 2\alpha$;

2) $\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{4}+\cos 130^\circ$?

1771*. Вычислить

1) $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right)$; 2) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$;

3) $\operatorname{tg}(0,5\arcsin 0,8)$.

Доказать тождества.

1772. 1) $\dfrac{2\sin 2A - \sin 4A}{2\sin 2A + \sin 4A} = \operatorname{tg}^2 A;$

2) $\dfrac{2\cos 2A - \sin 4A}{2\cos 2A + \sin 4A} = \operatorname{tg}^2 (45^\circ - A).$

1773. 1) $\dfrac{1 + \sin 2A - \cos 2A}{1 + \sin 2A + \cos 2A} = \operatorname{tg} A;$

2) $\dfrac{1 - \sin 2A + \cos 2A}{1 + \sin 2A + \cos 2A} = \operatorname{tg} (45^\circ - A).$

1774. 1) $\dfrac{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha;$

2) $\dfrac{1 - \sin\alpha - \cos 2\alpha + \sin 3\alpha}{\sin 2\alpha + 2\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$

1775. 1) $\sin\alpha(\sin\alpha + \sin\beta) + \cos\alpha(\cos\alpha + \cos\beta) = 2\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2};$

2) $\sin\alpha(\sin\alpha - \sin\beta) + \cos\alpha(\cos\alpha - \cos\beta) = 2\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$

1776. 1) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2};$

2) $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 = 4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$

1777. 1) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2\cdot\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = (\sin\alpha - \cos\alpha)^2\cdot\operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha);$

2) $\dfrac{\sin(45^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ - \alpha)}{\sin(45^\circ - \alpha) + \cos(45^\circ - \alpha)}\cdot\dfrac{\cos(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ + \alpha)}{\cos(45^\circ + \alpha) + \sin(45^\circ + \alpha)} = \operatorname{tg}^2\alpha.$

1778. 1) $4\cos^2\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) + \sqrt{4\sin^4\alpha + \sin^2 2\alpha} = 2, \quad 180^\circ < \alpha < 270^\circ;$

2) $4\sin^2\dfrac{\alpha}{4} - \sqrt{\left(\sin\dfrac{\alpha}{2} + \sin\dfrac{3\alpha}{2}\right)^2 + \left(\cos\dfrac{\alpha}{2} + \cos\dfrac{3\alpha}{2}\right)^2} = 2,$

$180^\circ < \alpha < 270^\circ.$

1779*. Проверить равенства:

1) $\cos\left(\dfrac{1}{2}\arccos x\right) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}, \quad |x| \leqslant 1;$

2) $\cos\left(\dfrac{1}{2}\arcsin x\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right), \quad |x| \leqslant 1;$

3) $\sin\left(\dfrac{1}{2}\arcsin x\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right), \quad |x| \leqslant 1.$

1780. Найти наименьшие положительные периоды функций:

1) $2\sin^2 x - \cos 2x;$ 2) $\sin 2x\cdot(\operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x).$

1781. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $2\cos 2x + \sin^2 x;$ 2) $\sin^2(45^\circ - x) + (\sin x - \cos x)^2.$

1782. Решить уравнения:

1) $1-\cos x=2\sin\frac{x}{2}$; 2) $1+\cos x=2\cos\frac{x}{2}$;

3) $\sin x+\cos x=1$; 4) $\sin x-\cos x=1$;

5) $\sin 2x=\operatorname{tg}^2 x(1+\cos 2x)$; 6) $1-\cos x=\sin x\cdot\sin\frac{x}{2}$.

§ 31. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СУММУ; ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

Преобразовать в суммы следующие произведения.

1783. 1) $\cos 15^\circ\cdot\cos 5^\circ$; 2) $2\cos 18^\circ\cdot\cos 66^\circ$;

3) $2\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{5}$; 4) $2\cos(a+b)\cdot\cos(a-b)$;

5) $2\cos x\cdot\cos(x+1)$; 6) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$.

1784. 1) $\sin 23^\circ\cdot\sin 32^\circ$; 2) $\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{8}$;

3) $2\sin A\cdot\sin 2A$; 4) $2\sin(x+\alpha)\cdot\sin(x-\alpha)$.

1785. 1) $\sin 15^\circ\cdot\cos 10^\circ$; 2) $2\sin 14^\circ\cdot\cos 16^\circ$;

3) $2\cos 3^\circ\cdot\sin 2^\circ$; 4) $\sin(x-y)\cdot\cos(y-x)$.

1786. 1) $\sin 10^\circ\cdot\cos 8^\circ\cdot\cos 6^\circ$; 2) $4\sin 25^\circ\cdot\cos 15^\circ\cdot\sin 5^\circ$;

3) $4\sin 12^\circ\cdot\sin 14^\circ\cdot\sin 16^\circ$; 4) $4\cos 25^\circ\cdot\cos 35^\circ\cdot\cos 15^\circ$.

1787. 1) $8\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ\cdot\cos 4^\circ\cdot\cos 8^\circ$; 2) $4\sin A\cdot\sin 2A\cdot\sin 3A\cdot\sin 4A$.

1788. Пользуясь формулами преобразования произведений тригонометрических функций в сумму, доказать тождества:

1) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$; 2) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$;

3) $2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=1+\sin\alpha$; 4) $2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=1-\sin\alpha$.

1789. Применяя формулы понижения степени синуса и косинуса (задача 1788), доказать тождества задачи 1624.

1790. Преобразовать в суммы тригонометрических функций 1-й степени следующие произведения:

1) $\sin^2 3A$; 2) $2\cos^2(\alpha-45^\circ)$; 3) $4\cos x\cdot\sin^2\frac{x}{2}$;

4) $\sin 4\gamma\cos^2\left(2\gamma+\frac{\pi}{4}\right)$; 5) $\sin^3\alpha$; 6) $4\cos^4\alpha$;

7) $16\sin^2\alpha\cdot\cos^3\alpha$; 8) $32\sin^5\alpha\cdot\cos^3\alpha$.

1791. Пользуясь таблицами, найти числовые значения выражений:

1) $\sin 50^\circ \cdot \sin 15^\circ$; 2) $\sin 33^\circ \cdot \cos 47^\circ$;

3) $2\cos^2 33^\circ 21'$; 4) $\sin^2 26^\circ 34'$;

5) $2\sin 12^\circ \cdot \cos 8^\circ \cdot \cos 10^\circ$; 6) $4\sin^2 10^\circ \cdot \sin 70^\circ$.

Упростить выражения.

1792. 1) $2\sin 10^\circ \cdot \sin 40^\circ + \cos 50^\circ$; 2) $2\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ - \cos 20^\circ$.

1793. 1) $\sin\alpha \cdot (1 + 2\cos 2\alpha)$; 2) $2\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos 3\alpha$.

1794. 1) $\sin 2\alpha + 2\sin\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{12} + \alpha\right)$;

2) $\cos 2\alpha + 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

1795. 1) $\sin^2\alpha - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$;

2) $\cos^2\alpha - \cos(30^\circ + \alpha) \cdot \cos(30^\circ - \alpha)$.

1796. 1) $\cos 2\alpha \cdot \cos^2\alpha - \frac{1}{4}\cos 4\alpha - \frac{1}{2}\cos 2\alpha$;

2) $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cdot \cos 2$.

Доказать тождества.

1797. 1) $\sin 1^\circ + \sin 91^\circ + 2\sin 203^\circ \cdot (\sin 112^\circ + \sin 158^\circ) = 0$;

2) $\cos 35^\circ + \cos 125^\circ + 2\sin 185^\circ \cdot (\sin 130^\circ + \sin 140^\circ) = 0$.

1798. 1) $4\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\frac{3\alpha}{2} = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$;

2) $4\cos 2\alpha \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 30^\circ\right) =$

$= \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$.

1799. 1) $4\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\frac{5\alpha}{2} = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$;

2) $4\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\frac{5\alpha}{2} = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha$.

1800. 1) $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$;

2) $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = 3$.

1801. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$. Доказать: $\sin(\alpha + \beta) = 3\sin(\alpha - \beta)$.

1802. Найти наибольшее и наименьшее значения функций:

1) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{24}\right)$;

2) $y = \sin(ax + b_1) \cdot \cos(ax + b_2)$;

3) $y = \cos\left(3x + \frac{2\pi}{5}\right) \cdot \cos\left(3x + \frac{\pi}{15}\right)$;

4) $y = \cos(ax + b_1) \cdot \cos(ax + b_2)$;

5) $y = \sin(x - 60^\circ) \cdot \sin(x + 60^\circ)$;

6) $y = \sin(ax + b_1) \cdot \sin(ax + b_2)$;

7) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; 8) $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

1803. Найти наименьшие положительные периоды функций:

1) $(2\cos 2x - 1)\cdot\cos x$; 2) $\sin x\cdot\cos 2x$;
3) $\sin^3 x$; 4) $\cos^4 x$.

1804. Решить уравнения:

1) $\cos(x+60^\circ)\cdot\cos(x-60^\circ)+\frac{1}{4}=0$;

2) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$;

3) $\sin 3x\cdot\cos x=\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}$; 4) $\frac{\sin x}{\sin 2{,}5x}=\frac{\cos 0{,}5x}{\cos 2x}$;

5) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin^2 x=0$;

6) $2\cos(45^\circ+x)\cdot\cos(45^\circ-x)-\cos^2 x=0$.

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

Преобразовать в произведение.

1805. 1) $\cos 50^\circ+\cos 20^\circ$; 2) $\cos 16^\circ-\cos 36^\circ$;
3) $\cos 3\alpha+\cos 5\alpha$; 4) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$.

1806. 1) $\sin 28^\circ+\sin 12^\circ$; 2) $\sin 5^\circ-\sin 3^\circ$;
3) $\sin(x+\alpha)+\sin(x-\alpha)$; 4) $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$.

1807. 1) $\sin 20^\circ+\cos 20^\circ$; 2) $\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}$;
3) $\sin A-\cos(A-60^\circ)$; 4) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$.

1808. 1) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$; 2) $\frac{\cos(x-m)-\cos(x+m)}{\cos(x-m)+\cos(x+m)}$;
3) $\frac{\sin 2A-\sin 40^\circ}{\cos 2A+\cos 40^\circ}$; 4) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

1809. 1) $\operatorname{tg}15^\circ+\operatorname{tg}17^\circ$; 2) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}-\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$;
3) $\operatorname{tg}(x+a)+\operatorname{tg}(x-a)$; 4) $\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}(A-30^\circ)$.

1810. Доказать тождества:

1) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta\cdot\sin\alpha}$.

Преобразовать в произведение.

1811. 1) $\operatorname{ctg}24^\circ+\operatorname{ctg}16^\circ$; 2) $\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)-\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha)$;
3) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{24}+\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta$.

1812. 1) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+15^\circ)+\operatorname{tg}(\alpha-15^\circ)}{\operatorname{tg}(\alpha+15^\circ)-\operatorname{tg}(\alpha-15^\circ)}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)-\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}{\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha)+\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)}$;
3) $\dfrac{\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$; 4) $\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}$.

1813. 1) $1+\cos\dfrac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)-1$;
3) $1+\sin\dfrac{\alpha}{4}$; 4) $1-\sin 2\alpha$.

1814. 1) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$; 2) $\dfrac{1-\sin(30^\circ-\alpha)}{1+\sin(30^\circ-\alpha)}$;
3) $\dfrac{1+\cos kx}{\sin kx}$; 4) $\dfrac{1-\cos(x-a)}{\sin(x-a)}$.

1815. 1) $\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\cos 2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha$;
3) $\sin\pi\alpha-\operatorname{tg}\pi\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}(2\alpha+30^\circ)-\cos(2\alpha+30^\circ)$.

1816. 1) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$; 2) $1-\sin\alpha-\cos\alpha$;
3) $1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha$; 4) $1-2\sin\alpha-\cos 2\alpha$.

1817. 1) $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta$; 2) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta$;
3) $\dfrac{1}{\cos^2 x}-\operatorname{ctg}^2 y-1$; 4) $\dfrac{1}{\sin^2 x}-\operatorname{tg}^2 y-1$.

Следующие выражения преобразовать в произведение введением вспомогательного угла.

1818. 1) $0{,}5+\cos\alpha$; 2) $1-2\cos\alpha$; 3) $1+2\sin\alpha$; 4) $1-2\sin\alpha$.

1819. 1) $1\pm\operatorname{tg}\alpha$; 2) $1\pm\operatorname{ctg}\alpha$; 3) $1-\operatorname{tg}^2\alpha$; 4) $1-\operatorname{ctg}^2\alpha$.

1820. 1) $\sqrt{3}+2\cos\alpha$; 2) $1-\sqrt{2}\sin\alpha$; 3) $\sin^2\alpha-0{,}75$;
4) $4\cos^2\alpha-3$.

1821. 1) $\sqrt{3}+\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\alpha-1$; 3) $3-\operatorname{tg}^2\alpha$;
4) $1-3\operatorname{ctg}^2\alpha$.

1822. 1) $\sin x+\sqrt{3}\cdot\cos x$; 2) $\sqrt{3}\cdot\sin x-\cos x$;
3) $a\sin x+b\cos x$; 4) $a\sin\omega x+b\cos\omega x$.

1823. 1) $4\sin\alpha-3\cos\alpha$; 2) $3\sin 20^\circ+4\cos 20^\circ$;
3) $2\sin\alpha-\sqrt{5}\cos\alpha$; 4) $12\sin 3\alpha+5\cos 3\alpha$.

1824. 1) $1-2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\sqrt{3}\cdot\sin\alpha$;
2) $8\sin(45^\circ-A)+15\sin(45^\circ+A)$;
3) $\sqrt{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}$; 4) $\dfrac{c-b\sin\alpha}{c+b\sin\alpha}$.

1825. 1) $\dfrac{a-b}{a+b}$; 2) $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$.

1826. Дано: $\sin\alpha-\sin\beta=m$; $\cos\alpha+\cos\beta=n$.
Найти $\sin(\alpha-\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$.

Преобразовать в произведение.

1827. 1) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)$; 2) $1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)$.

1828. 1) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$; 2) $1+\sin\alpha-(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)$.

1829. 1) $\sin\alpha+\cos 2\alpha+\sin 3\alpha+\cos 4\alpha$;
2) $\cos\alpha+\sin 2\alpha+\cos 3\alpha+\sin 4\alpha$.

1830. 1) $\sin 3\alpha-\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha$; 2) $\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha$.

1831. 1) $\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$;
2) $\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

1832. 1) $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)+\sin(45^\circ-\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)-\sin(45^\circ-\alpha)}$; 2) $\dfrac{\cos(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ-\alpha)}{\cos(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ-\alpha)}$.

1833. 1) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha-\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$;
2) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)}$.

Проверить равенства.

1834. 1) $\sin 35^\circ+\sin 25^\circ=\cos 5^\circ$; 2) $\cos 12^\circ-\cos 48^\circ=\sin 18^\circ$;
3) $\sin 40^\circ+\cos 70^\circ=\cos 10^\circ$; 4) $\cos 20^\circ-\sin 50^\circ=\sin 10^\circ$;
5) $\operatorname{tg} 20^\circ+4\sin 20^\circ=\sqrt{3}$; 6) $\sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg} 20^\circ-4\cos 20^\circ=1$;
7) $\sqrt{3}-2\sin 10^\circ=4\sin 25^\circ\cdot\cos 35^\circ$;
8) $\sqrt{2}+2\sin 15^\circ=2\cos 15^\circ$.

Доказать тождества.

1835. 1) $\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$;
2) $\cos^2(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)=\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$.

1836. 1) $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\dfrac{\alpha}{2}$, если $0^\circ<\alpha<90^\circ$;
2) $\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}=2\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

1837. 1) $\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\operatorname{tg}\dfrac{\beta-\alpha}{2}$; 2) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)$.

1838. 1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\alpha$;
2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}=-\operatorname{ctg}\alpha$.

1839. 1) $1-\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$; 2) $\operatorname{ctg}^2\alpha-1=\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

1840. 1) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$; 2) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-1}=\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)$.

1841. 1) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$; 2) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}$.

1842. 1) $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha=4\cos\alpha\cdot\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$;

2) $\sin\alpha-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha\cdot\cos\frac{3\alpha}{2}$.

1843. 1) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}=\operatorname{tg}4\alpha$;

2) $\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}2{,}5\alpha$.

1844*. $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\ \dots\ +\sin(2n-1)\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\ \dots\ +\cos(2n-1)\alpha}=\operatorname{tg}n\alpha$.

1845*. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ \dots\ +\sin n\alpha=\frac{\sin 0{,}5n\alpha\cdot\sin 0{,}5(n+1)\alpha}{\sin 0{,}5\alpha}$.

1846*. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ \dots\ +\cos n\alpha=\frac{\sin 0{,}5n\alpha\cdot\cos 0{,}5(n+1)\alpha}{\sin 0{,}5\alpha}$.

1847*. Дано: $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)$. Доказать: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}$.

1848. Предполагая, что A, B, C — углы треугольника, доказать тождества:

1) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$;

2) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$;

3) $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C$;

4) $\sin A\cdot\cos B\cdot\cos C+\cos A\cdot\sin B\cdot\cos C+\cos A\cdot\cos B\cdot\sin C=$
$=\sin A\ \ \sin B\cdot\sin C$;

5) $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$;

6) $\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}+$
$+\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$;

7) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$;

8) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2=2\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$;

9) $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$;

10) $\frac{\sin A+\sin B-\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

1849. Тангенсы двух углов треугольника равны соответственно 1,5 и 5. Найти третий угол треугольника.

1850. Углы треугольника связаны соотношением

$$\sin^2 A+\sin^2 B-\cos(A-B)\cdot\cos C-\cos^2 C=0{,}25.$$

Определить угол C.

1851. Преобразовать в произведение $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.

1852. Определить вид треугольника ABC, в котором углы A и B удовлетворяют соотношению

$$\sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B.$$

1853. При каких значениях x на замкнутом интервале $[0; \pi]$ следующие функции принимают наибольшее значение:

1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin x - \cos x$?

Найти это наибольшее значение функции.

1854. Найти наибольшее и наименьшее значения функций:

1) $0,5 \sin 2x + \cos^2 x$; 2) $\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x$;

3) $a \sin x + b \cos x$; 4) $5 \sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 2 \cos^2 x$.

1855. Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

1856. Найти наибольшее значение суммы катетов прямоугольного треугольника, имеющего данную гипотенузу c.

1857. Найти наименьшее значение площади прямоугольного треугольника, имеющего данную высоту h (опущенную на гипотенузу).

1858. При конструировании трансформаторов переменного тока стремятся к тому, чтобы железный сердечник крестообразного сечения возможно больше заполнял внутреннюю область цилиндрической катушки. Принимая радиус сечения катушки равным R, определить размеры x и y сечения сердечника (рис.58).

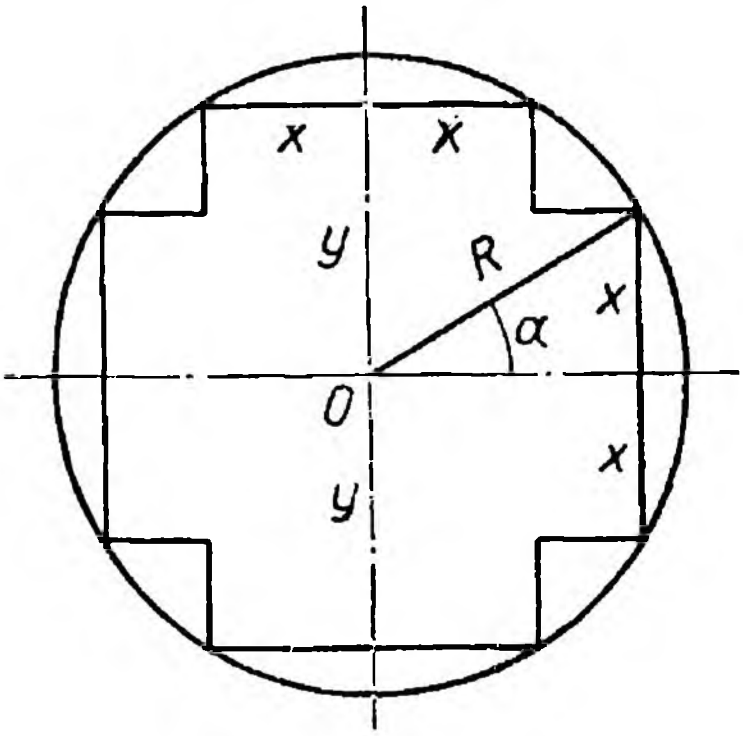


Рис. 58

1859. Решить уравнения:

1) $\cos x + \cos 2x = 0$; 2) $\cos x = \cos 5x$;

3) $\sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x$; 4) $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x = 0$;

5) $\sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{15}\right) = 0$;

6) $1 - \sin 5x = \left(\cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{3x}{2}\right)^2$;

7) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$; 8) $\sin x \cdot \sin 7x = \sin 3x \cdot \sin 5x$.

Лабораторная работа № 8

1) Зная, что $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660$ и применяя формулы половинного аргумента, найти синус и косинус углов $15°$, $7°30'$, $3°45'$, $1°52'30''$ и $0°56'15''$.

2) Пользуясь формулами синуса и косинуса двойного аргумента и теоремами сложения для синуса и косинуса, найти значения синуса и косинуса углов, кратных 0° 56′ 15″, т. е. 0° 56′ 15″, 1° 52′ 30″, 2° 48′ 45″, 3° 45′ 00″, 4° 41′ 15″, ..., 45° 00′ 00″.

3) Используя данные, полученные при вычислении, составить таблицу значений синуса и косинуса с шагом в 0° 56′ 15″.

Таблица 12

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	
0° 00′ 00″			90° 00′ 00″
0° 56′ 15″			89° 03′ 45″
1° 52′ 30″			88° 07′ 30″
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
43° 07′ 30″			46° 52′ 30″
44° 03′ 45″			45° 56′ 15″
45° 00′ 00″			45° 00′ 00″
	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	α

§ 32. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Простое гармоническое колебание

1860. Точка M, находящаяся на окружности радиуса A, движется по этой окружности с постоянной угловой скоростью ω 1/*сек* (рис. 59).

1) Какое движение совершает при этом проекция P точки M на ось oy?

2) Зная, что в некоторый начальный момент времени $t=0$ радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки M составляет с осью абсцисс угол φ_0, определить величину угла φ между вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью абсцисс в любой момент времени t.

3) Составить формулу, выражающую закон изменения отклонения y точки P от центра 0 окружности в зависимости от времени t.

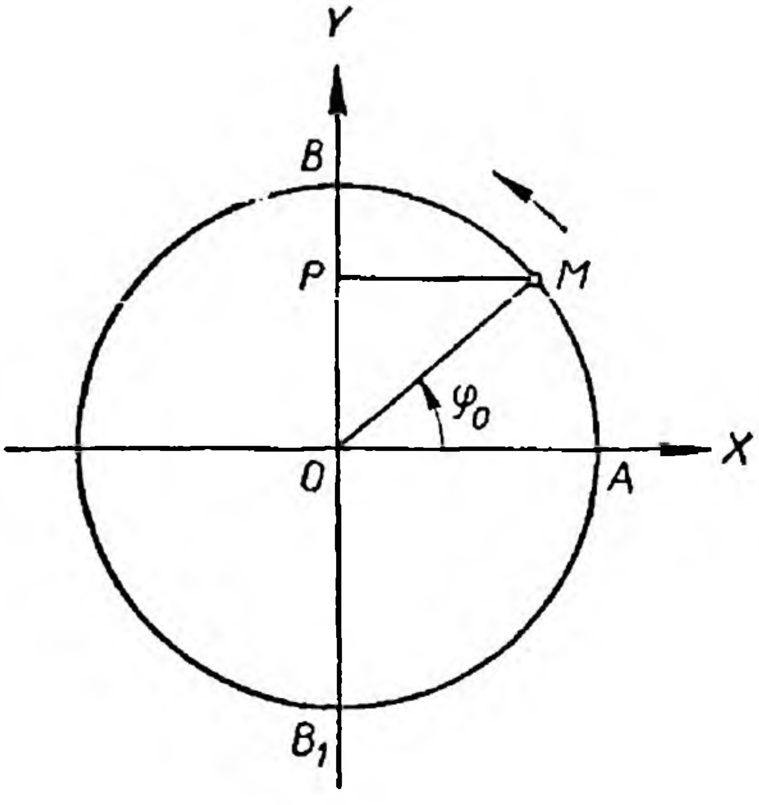


Рис. 59

4) Найти зависимость между угловой скоростью ω точки M и временем T, в течение которого точка P совершит одно полное колебание.

5) Показать, что число $T=\frac{2\pi}{\omega}$ является наименьшим положительным периодом функции $y=A\cdot\sin(\omega t+\varphi_0)$. Какой физический смысл имеет число, обратное T?

6) Определить наибольшее и наименьшее значения функции $y=A\sin(\omega t+\varphi_0)$. Какой физический смысл имеет параметр A?

7) Выяснить физический смысл параметра φ_0 в уравнении $y=A\sin(\omega t+\varphi_0)$.

8) Показать, что функция $y=A\sin(\omega t+\varphi_0)$ является нечетной при $\varphi_0=\pi k$ и четной при $\varphi_0=0{,}5\pi+\pi k$.

1861. Написать уравнение простого гармонического колебания, если амплитуда равна 0,5, а период 0,02 *сек* и начальная фаза $\frac{\pi}{3}$.

1862. Даны три простых гармонических колебания:

$$y_1=\sin\frac{t}{2};\quad y_2=2\sin\frac{t}{2}\quad\text{и}\quad y_3=4\sin\frac{t}{2}.$$

1) Какой период имеет каждое из этих колебаний?

2) Чем отличаются друг от друга каждое из данных колебаний?

1863. Найти амплитуду, период и частоту каждого из следующих колебаний: 1) $y=3\sin t$; 2) $y=3\sin 2t$; 3) $y=3\sin 4t$.

1864. Чем отличаются друг от друга простые гармонические колебания:

1) $y=2\sin\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y=2\sin\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)$;

3) $y=2\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)$; 4) $y=0{,}5\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$?

1865. Найти амплитуду, период, частоту и начальную фазу простого гармонического колебания, заданного уравнением:

1) $y=2\sin 3t$; 2) $y=5\sin 2t$;

3) $y=\sin\pi t$; 4) $y=2{,}1\sin\frac{t}{2}$;

5) $y=3\sin\left(\frac{\pi}{4}t+1\right)$; 6) $y=0{,}1\sin\left(31{,}4t-\frac{\pi}{3}\right)$;

7) $y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t+3\right)$; 8) $y=10\sin\left(0{,}1t+\frac{\pi}{6}\right)$;

9) $y=\frac{1}{3}\sin 2\pi(t-3)$; 10) $y=\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$.

1866. Точка P совершает простое гармоническое колебание вдоль отрезка BB_1. Расстояние y точки P от середины отрезка BB_1 изменяется в зависимости от времени t по закону $y=6\sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)$.

1) Определить положение точки P на отрезке BB_1 в начале движения и по прошествии 1, 2 и 3 *сек*.

2) Через сколько секунд после начала движения точка P в первый раз достигнет точки B_1?

1867. Точка совершает простое гармоническое колебание вдоль отрезка BB_1, равного 10 *см*; расстояние BB_1 точка проходит за 12 *сек*.

1) Составить уравнение движения точки, приняв за исходное ее положение точку B.

2) Определить, на каком расстоянии от своего исходного положения будет находиться движущаяся точка через: а) 4 *сек*; б) 16 *сек*; в) 21 *сек*.

График простого гармонического колебания

1868. Точка совершает простое гармоническое колебание по закону $y=\sin t$.

Построить график этого колебания.

Как изменится график, если уравнение гармонического колебания взять в виде:

1) $y=A\sin t$. Рассмотреть случаи: а) $A>1$; б) $0<A<1$.

2) $y=\sin(t+\varphi_0)$. Рассмотреть случаи: а) $\varphi_0>0$; б) $\varphi_0<0$.

3) $y=\sin\omega t$. Рассмотреть случаи: а) $\omega>1$; б) $0<\omega<1$.

1869. Простое гармоническое колебание задано уравнением

$$y=2\sin\left(3t-\frac{\pi}{2}\right).$$

1) Определить амплитуду, период и начальную фазу данного колебания. 2) Указать, каким преобразованиям надо подвергнуть обыкновенную синусоиду $y=\sin t$, чтобы получить график данного гармонического колебания. 3) Построить схематически график гармонического колебания. 4) Выполнить то же задание относительно простых гармонических колебаний, заданных следующими уравнениями:

а) $y=3\sin 2t$;

б) $y=0,5\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $y=2,5\sin(2t-1)$;

г) $y=\frac{3}{2}\sin\left(\frac{2}{3}t+\frac{\pi}{2}\right)$;

д) $y=-2\sin\left(3t-\frac{\pi}{3}\right)$;

е) $y=2\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$;

ж) $y=4\cos(2t-3)$;

з) $y=-3\cos\left(\frac{2}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)$.

1870. Построить график уравнения электродвижущей силы переменного тока $E=120\sin 100\pi t$.

Сложение колебаний одинаковой частоты

1871. Даны уравнения двух простых гармонических колебаний: $y_1 = 1{,}5 \sin t$ и $y_2 = 2\cos t$.

1) На одном и том же чертеже построить графики этих колебаний.

2) Произведя геометрическое сложение ординат полученных графиков (соответствующих одним и тем же значениям аргумента t), построить график результирующего колебания $y = y_1 + y_2$.

3) Определить по графику амплитуду, период и начальную фазу результирующего колебания и составить его уравнение.

4) Подтвердить результат вычислением.

5) Выполнить то же задание для простых гармонических колебаний: $y_1 = \sqrt{3}\sin\frac{t}{2}$ и $y_2 = -\cos\frac{t}{2}$.

1872. 1) Доказать, что уравнение, выражающее сумму двух гармонических колебаний одинаковой частоты:

$$y_1 = A_1 \sin \omega t \quad \text{и} \quad y_2 = A_2 \cos \omega t,$$

имеет вид:

$$y = A\sin(\omega t + \varphi), \quad \text{где} \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{A_2}{A_1}.$$

2) Пользуясь доказанной теоремой, найти амплитуду, период и начальную фазу колебания $y = \sqrt{3}\sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}$, приведенного в задаче 1871.

1873*. 1) Доказать, что уравнение, выражающее сумму двух гармонических колебаний: $y_1 = A_1\sin(\omega t + \varphi_1)$ и $y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$, имеет вид: $y = A\sin(\omega t + \varphi)$, где $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ и $\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$.

2) Определить, при каком условии амплитуда A результирующего колебания равна: а) сумме амплитуд составляющих колебаний; б) абсолютной величине разности этих амплитуд.

1874. По данным уравнениям двух простых гармонических колебаний одинаковой частоты найти амплитуду и начальную фазу результирующего колебания $y = y_1 + y_2$:

1) $y_1 = 4\sin 5t$ и $y_2 = 3\cos 5t$;

2) $y_1 = 2\sin\frac{t}{2}$ и $y_2 = 2\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)$;

3) $y_1 = \sin\left(\frac{2}{3}t - \frac{\pi}{4}\right)$ и $y_2 = \sin\left(\frac{2}{3}t + \frac{5\pi}{12}\right)$;

4) $y_1 = 2\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ и $y_2 = 3\sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$;

5) $y_1 = 127\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ и $y_2 = -127\sin\omega t$.

1875. Даны два гармонических колебания:

$$y_1 = 10\sin\omega t \text{ и } y_2 = 6\sin(\omega t + \varphi).$$

При каких значениях φ на замкнутом интервале $[0; \pi]$ результирующее колебание $y = y_1 + y_2$ будет иметь амплитуду, равную:

1) 16; 2) 4; 3) 14?

1876. Для разности простых гармонических колебаний

$$y = 3\sin(2t + \varphi_1) - 4\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

построить график при $\varphi_1 = 1$.

При каких значениях φ_1 в открытом интервале $(-\pi; \pi)$ результирующее колебание будет иметь амплитуду, равную:

1) 7; 2) 1; 3) 5?

1877. Цепь питается двумя генераторами переменного тока. Сила тока первого генератора изменяется в зависимости от времени по закону $i_1 = 3\sin\omega t$, сила тока второго генератора — по закону $i_2 = 5\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$. Найти, по какому закону изменяется в зависимости от времени сила тока в цепи и какова максимальная сила тока в цепи.

1878. По проводникам, соединенным „звездой“ (рис. 60), идет электрический ток, причем ток в первом проводнике $i_1 = i\sin\omega t$, во втором $i_2 = i\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ и в третьем $i_3 = i\sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$.

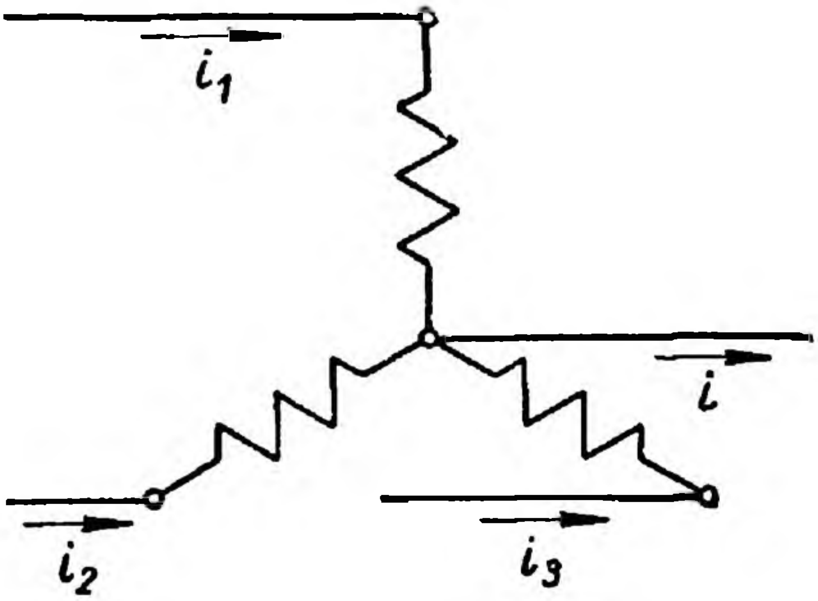


Рис. 60

Найти сумму этих токов (графически и аналитически).

1879. По проводнику идут одновременно два переменных тока:

$$i_1 = i\sin(\omega t + \varphi_1) \text{ и } i_2 = i\sin(\omega t + \varphi_2).$$

Определить, при каком смещении фаз этих токов ток в этом проводнике будет равен нулю. Привести графическую иллюстрацию.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1880. Синусы двух острых углов треугольника равны соответственно $\frac{7}{25}$ и $\frac{4}{5}$. Найти косинус третьего угла треугольника.

1881. Углы α и β острые. Что больше: $\cos(\alpha - \beta)$ или $\cos\alpha + \sin\beta$? Ответ объяснить.

1882. Доказать, что $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1$, если $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.

1883. Доказать тождества:

1) $\sin^2\alpha\cdot\cos^3\alpha=\frac{1}{8}\cos\alpha-\frac{1}{16}\cos 3\alpha-\frac{1}{16}\cos 5\alpha$;

2) $4\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\cos(30^\circ-\alpha)=\sin 3\alpha$.

1884. Решить уравнения:

1) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$;

2) $\sin^4 2x-\cos^4 2x=\sin 4x$.

1885. Преобразовать в произведение:

1) $1-\operatorname{tg}^2\alpha$; 2) $0{,}75-\cos^2\frac{\beta}{2}$;

3) $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha$.

1886. Доказать тождества:

1) $\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{4}\sin 2\alpha$;

2) $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=1$;

3) $\dfrac{4\sin\alpha\cdot\cos\alpha\,(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin 4\alpha$;

4) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+0{,}75\sin^2 2\alpha=1$;

5) $4\cos^4 x+\cos^2 2x-4\cos^2 x\cdot\cos 2x=1$;

6) $\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ=\frac{1}{8}$;

7) $\operatorname{tg} 10^\circ\cdot\operatorname{tg} 50^\circ\cdot\operatorname{tg} 70^\circ=\operatorname{tg} 30^\circ$.

1887. Упростить:

1) $\dfrac{1+\operatorname{tg} 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}$;

2) $2\left(\sin^4 x+\frac{1}{4}\sin^2 2x+\cos^4 x\right)^2-(\sin^8 x+\cos^8 x)$.

1888. Вычислить (без таблиц) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{3}$.

1889*. Доказать тождества:

1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)$;

2) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\operatorname{ctg} x=\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{x}{4}$;

3) $\sin^3 20^\circ+\cos^3 10^\circ=3\sin 20^\circ\cdot\cos^2 10^\circ$;

4) $\dfrac{1-4\sin 10^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ}=\operatorname{tg} 40^\circ$.

1890. Упростить $\sin(\pi n+\alpha)\cdot\cos(\pi n-\alpha)$, $n=0,\ \pm1,\ \pm2$.

1891. Доказать тождества:

1) $\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta=1$;

2) $\dfrac{1}{2\sin 10^\circ}-2\sin 70^\circ=1$;

3) $4\cos\alpha\cdot\cos(60^\circ-\alpha)\cdot\cos(60^\circ+\alpha)=\cos 3\alpha$.

1892. Показать, что величина выражения

$$\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)$$

не зависит от величины угла β.

1893*. Вычислить (без таблиц)

$$\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}.$$

1894. Упростить:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$;

2) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}-\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

1895. Доказать тождества:

1) $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$;

2) $\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot(1+\sin\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\sin 2\alpha$;

4) $\cos\dfrac{2\pi}{15}+\cos\dfrac{4\pi}{15}-\cos\dfrac{7\pi}{15}-\cos\dfrac{\pi}{15}=\dfrac{1}{2}$;

5) $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$;

6) $\sin 2\alpha\cdot\cos\left(30^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(30^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)=\cos\alpha\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{3\alpha}{2}$;

7) $\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}3\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

1896. Выразить через $\sin\alpha$ сумму $\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{3\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{3\alpha}{2}}+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

1897. Вычислить (без таблиц)

$$\cos^2 70^\circ+\cos^2 50^\circ+\cos 70^\circ\cdot\cos 50^\circ.$$

1898. Упростить $\sin 47^\circ+\sin 61^\circ-\sin 11^\circ-\sin 25^\circ$.

1899*. Дано: $\sin\alpha+\sin\beta=b$, $\cos\alpha+\cos\beta=a$.

Найти: 1) $\cos(\alpha+\beta)$; 2) $\sin(\alpha+\beta)$; 3) $\cos(\alpha-\beta)$.

1900. Преобразовать в произведение:

1) $2\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha+\frac{1}{\sin 2\alpha}$;

3) $1+\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}$; 4) $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg}x-3$;

5) $1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}$; 6) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$;

7) $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

8) $1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\sin^2\beta-\cos^4\alpha$;

9) $\sin(A-2B)+\sin(B-2A)-\sin(A+B)$;

10) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$.

1901. Найти зависимость между a, b и c из соотношений:

$$\cos(\alpha+\beta)=a,$$
$$\cos(\beta+\gamma)=b,$$
$$\cos(\gamma+\alpha)=c.$$

1902. Исключить x и y из следующих уравнений:

1) $\sin x+\cos y=a$, $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}y=b$, $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin y}=c$;

2) $\sin x+\sin y=2a$, $\cos x+\cos y=2b$, $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2c$.

1903. Доказать, что $\operatorname{tg}^2 20°$, $\operatorname{tg}^2 40°$ и $\operatorname{tg}^2 80°$ являются корнями уравнения $x^3-33x^2+27x-3=0$.

1904. Найти углы прямоугольного треугольника, стороны которого образуют арифметическую прогрессию.

1905. На стороне угла α взята точка A на расстоянии r от его вершины и из нее опущен перпендикуляр AB на другую сторону; из точки B опущен перпендикуляр на первую сторону угла и так далее. Определить предел суммы длин всех перпендикуляров.

1906*. Точка P совершает простое гармоническое колебание вдоль отрезка $BB_1=8$ *см*; расстояние BB_1 точка проходит за 18 *сек*.

1) Составить уравнение движения точки, приняв за исходное ее положение точку B.

2) Определить, на каком расстоянии от своего исходного положения будет находиться точка P через 12 *сек*.

1907. Диагональ равнобедренной трапеции равна d и образует с боковой стороной прямой угол, а с большим основанием угол α. Определить радиус описанной окружности и площадь трапеции. Какой вид имеет трапеция с наибольшей площадью?

1908. Определить периметр и площадь прямоугольника, если диагональ его равна d и угол между диагоналями φ.

1909. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна m, а один из острых углов α. Определить площадь треугольника.

1910. Определить периметр и площадь прямоугольного треугольника, зная его острый угол α и радиус r вписанной в него окружности.

1911. Острый угол равнобедренной трапеции равен α, радиус вписанной в нее окружности равен r. Определить площадь трапеции и ее периметр.

1912. В круг радиуса R вписана трапеция так, что большее ее основание совпадает с диаметром круга, а меньшее основание стягивает дугу 2α. Определить площадь трапеции.

1913. В четырехугольнике $BACD$ $AB = BC = b$, $\angle DAB = \alpha$ и $\angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$. Определить DC. При каких α задача имеет решение?

1914. Около круга радиуса r описана трапеция, боковые стороны которой образуют с большей из параллельных сторон углы α и β. Определить основания трапеции.

1915. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна средней линии. Периметр трапеции равен $2p$, а острый угол α. Определить площадь трапеции. Какой вид имеет такая трапеция с наибольшей площадью?

1916. В квадрат со стороной a вписан другой квадрат так, что одна из его сторон образует со стороной данного квадрата угол α. Определить площадь вписанного квадрата. Решение исследовать.

1917. Расстояние между центрами двух окружностей равно d. Общая внутренняя касательная их составляет с линией центров угол, равный α, а общая внешняя касательная составляет с линией центров угол β. Определить длины этих окружностей.

1918. Определить площадь равнобедренной трапеции с острым углом α, если длина окружности, вписанной в эту трапецию, равна C. При каком значении α площадь трапеции равна удвоенной площади круга?

1919. Определить длину окружности, описанной около прямоугольного треугольника с острым углом α и площадью S.

1920. AB — дуга некоторой окружности, α — соответствующий ей центральный угол. Определить длину окружности, вписанной в сектор AOB, если радиус данной окружности равен R. При каком значении α длина вписанной окружности составит третью часть длины данной окружности?

1921. Определить площадь ромба с углом α, зная площадь q вписанного в него круга. Решение исследовать.

1922. Определить площадь каждого из двух внешне касающихся кругов, если расстояние между их центрами равно d, а угол между общими внешними касательными равен φ. Решение исследовать.

1923. Из некоторой точки проведены к данной плоскости две наклонные, каждая из которых равна a; угол между наклонными равен α, а угол между их проекциями прямой. Найти расстояние данной точки от плоскости. При каких значениях α задача имеет решение?

1924. Основанием прямого параллелепипеда служит квадрат. Диагональ параллелепипеда равна d и образует с прилежащей стороной основания угол α. Определить высоту параллелепипеда. При каких значениях угла α задача имеет решение?

1925. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует со стороной основания угол α. Найти угол между боковым ребром и высотой пирамиды. При каких значениях угла α задача имеет решение?

1926*. Две прямые заданы уравнениями:

$$y = a_1x + b_1, \tag{1}$$

$$y = a_2x + b_2. \tag{2}$$

1) Найти угол φ между прямыми (рис. 61).

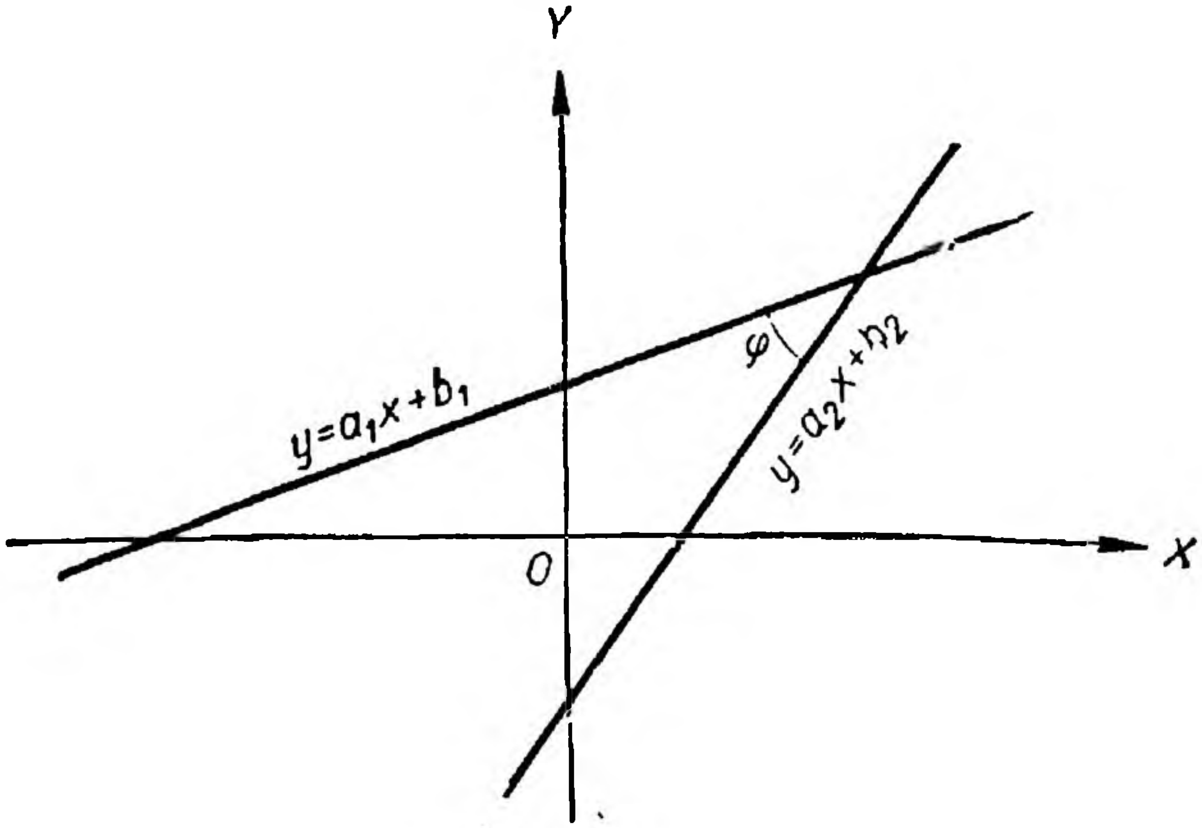


Рис. 61

2) При каком соотношении между параметрами a_1 и a_2 прямые (1) и (2) взаимно перпендикулярны (условие перпендикулярности двух прямых)?

Задачи для контрольных работ

1927. 1) Упростить выражение

$$\frac{\cos 18^\circ \cdot \cos 28^\circ + \cos 108^\circ \cdot \sin 208^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \sin 78^\circ + \sin 108^\circ \cdot \sin 168^\circ}.$$

2) Доказать тождество

$$\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right).$$

3) Вычислить $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{26}}+\operatorname{arc\,ctg}\frac{2}{3}\right)$.

4) Решить уравнение $\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos x=\sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin x+1$.

1928. 1) Упростить выражение

$$\frac{\sin 56^\circ\cdot\sin 124^\circ-\sin 34^\circ\cdot\cos 236^\circ}{\cos 28^\circ\cdot\sin 88^\circ+\sin 178^\circ\cdot\cos 242^\circ}.$$

2) Доказать тождество

$$\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

3) Вычислить $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$.

4) Решить уравнение $\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{\pi}{5}\cdot\cos x$.

1929. 1) Упростить выражение $\cos^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\cos(\pi-\alpha)$.

2) Вычислить $\sin x$, если $\sin 2x=\frac{\sqrt{63}}{8}$ и $\frac{5\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{2}$.

3) Доказать тождество

$$\sin^4\alpha+\frac{1}{4}\sin^2(2\alpha+\pi)=\sin^2\alpha.$$

4) Определить $\sqrt{0,5+0,5\cos(2\arccos 0,75)}$.

1930. 1) Упростить выражение $\sin^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\cos(\pi+\alpha)$.

2) Вычислить $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha=4\sqrt{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

3) Доказать тождество

$$\cos^4\alpha+\frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=\cos^2\alpha.$$

4) Определить $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)}$.

1931. 1) Упростить выражение $\sin^2\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$.

2) Доказать тождество

$$\frac{\sin\left(A-\frac{2\pi}{9}\right)+\sin\left(A+\frac{5\pi}{18}\right)}{\cos\left(A-\frac{2\pi}{9}\right)-\cos\left(A+\frac{5\pi}{18}\right)}=1.$$

3) Преобразовать в произведение

$$1+\sin x-\cos 2x.$$

4) Решить уравнение

$$\cos 5x+2\sin 2x\cdot\sin 3x=1.$$

1932. 1) Упростить выражение $\cos^2\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.

2) Доказать тождество

$$\frac{\cos\left(A+\frac{7\pi}{18}\right)+\cos\left(A-\frac{\pi}{9}\right)}{\sin\left(A+\frac{7\pi}{18}\right)-\sin\left(A-\frac{\pi}{9}\right)}=1.$$

3) Преобразовать в произведение

$$1+\cos x+\cos 2x.$$

4) Решить уравнение

$$\sin 5x-2\sin 2x\cdot\cos 3x=0.$$

9

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§ 33. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

1933. Если при радиоактивном распаде количество вещества за сутки уменьшается вдвое, то по истечении x суток от массы M_0 остается масса $M = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Пользуясь указанной формулой, определить:

1) Сколько радиоактивного вещества останется через 1,5 суток; через 3 суток?

2) Через сколько суток количество вещества уменьшится в 128 раз?

1934. 1) Положив в формуле $M = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^x$ значение массы M_0 радиоактивного вещества равным единице, заполнить таблицу значений функции $M(x)$ для следующих значений аргумента x:

x (время)	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5
M (масса)								

2) Построить график функции $M = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и сравнить его с графиком функции, данным на рисунке 62.

3) Через сколько суток количество вещества уменьшится в 10 раз? Определить по графику.

1935. Сила трения железного троса, намотанного на железный барабан, дает возможность меньшей силе P_0 уравновесить большую силу P (рис. 63). Зависимость между уравновешенными силами выражается формулой $P = P_0 \cdot 3^n$, где n — число витков троса на барабане.

1) Какой груз можно удержать силой $P_0 = 5$ *кГ*, если трос обхватывает барабан 0,5 раза; 1 раз; 1,25 раза; 1,75 раза?

2) Найти удерживающую силу P_0, если она уравновешивает силу $P = 270$ *кГ* с помощью троса, обмотанного вокруг барабана 1,5 раза; 3 раза?

3) Сколько раз трос намотан на барабан, если силой в 5 *кГ* удерживается груз в 15 *кГ*; в 45 *кГ*?

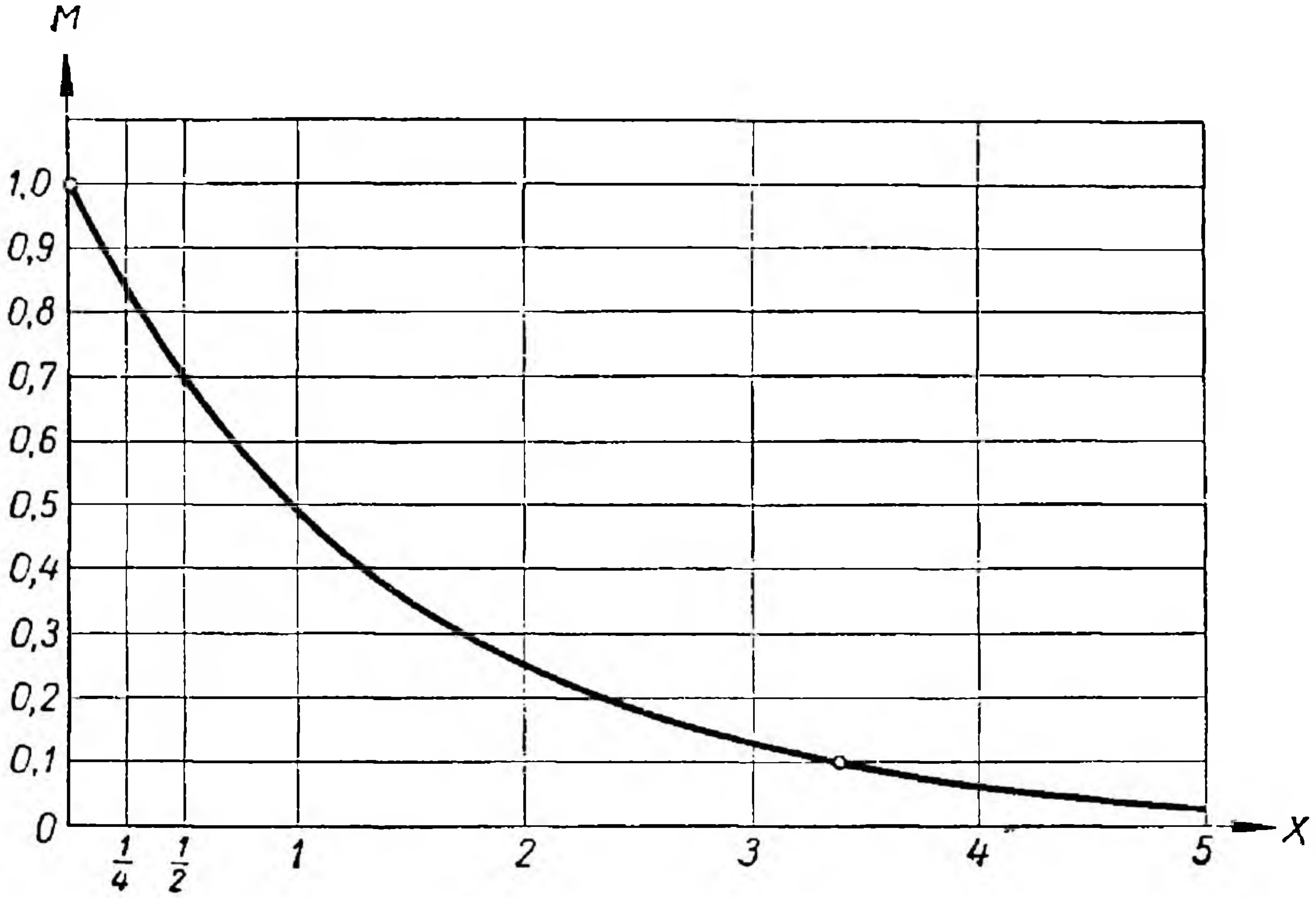


Рис. 62

4) Положив в формуле $P = P_0 \cdot 3^n$ значение P_0 равным единице, заполнить таблицу значений функции $P(n)$ для следующих значений аргумента n:

n	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$P = 3^n$						

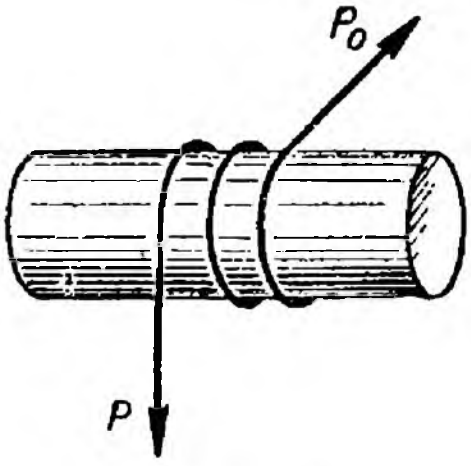


Рис. 63

5) Построить график функции $P = 3^n$ и, пользуясь графиком, определить: а) какой груз может уравновесить единичная сила, если трос обхватывает барабан 0,75 раза; 1,5 раза; 2,5 раза? б) каково число витков троса на барабане, если удерживаемый груз равен 6; 8; 9 единицам силы?

1936. Дана показательная функция $y = 2^x$.

1) Заполнить таблицу значений функции y, давая x следующие значения:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$							

2) Построить точечный график функции $y = 2^x$. Почему точки графика можно соединить плавной кривой? Сравнить полученный график с чертежом (рис. 64).

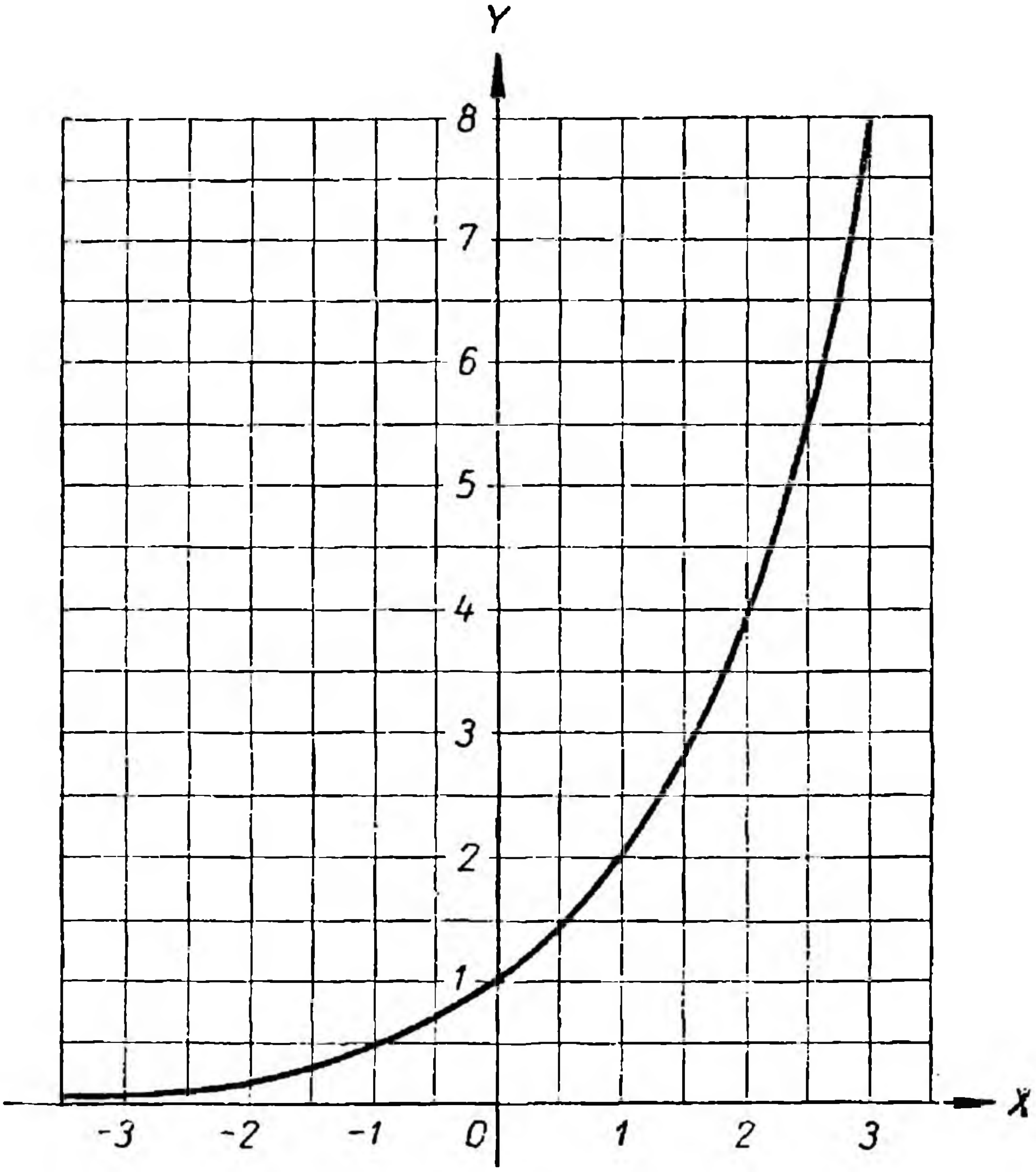


Рис. 64

3) По проекции графика функции $y = 2^x$ на ось X найти область определения функции.

4) По проекции графика функции $y = 2^x$ на ось Y найти область изменения функции.

5) Установить с помощью таблицы и графика, что функция $y = 2^x$ возрастает на всей области ее определения. Где эта функция возрастает быстрее: ближе к оси Y или дальше от нее; справа или слева? Убедиться, что равным приращениям аргумента x соответствуют неравные приращения функции y.

6) Путем вычисления показать, что функция $y=2^x$ возрастает неограниченно.

7) Показать, что: а) при $x<0$ $y<1$; б) при $x=0$ $y=1$; в) при $x>0$ $y>1$.

8) Определить по графику значения функции y для следующих значений аргумента x: -3; $-1{,}5$; $-0{,}5$; 0; 1; 2; 2,5. Результаты проверить вычислением.

9) Найти значения аргумента x, при которых функция y принимает значения, равные $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 2,5.

1937. Дана показательная функция $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

1) Исследовать данную функцию по плану предыдущей задачи.

2) Указать общие свойства функций: $y=2^x$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Каково различие свойств этих функций?

3) Показать, что графики функций $y=2^x$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ симметричны относительно оси Y.

1938. Исследовать следующие показательные функции:

1) $y=3^x$ и $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$;

2) $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ и $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$;

3) $y=10^x$ и $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$.

1939. Построить график функции $y=2^{x-1}$ и провести исследование:

1) найти область определения функции;

2) при каких значениях аргумента x функция $y>0$;

3) чему равно значение функции y, если $x=-2$; $\frac{1}{2}$; 3;

4) при каком значении аргумента x, функция $y=8$; 4; 3;

5) какая разница в графиках функций: $y=2^x$ и $y=2^{x-1}$;

6) при каких значениях x функция $y=2^{x-1}$ больше 2;

7) при каких значениях x функция $y=2^{x-1}$ больше 1, но меньше 2.

1940. 1) На одном и том же чертеже построить схематически графики следующих функций: $y=10^x$; $y=2^x$; $y=1^x$; $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ (рис. 65).

2) Как график показательной функции a^x располагается относительно прямой $y=1$ при $a>1$; $0<a<1$?

3) Сравнить значения функции a^x с 1 при различных значениях аргумента x, если: а) $a>1$; б) $0<a<1$.

4) Как располагаются графики показательных функций а) $y = 10^x$ и $y = 2^x$, б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ относительно друг друга при значениях $x < 0$; $x = 0$; $x > 0$?

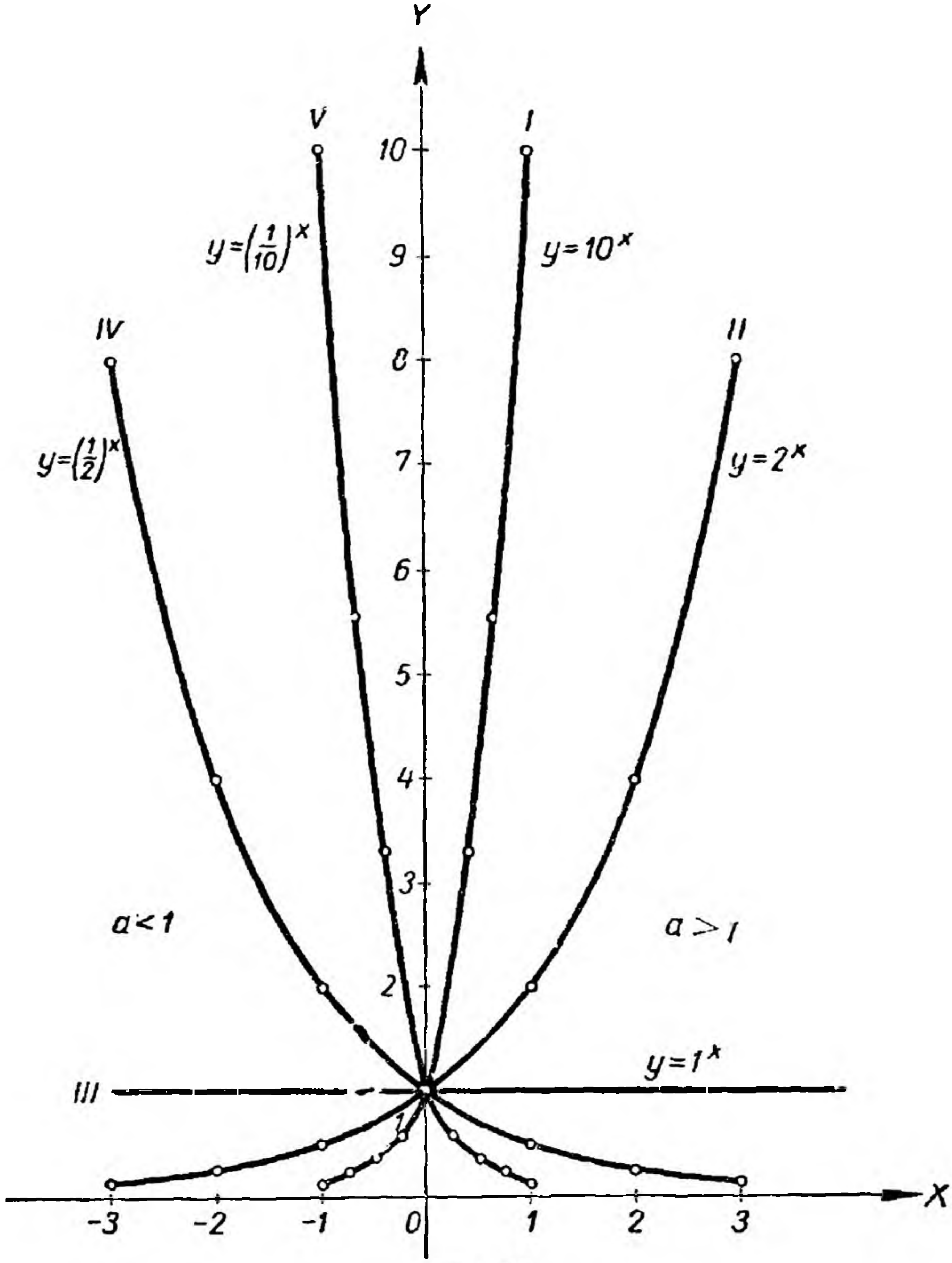


Рис. 65

1941. Даны показательные функции:

1) $y = 2^x$; 2) $y = 3^{x-1}$; 3) $y = 0{,}5^{3x}$;

4) $y = 2 \cdot 4^{x+1}$; 5) $y = c \cdot a^x$.

Убедиться, что при значениях аргумента $x = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots$, образующих простейшую арифметическую прогрессию, соответствующие значения функции y образуют геометрическую прогрессию.

В каждом случае найти знаменатель геометрической прогрессии.

1942. Используя шаблон графика функции $y=a^x\,(a>1)$, построить графики следующих функций: 1) $y=a^{-x}$; 2) $y=-a^x$.

1943. 1) Какие значения аргумента x являются допустимыми для функций:

а) $y=a^x$; б) $y=a^{-x}$; в) $y=a^{\frac{3}{x}}$; г) $y=a^{\sqrt{x}}$; д) $y=a^{\frac{3}{\sqrt{x}}}$;

е) $y=a^{\frac{3}{2x-3}}$?

2) Какие из следующих степеней больше единицы, равны единице или меньше единицы:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}};\quad \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}};\quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{4}};\quad \left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{3}{4}};\quad (0,26)^{-0,5};\quad \left(2\,\frac{3}{5}\right)^{0};$$
$$(0,15)^{0,3};\quad (2,12)^{-0,5}?$$

3) Сравнить по величине числа m и n, если:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n;\qquad \left(1\,\frac{2}{3}\right)^m < \left(1\,\frac{2}{3}\right)^n;$$
$$(2,3)^m > (2,3)^n;\qquad \left(\frac{8}{3}\right)^m > \left(\frac{8}{3}\right)^n;$$
$$(0,7)^m < (0,7)^n;\qquad \left(\frac{4}{5}\right)^m < (0,8)^n.$$

4) Какое заключение можно сделать относительно показателя степени m, если:

а) $(0,2)^m=\frac{1}{25}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^m=\frac{3}{4}$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^m=\frac{4}{3}$; г) $10^m=0,1$;

д) $10^m=35$; е) $\left(\frac{5}{3}\right)^m=0,2$?

5) Какое заключение можно сделать относительно положительного основания a, если:

а) $a^{\frac{2}{3}} > a^{\frac{3}{4}}$; б) $a^{\frac{2}{3}} < a^{\frac{3}{4}}$; в) $a^{-0,2} > a^{1,2}$; г) $a^{-\frac{5}{6}} < a^{\frac{4}{3}}$?

1944. Пользуясь набором шаблонов графиков функций, решить графически следующие уравнения:

1) $2^x=x$; 2) $2^x=x^2$; 3) $2^x=x^3$;

4) $2^x=\sin x$; 5) $2^x=\cos x$; 6) $2^x=-x^2+1$;

7) $-2^x=\sin x$; 8) $2^{-x}=\cos x$; 9) $2^{-x}=-x+3$.

§ 34. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

1945. Следующие равенства записать в виде логарифмических равенств:

1) $10^2 = 100$; 2) $3^3 = 27$; 3) $5^4 = 625$;

4) $2^{-4} = \frac{1}{16}$; 5) $3^{-3} = \frac{1}{27}$; 6) $4^{-2} = \frac{1}{16}$;

7) $64^{\frac{1}{2}} = 8$; 8) $27^{\frac{1}{3}} = 3$; 9) $16^{\frac{1}{4}} = 2$.

1946. На основании определения логарифма проверить следующие равенства:

1) $\log_2 16 = 4$; 2) $\log_3 27 = 3$; 3) $\log_{10} 0,0001 = -4$;

4) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$; 5) $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$; 6) $\log_{64} 8 = \frac{1}{2}$;

7) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{4}} 8 = -2$; 8) $\log_{81} \sqrt[5]{9} = \frac{1}{10}$; 9) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3} = -\frac{2}{3}$.

1947. Дана логарифмическая функция $y = \log_2 x$.

1) Заполнить таблицу значений функции y, давая аргументу x следующие значения:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_2 x$							

2) Построить ряд точек, соответствующих числовым значениям функции $y = \log_2 x$. Почему эти точки можно соединить плавной кривой? Сравнить полученный график с чертежом (рис. 66).

3) Проектируя график функции $\log_2 x$ на ось X, найти область определения функции; проектируя график на ось Y, определить область изменения функции.

4) Установить с помощью таблицы и графика, что функция $y = \log_2 x$ возрастает на всей области ее определения. Убедиться, что равным приращениям аргумента соответствуют неравные приращения функции. Где эта функция возрастает быстрее: ближе к прямой $x = 1$ или дальше от нее; слева или справа?

5) Вычислением показать, что функция $y = \log_2 x$ возрастает неограниченно.

6) Показать, что:

а) при $0 < x < 1$ функция $y < 0$;

б) при $x = 1$ функция $y = 0$;

в) при $x > 1$ функция $y > 0$.

7) Определить по графику значения функции y для следующих значений аргумента x: $\frac{1}{3}$; 1; 1,5; 3; 5.

8) Найти значения аргумента x, при которых функция принимает значения, равные $-2{,}5$; 0; 1,5; 2,5.

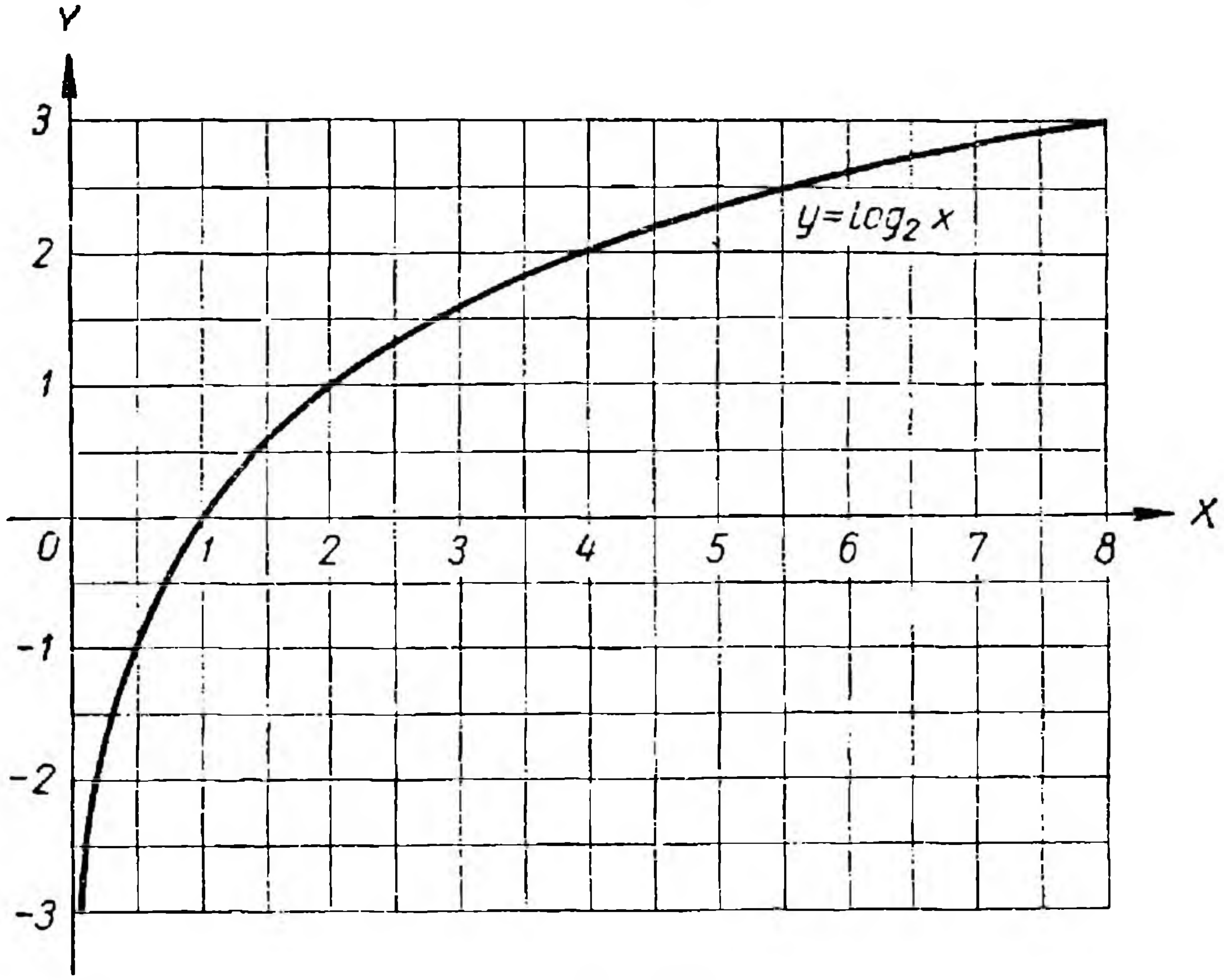


Рис. 66

9) Убедиться, что графики функций $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$ симметричны относительно прямой $y = x$.

1948. Дана логарифмическая функция $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

1) Исследовать эту функцию по плану предыдущей задачи.

2) Указать общие свойства функций: $y = \log_2 x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Каково различие свойств этих функций?

3) Показать, что графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ симметричны относительно оси X.

4) Измерением убедиться в том, что графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

1949. 1) Какое значение принимает функция $y = \log_a x$ при $x = 1$; при $x = a$?

2) Для каких значений аргумента x соответствующие значения функции $y = \log_a x$ положительны и для каких отрицательны? Рассмотреть случаи: а) $a > 1$; б) $0 < a < 1$.

1950. Даны функции:

а) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$; б) $y=\log_2 x$; в) $y=\log_3 x$; г) $y=\log_{0,1} x$;

д) $y=\lg x$; е) $y=\ln x$.

1) Назвать среди данных функций возрастающие функции, убывающие функции.

2) На одном и том же чертеже начертить от руки графики данных функций и отметить характерные особенности в расположении этих графиков относительно друг друга.

1951. 1) Имея шаблон графика функции $y=2^x$, построить на одном и том же чертеже графики следующих функций:

а) $y=2^x$; б) $y=\log_2 x$; в) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$; г) $y=-\log_2 x$.

2) Доказать тождественность функций: $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ и $y=-\log_2 x$.

1952. Используя набор шаблонов графиков функций $y=2^x$; $y=x^2$; $y=\sin x$, решить графически уравнения:

1) $\log_2 x=-x$;
2) $\log_2 x=\left(\frac{1}{2}\right)^x$;
3) $2\log_2 x=-2x+3$;
4) $\log_2 x=\sin x$;
5) $\log_{\frac{1}{2}} x=\cos x$;
6) $\log_2 x=-x^2$.

1953. Какое значение аргумента x является допустимым для следующих функций:

1) $\log_a \sqrt{x}$;
2) $\log_a(-x)$;
3) $\log_a(x-1)$;
4) $\log_a(x+1)$;
5) $\log_a(x^2-1)$;
6) $\log_a(x^2+1)$;
7) $\log_a x^2$;
8) $\log_a \sin x$;
9) $\lg\cos x$;
10) $\lg\operatorname{tg} x$;
11) $\frac{1}{\lg x}$;
12) $\lg|x|$;
13) $2\lg x+3\lg(x+2)$;
14) $\lg(x-1)+2\lg(x+1)$;
15) $\lg\sqrt{5-x}+\lg\sqrt{1-x}$.

1954. 1) Между числами m и n поставить знак $>$ или $<$, если известно, что:

а) $\log_{\frac{1}{2}} m>\log_{\frac{1}{2}} n$; б) $\log_2 m>\log_2 n$; в) $\log_{2,5} m<\log_{2,5} n$;

г) $\log_{0,2} m<\log_{0,2} n$.

2) Какое заключение можно сделать относительно числа m, если известно, что:

а) $\log_{\frac{1}{2}} m=-0,5$; б) $\log_3 m=1,5$; в) $\log_{0,2} m=\frac{4}{3}$;

г) $\log_{2,4} m=-0,2$?

3) Сравнить с единицей число a, если известно, что:

а) $\log_a 0,2 = 3$; б) $\log_a 0,2 = -3$; в) $\log_a 0,5 > \log_a 0,4$;

г) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a 1$.

§ 35. ЛОГАРИФМЫ

1955. 1) Чему равен логарифм 8 по основанию 2?
2) Чему равен логарифм 100 по основанию 10?
3) Какое число имеет логарифм 3 при основании 3?
4) Какое число имеет логарифм 4 при основании 10?
5) При каком основании логарифм числа 81 равен 4?
6) При каком основании логарифм числа 81 равен 2?

1956. 1) Найти: а) $\log_7 49$; б) $\log_3 \frac{1}{27}$; в) $\log_{10} 0,001$.

2) Найти логарифмы числа 729 при основаниях 27; 9; 3; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$.

3) Найти логарифмы чисел $\frac{2}{5}$; $\frac{25}{4}$; 1; $\frac{4}{25}$; $\frac{8}{125}$ при основании $\frac{5}{2}$.

1957. Найти:

1) $\log_4 \sqrt[4]{8}$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9}$; 3) $\log_9 \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$;

4) $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[4]{32}$; 5) $\log_a a^3 \sqrt{a}$; 6) $\log_a \frac{a^2 \sqrt[3]{a^2} \cdot a \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[3]{a}}$;

7) $\log_a a \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}}$; 8) $\log_a a^{k^2}$.

1958. Вычислить:

1) $\log_4 \sin \frac{\pi}{4}$; 2) $\log_{10} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$;

3) $\log_8 \sin 150^\circ$; 4) $\log_2 \cos 120^\circ$.

1959. Найти число x, если:

1) $\log_2 x = 3$; 2) $\log_2 x = -3$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = 5$;

4) $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$; 5) $\log_{\sqrt{3}} x = 7$; 6) $\log_{\sqrt{3}} x = -3$;

7) $\log_a x = a$; 8) $\log_2 x = 0$; 9) $\log_{0,1} x = -1$.

1960. Найти числа, логарифмы которых при основании 3 равны -3; -1; 0; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 1; 3; 5.

1961. Найти основание x, если:

1) $\log_x 2 = 2$; 2) $\log_x N = N$;

3) $\log_x 243 = 5$; 4) $\log_x \frac{1}{243} = -5$;

5) $\log_x 3\frac{3}{8} = -3$; 6) $\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{4}$;

7) $\log_x 2\sqrt[3]{2} = -6$; 8) $\log_x \sqrt[5]{2} = -\frac{3}{5}$;

9) $\log_x \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} = -0{,}8$; 10) $\log_x \sqrt[10]{3} = -0{,}1$.

1962. Между какими целыми числами заключаются следующие логарифмы:

1) $\log_{10} 50$; 2) $\log_2 10$; 3) $\log_2 0{,}5$?

1963. Представить: 1) 2 в виде степени числа 3; 2) 10 в виде степени числа 2; 3) a $(a > 0)$ в виде степени числа b $(b > 0,\ b \neq 1)$.

Вычислить.

1964. 1) $2^{\log_2 32}$; 2) $3^{\log_3 \frac{1}{9}}$; 3) $5^{\log_5 0{,}35}$;

4) $49^{\log_7 2}$; 5) $25^{0{,}5 \log_5 10}$; 6) $64^{0{,}5 \log_2 10}$.

1965. 1) $2^{\log_2 \sin 150^\circ}$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2 \log_{\frac{1}{3}} \cos \frac{\pi}{6}}$;

3) $1{,}25^{-2 \log_{0{,}8} \operatorname{tg} 60^\circ}$; 4) $a^{-3 \log_{\frac{1}{a}} \sin 45^\circ} + \left(\frac{1}{a}\right)^{-3 \log_a \sin 45^\circ}$.

1966. 1) $3^{1+\log_3 5}$; 2) $2^{1-\log_2 7}$; 3) $4^{1+\log_4 8}$;

4) $2^{3+\log_2 3}$; 5) $1{,}5^{1+\log_{\frac{3}{2}} 3}$; 6) $5^{3 \log_5 2}$.

Найти x.

1967. 1) $x = 10^{2+2\log_{10} 7}$; 2) $x = 8^{1-\log_2 3}$;

3) $x = 2^{3-4\log_8 3}$; 4) $x = 10^{1+\lg \sin \frac{\pi}{6}}$;

5) $x = 10^{2-\lg \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}$; 6) $x = 100^{1+\lg \cos \frac{\pi}{3}}$.

1968. 1) $x = a^{2+\log_a b}$; 2) $x = a^{3-2\log_a b}$; 3) $x = a^{\frac{1}{2}(1-3\log_a b)}$;

4) $x = 9^{2\log_3 2 + 4\log_{81} 2}$; 5) $x = 4^{\frac{1}{2}\log_2 3 + 3\log_8 5}$.

1969. 1) $x = 2 \cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 8 - 2\lg 2}$; 2) $x = 100^{\frac{1}{4} - \lg \sqrt[4]{5}}$;

3) $x = \sqrt[-2]{100^{-0{,}5+2\lg 5}}$; 4) $x = 36^{1-\log_6 3} + 25^{-\log_5 6}$.

1970. 1) $\log_x 2\sqrt[3]{2} = -2$; 2) $\log_x 0{,}0625 = -4$;

3) $\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt[4]{2} = x$; 4) $\log_{3\sqrt[3]{3}} x = -2{,}25$.

1971. 1) $\log_{2\sqrt[5]{2}} \frac{1}{8} = x$; 2) $\log_{3\sqrt[4]{3}} x = -\frac{2}{5}$;

3) $\log_{2\sqrt[4]{5}} x = -4$; 4) $\log_{4\sqrt[4]{4}} 2^{-6} = x$.

1972. 1) $\log_x \frac{\sqrt[5]{8}}{2} = -0{,}4$; 2) $\log_x \frac{\sqrt[5]{9}}{3} = -0{,}6$;

3) $\log_{0{,}32}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right) = x$; 4) $\log_{0{,}4} \frac{1}{5}\sqrt[3]{50} = x$.

1973. 1) $\log_x (3 - 2\sqrt{2}) = 2$; 2) $\log_x 2(2 - \sqrt{3}) = 2$;

3) $\log_{(\sqrt{2}+1)}(3 + 2\sqrt{2}) = x$; 4) $\log_{(\sqrt{3}+1)}(4 + 2\sqrt{3}) = x$.

1974. Найти x из уравнений:

1) $\log_{(x-2)} 9 = 2$; 2) $\log_{(3-x)} 2(x^2 + 2x - 1) = 2$;

3) $\log_{(x-2)}(x^3 - 14) = 3$; 4) $\log_2 (x^2 + 6x + 17) = 3$.

1975. При каком соотношении между числами a и b имеют место равенства:

1) $\log_{(2b-a)}(2a - b) = 1$; 2) $\log_k (2a - b) = 0$.

1976. Решить уравнения:

1) $5 \cdot \log_2 x = 3\log_2 x + 6$;

2) $2 \cdot \log_3 x - 3\log_9 81 = 5\log_3 x$;

3) $(\log_3 x)^2 - 6\log_3 x + 9 = 0$;

4) $(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 6 = 0$;

5) $3\log_3^2 x + 7\log_3 x - 6 = 0$.

1977. 1) Пользуясь логарифмическим тождеством $a^{\log_a N} = N$, вывести формулу перехода от одной системы логарифмов к другой:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a};$$

2) Показать, что

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

1978. Доказать равенства:

1) $\log_a N = \log_{a^2} N^2$; 2) $\log_a N = \log_{\sqrt{a}} \sqrt{N}$.

1979. Вычислить без таблиц:

1) $\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36$; 2) $\log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81$;

3) $\log_2 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2}$; 4) $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{5}} \sin \frac{\pi}{5} \cdot \log_{\sqrt{\sin \frac{\pi}{5}}} 5$.

1980. Решить уравнения:

1) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;

2) $\log_{64} x + \log_8 x = 0{,}5$;

3) $\log_{81} x + \log_9 x + \log_3 x = 3{,}5$;

4) $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \frac{3}{4}$.

1981. Найти величину дроби:

1) $\frac{\log_4 64}{\log_2 64}$; 2) $\frac{\log_2 \sqrt{2}}{\log_{32} \sqrt{2}}$;

3) $\frac{\log_a x}{\log_{a^2} x}$; 4) $\frac{\log_{\sqrt{3}} 81}{\log_{\frac{1}{3}} 81}$.

1982. 1) Известно, что $\log_a N = b$. Найти $\log_{\frac{1}{a}} N$.

2) Найти $\log_{0,1} 3$, если $\lg 3 \approx 0{,}477$.

3) Вычислить $\log_2 N + \log_{\frac{1}{2}} N$.

1983. 1) Зная, что $\log_a N = b$, найти $\log_a \frac{1}{N}$.

2) Вычислить $\log_a N + \log_a \frac{1}{N}$.

3) Какой зависимостью связаны m и n, если $\log_a m = -\log_a n$?

1984. Доказать, что разность между логарифмами двух последовательных натуральных чисел убывает по мере возрастания этих чисел.

§ 36. ЛОГАРИФМИРОВАНИЕ И ПОТЕНЦИРОВАНИЕ

1985. Пользуясь логарифмическим тождеством $N = a^{\log_a N}$, вывести следующие формулы логарифмирования:

1) $\log_a (N_1 N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$;

2) $\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$;

3) $\log_a (N^m) = m \log_a N$;

4) $\log_a \sqrt[m]{N} = \frac{1}{m} \log_a N$.

1986. Известно, что $\log_{10}2 \approx 0{,}3010$, $\log_{10}3 \approx 0{,}4771$ и $\log_{10}5 \approx$ $\approx 0{,}6990$. Найти при том же основании логарифмы следующих чисел:

1) 6; 8; 10; 12; 15; 16; 18;

2) 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8; 0,15;

3) $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{8}$; $1\frac{3}{5}$; $2\frac{2}{5}$.

1987. Как изменится логарифм данного числа при основании $a > 1$, если: 1) число возвести в квадрат; 2) извлечь из данного числа квадратный корень; 3) число уменьшить вдвое; 4) число увеличить в a раз?

Ответить на те же вопросы, полагая, что основание $0 < a < 1$.

1988. Как изменится разность $\log_a x - \log_a y$, если x и y заменить на $5x$ и $5y$?

1989. Найти ошибку в „доказательстве“ утверждения $1 > 2$.

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{9};\quad \frac{1}{3} > \left(\frac{1}{3}\right)^2;\quad \log_a\left(\frac{1}{3}\right) > 2\log_a\left(\frac{1}{3}\right);\quad 1 > 2.$$

Прологарифмировать следующие выражения[1]):

1990. 1) $x = 2ab$; 2) $x = 3a(b+c)$; 3) $x = 4(a^2 - b^2)$; 4) $Q = cm(t_2 - t_1)$; 5) $a = c\sin\alpha$; 6) $b = 2a\cos\alpha$.

1991. 1) $x = \frac{2ab}{3mn}$; 2) $x = \frac{3(a+b)}{4a(a-b)}$; 3) $x = \frac{4(m+n)}{5(m^2-n^2)}$; 4) $V = \frac{2\pi R}{T}$; 5) $R = \frac{\rho l}{s}\cdot(1+\alpha t)$; 6) $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

1992. 1) $x = 2a^2$; 2) $a = \omega^2 R$; 3) $W = \frac{mv^2}{2}$; 4) $x = \frac{3a^2}{2(1-a^2)}$; 5) $x = \frac{a^2 b}{2\cos\alpha}$; 6) $V = \frac{2}{3}h^3\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$.

1993. 1) $x = m\sqrt{n}$; 2) $x = 3m^2\sqrt[3]{3n^2}$; 3) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; 4) $V = \sqrt{2gh}$.

1994. 1) $x = \frac{m^2 n^3}{a\sqrt{b}}$; 2) $x = 4a^4\sqrt[4]{\frac{c^3}{d}}$; 3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; 4) $V = \frac{4}{3}l^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\cos\alpha}$.

1995. 1) $x = \frac{3a^2\sqrt{3(a-b)\cdot c}}{4(a-b)^2}$; 2) $x = \frac{5ab^2}{6\sqrt{5ab}}$; 3) $V = \frac{c^3}{6}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$; 4) $S = 8\sqrt{\frac{18n^3}{169\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha}}$.

---

[1]) В примерах 1990—2015 буквенные выражения обозначают положительные числа.

1996. 1) $x=\left(\dfrac{\sqrt[\frac{3}{4}]{ab^2}}{\sqrt[\frac{2}{3}]{a^2b}}\right)^{\frac{1}{2}}$; 2) $x=\dfrac{5}{3}\sin 36^\circ\sqrt{\dfrac{S^3\cos 36^\circ}{\pi^3\operatorname{tg}\alpha}}$;

3) $x=a^{-3}b^{-5}$; 4) $x=2p^{-\frac{2}{3}}q^{-\frac{1}{2}}\sqrt[-3]{2p^2q^2}$.

1997. 1) $x=\dfrac{4}{3}a^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}a^2}$; 2) $x=\dfrac{1}{3}m^{-2}\left(\sqrt[-\frac{3}{4}]{2mn}\right)^{\frac{2}{3}}$;

3) $x=\dfrac{a^{-1}\sqrt{3b\sin^2\alpha}}{3b\sqrt{a}}$; 4) $x=\dfrac{3a^{-2}\sqrt[3]{3b\operatorname{tg}^2\alpha}}{a^2b\sqrt{ab}}$.

1998. 1) $x=\sqrt{a\sqrt{b}}$; 2) $x=\dfrac{2}{3}m\sqrt{m\sqrt[3]{m}}$;

3) $V=\dfrac{8S}{3}\sqrt{\dfrac{s}{\pi}}\cdot\sin^6\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$; 4) $x=2\sqrt{\dfrac{F}{\pi}}\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

1999. В следующих примерах а) произвести логарифмирование и результат упростить; б) предварительно упростить выражение, а затем прологарифмировать. Результаты сравнить:

1) $x=\dfrac{a^3\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot a^5\sqrt[8]{a^7}\cdot a^6}{\sqrt[8]{a}}$; 2) $x=\sqrt{\dfrac{\sqrt{m^{-1}}}{n^{-3}}\cdot\sqrt[-3]{m^{-1}n^{-2}}}$;

3) $x=\sqrt{\dfrac{24\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{4\sqrt{6}}}}$; 4) $x=\sqrt{\dfrac{15\sqrt{3\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{25\sqrt{3}}}}$.

2000. Упростить:

1) $\dfrac{\log_a(\log_a N)^2}{\log_a\log_a N}$; 2) $\dfrac{\log_{10}(\log_{10}N^{10})}{1+\log_{10}\log_{10}N}$.

Прологарифмировать выражения.

2001. 1) $x=2^{\sqrt[3]{4}}$; 2) $x=0{,}5\sqrt[0{,}4]{0.3}$;

3) $x=a^{0{,}5a^{\frac{1}{2}}}$; 4) $x=0{,}6^{\sqrt[0{,}5]{0{,}4}}$.

2002 ¹). 1) $x=\log(a^3)$; 2) $x=\log\left(2^{\sqrt[3]{4}}\right)$;

3) $x=\log\left(\sqrt{2}^{\sqrt[3]{3}}\right)$; 4) $x=\log\left(1{,}5^{\sqrt[1{,}5]{1{,}5}}\right)$.

---

¹) В примерах 2002—2018 основание логарифма — произвольное положительное число, не равное единице; для краткости оно не указано.

2003. 1) $x = \log a^{\sqrt{a}}$; 2) $x = \frac{\log (m^{3m^3})}{\log (m^3)}$;

3) $x = \log \sqrt[a]{\log a}$; 4) $x = \log \sqrt[3]{(a+b)^{\log (a+b)}}$.

2004. Привести к виду, удобному для логарифмирования, и прологарифмировать следующие выражения:

1) $x = 3 - 4\sin^2\alpha \quad (0^\circ \leqslant \alpha < 60^\circ)$;

2) $x = 1 - 2\sin^2\alpha \quad (0^\circ \leqslant \alpha < 45^\circ)$;

3) $x = (\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2$, где $\alpha - \beta \neq 2\pi k$;

4) $x = \sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta)$, где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ и $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

Произвести потенцирование.

2005. 1) $\log x = \log N_1 + \log N_2$; 2) $\log x = \log N_1 - \log N_2$;

3) $\log x = m \log N$; 4) $\log x = \frac{1}{m} \log N$.

2006. 1) $\log x = 3\log m + 4\log n$; 2) $\log x = 2\log a - 3\log b$;

3) $\log x = \frac{2}{3}\log a$; 4) $\log x = \frac{3}{4}(\log a + \log b)$;

5) $\log x = \log 2 + \log\sin\alpha + \log\cos\alpha$;

6) $\log x = \log\sin\beta - \log\cos\beta + \log\operatorname{ctg}\beta$.

2007. 1) $\log x = 2\log a - 3\log b + 4\log c$;

2) $\log x = -\log a - 2\log b - 3\log c$;

3) $\log x = 2\log(a+b) - 3\log(a-b)$;

4) $\log x = \frac{1}{3}\log(a-b) - \frac{1}{2}\log(a+b)$;

5) $\log x = \log(1+\sin\alpha) + \log(1-\sin\alpha)$.

2008. 1) $\log x = -2\log(m+n) - 3\log(m-n)$;

2) $\log x = \frac{2}{3}\log a + \frac{3}{2}\log b$;

3) $\log x = \frac{2\log a}{3} - \frac{3\log b}{4}$; 4) $\log x = \frac{3\log m}{4} + \frac{4\log n}{5}$.

2009. 1) $\log x = \frac{2}{3}\log(a+b) - \frac{1}{2}\log(a-b) - \frac{1}{2}\log a$;

2) $\log x = -\frac{1}{2}\log(m-n) + \frac{2}{3}\log(m+n) - \frac{3}{4}\log m$;

3) $\log x = \frac{2}{3}(\log m - \log n) - \log(m-n)$;

4) $\log x = \frac{3}{4}(\log m + \log n) + \log(m+n)$.

2010. 1) $\log x = 2\log(a+b) + \frac{2}{3}(2\log a + 3\log b)$;

2) $\log x = \frac{1}{4}\log(r+s) - \frac{3}{4}(5\log r + 3\log s)$;

3) $\log x = \frac{\log a}{4} + \log 10 - \frac{\log (a-b)}{3}$;

4) $\log x = -\log 100 - \frac{1}{2}\log a - 2\log b$.

2011. 1) $3\log t + \frac{1}{3}\log s = \log 10$; 2) $\frac{3}{4}\log x - \log \sqrt[3]{z} = 0$;

3) $2\log x = -\log(6 - x^2)$;

4) $\log x = -\log 1000 + 2\log(a+b) - 3\log(a-b)$.

2012. Вычислить x, если:

1) $\log x = \frac{1}{2}\log 9 - \log 5 + \log 2$;

2) $\log x = \frac{2}{5}\log 32 - \frac{1}{3}\log 64 + \log 10$;

3) $\log x = \frac{1}{2}(9\log 2 - 3\log 4)$;

4) $\log x = 3\log 5 - 2\log 25 - \log 10$.

2013. Вычислить $1 - 2x$, если:

1) $\log x = 2\log\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\alpha = 60^\circ$;

2) $\log x = 2\log\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\alpha = 120^\circ$.

2014. Найти x по данному его логарифму.

1) $\log x = k\log(r+s) - \frac{1}{k}\log(r-s) + \log r$;

2) $\log x = -\frac{1}{k}\log(a+b) - k\log(a-b) - \log a$;

3) $\log x = 2\log a + \frac{1}{2}\left[\log(a+b) + \frac{1}{2}\log(a-b) - \log a - \log b\right]$;

4) $\log x = \frac{3}{4}\left[\log a + \frac{2}{3}\log(a+b) - 3\log(a-b) - \frac{1}{2}\log b\right]$.

2015. Найти x по его логарифму, предварительно упростив правую часть равенства:

1) $\log x = \log s - 2\log r +$

$$+ \frac{2}{3}\left[\log s + \frac{3}{2}\log(a+b) - \frac{3}{2}\log(a-b) - \log r\right];$$

2) $\log x = \frac{2}{3}[5\log a + 2{,}5\log b - 2(\log a - \log b) - \log(a-b)] -$

$$-\log(a-b);$$

3) $\log x = \frac{3}{4}\left\{\frac{3}{2}\log r + 2\log s +\right.$

$$\left. + \frac{2}{3}[\log(r-s) - 3(\log r + \log s)]\right\};$$

4) $$\log x = 1\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\log b + \frac{3}{4}\log a - \frac{1}{4}\left[5\left(\log a + \frac{1}{2}\log b\right) - \log(a+2b)\right]\right\}.$$

2016. Дано: $\log x = \log\sin\alpha + \log\cos(\alpha+\beta)$ и $\log y = \log\cos\alpha + \log\sin(\alpha-\beta)$.

Найти $x - y$, если $\alpha = 45^\circ$ и $\beta = 30^\circ$.

2017. Вычислить $1 - x + y$, если $\log x = \log 2 + \log\cos\alpha$; $\log y = \log(\cos\alpha + \sin\alpha) + \log(\cos\alpha - \sin\alpha)$ и $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

2018. Вычислить x, если

$$\log x = \log\operatorname{tg} 1^\circ + \log\operatorname{tg} 2^\circ + \log\operatorname{tg} 3^\circ + \ldots + \log\operatorname{tg} 88^\circ + \log\operatorname{tg} 89^\circ.$$

§ 37. ДЕСЯТИЧНЫЕ ЛОГАРИФМЫ

2019. Найти десятичные логарифмы следующих чисел:

1) 10; 100; 1000; 10 000; 10^6; 10^n;

2) 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 10^{-8}; $\frac{1}{10^n}$.

2020. Десятичные логарифмы каких простых чисел надо знать, чтобы найти десятичные логарифмы чисел 30; $\frac{32}{27}$; $\frac{12}{25}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt[3]{\frac{5}{16}}$.

2021. Показать, что десятичный логарифм любого натурального числа, не являющегося степенью 10 ($N \neq 10^k$, где k — целое число), не может быть рациональным числом.

2022. 1) Найти характеристики десятичных логарифмов следующих чисел:

а) 5; 5,25; 45; 13,6; 28,071; 256; 256,8; 430,09; 2000;

б) 0,3; 0,04; 0,068; 0,00128; 0,2005; 0,0303; 0,5067.

2) Сколько существует таких целых чисел, характеристика логарифмов которых равна 1, 2, 3?

2023. 1) Показать, что от переноса запятой в десятичной дроби мантисса ее логарифма не изменится.

2) Известно, что $\lg 15 \approx 1{,}176$. Найти логарифмы чисел 150; 1500; 15 000; 1,5; 0,15; 0,00015.

2024. Что больше: $\lg 0{,}005$ или $\lg 0{,}006$?

Найти десятичные логарифмы чисел с помощью логарифмической линейки и по таблицам.

2025. 1) 2; 2) 5; 3) 9; 4) 17;
5) 69; 6) 123; 7) 234; 8) 350;
9) 304; 10) 589; 11) 801; 12) 999.

2026. 1) 0,3; 2) 0,015; 3) 3,4; 4) 20,5;
5) 0,236; 6) 0,595; 7) 0,0019; 8) 0,0624;
9) 3,05; 10) 0,208; 11) 0,0000398; 12) 0,000999.

2027. 1) 2436; 2) 3978; 3) 1209; 4) 8095;
5) 29,57; 6) 1,397; 7) 1,009; 8) 0,5007;
9) 0,04697; 10) 0,0598; 11) 0,0001594; 12) 0,008909.

2028. 1) 28,859; 2) 47325; 3) 102,53; 4) 1,3927;
5) 0,49832; 6) 898,39; 7) 0,063987; 8) 0,0049058.

2029. Найти (по таблицам и по линейке) числа, соответствующие следующим логарифмам:

1) 2,5481; 2) $\bar{1},3193$; 3) $\bar{2},5327$; 4) 4,2456;
5) $\bar{3},3143$; 6) $\bar{4},2980$; 7) 1,7307; 8) 1,0030;
9) $\bar{1},0101$; 10) 3,0093; 11) 0,5719; 12) 5,9090.

2030. Следующие логарифмы выразить отрицательными числами:

1) $\bar{1},3214$; 2) $\bar{2},3492$; 3) $\bar{3},8436$; 4) $\bar{4},9547$;
5) $\bar{5},9839$; 6) $\bar{1},8935$; 7) $\bar{3},0009$; 8) $\bar{2},9999$;
9) $\bar{1},0001$; 10) $\bar{6},0035$; 11) $\bar{2},0307$; 12) $\bar{3},3033$.

2031. Преобразовать в искусственную форму логарифмы:

1) —0,2376; 2) —1,2439; 3) —2,7453; 4) —4,5398;
5) —1,5937; 6) —0,2364; 7) —2,0235; 8) —3,6053;
9) —2,5701; 10) —0,5320; 11) —1,0001; 12) —0,9999.

Выполнить указанные действия над логарифмами.

2032. 1) $0,2937+\bar{1},3452$; 2) $\bar{2},0304+\bar{1},9324$;
3) $\bar{1},5724+\bar{2},7642$; 4) $\bar{3},8751+0,7569$;
5) $1,3423-\bar{1},1827$; 6) $1,1843-\bar{2},3579$;
7) $\bar{2},5296-1,7612$; 8) $3,2486-\bar{4},5497$;
9) $0,1834-\bar{2},3948$; 10) $0,3751-3,6547$;
11) $\bar{1},0034-\bar{1},9923$; 12) $\bar{3},0001-\bar{4},9999$;
13) $1-\bar{1},5647$; 14) $2-\bar{3},1958$.

2033. 1) $\bar{1},2354 \cdot 3$; 2) $\bar{1},6742 \cdot 2$;
3) $\bar{2},0324 \cdot (-2)$; 4) $0,3124 \cdot (-1,2)$;
5) $\bar{1},2738 \cdot 0,3$; 6) $\bar{1},2957 \cdot (-0,4)$;
7) $3,8765 \cdot \frac{3}{4}$; 8) $2,3456 \cdot \frac{2}{3}$;
9) $\bar{1},4576 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$; 10) $0,5648 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$.

2034. 1) $\bar{4}{,}5628 : 2$; 2) $\bar{3}{,}3142 : 2$;

3) $\bar{2}{,}8976 : 3$; 4) $\bar{1}{,}2437 : 3$;

5) $\bar{4}{,}1234 : 5$; 6) $\bar{6}{,}8473 : 4$;

7) $\bar{1}{,}2437 : (-2)$; 8) $\bar{2}{,}5435 : (-3)$;

9) $\bar{1}{,}8543 : (-0{,}2)$; 10) $1{,}5648 : (-2{,}6)$.

2035. Решить уравнения:

1) $10^x = 5{,}2$; 2) $10^x = 0{,}235$;

3) $10^{2x} = 0{,}035$; 4) $10^{-x} = 64{,}8$;

5) $\lg x = \bar{1}{,}832$; 6) $2\lg x = \bar{1}{,}358$.

2036. Заменить вычитание сложением:

1) $m - 0{,}8342$; 2) $m - 1{,}2372$;

3) $m - 2{,}5431$; 4) $m - 0{,}9999$;

5) $m - \bar{1}{,}3456$; 6) $m - \bar{2}{,}0001$.

2037. Известно, что $\lg 5 \approx 0{,}6990$. Найти:

1) $\lg 2$; 2) $-\lg 2$; 3) $\lg\frac{1}{2}$; 4) $\lg\frac{1}{5}$;

5) $\lg 0{,}05$; 6) $-\lg 0{,}005$; 7) $\lg 0{,}4$; 8) $-\lg 0{,}4$.

2038. Известно, что $\lg 2 \approx 0{,}3010$. Сколько цифр в числах 2^{10}, 2^{100}? Вычислить при помощи таблиц логарифмов.

2039. 1) $\dfrac{29{,}78^3 \cdot \sqrt[3]{81{,}27}}{9{,}876^2 \cdot \sqrt[4]{12{,}08}}$; 2) $\sqrt{\dfrac{27{,}46^3 \cdot \sqrt[3]{0{,}7234^2}}{5{,}634^5}}$;

3) $\dfrac{\sqrt[5]{10{,}43\sqrt{0{,}002756}}}{2{,}637^2 \cdot \sqrt[3]{0{,}6351^2}}$; 4) $\sqrt[5]{\dfrac{7{,}832\sqrt[4]{12{,}98^3}}{1{,}124^2}}$.

2040. 1) $\dfrac{94{,}56^3 \cdot 0{,}00364^2 \sqrt[3]{\frac{3}{7}}}{4{,}657^2 \cdot \sqrt{0{,}0467}}$; 2) $\dfrac{3{,}5^3\pi \cdot \sqrt{1{,}15}}{0{,}63^2 \cdot \sqrt{0{,}31} \cdot \sqrt[3]{0{,}458^2}}$;

3) $\dfrac{27{,}35^{0{,}75}\sqrt{36{,}08^{0{,}6}}}{0{,}12^{1{,}5} \cdot \sqrt{0{,}5}}$; 4) $\left(\dfrac{63{,}5^{2{,}5} \cdot \sqrt[3]{60{,}3^2}}{\sqrt{156^{0{,}2}}}\right)^{0{,}1}$.

2041. 1) $\sqrt[3]{-234{,}7}$; 2) $\sqrt[5]{-0{,}9875}$;

3) $27{,}34^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{-1{,}127}$; 4) $\dfrac{(-2{,}304)^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{0{,}3084}}{9{,}308^{-2}}$;

5) $\dfrac{\left(\frac{1}{10}\right)^{-3} \cdot \sqrt[-\frac{1}{2}]{2{,}801}}{\sqrt[3]{-0{,}00001}}$; 6) $\sqrt[-5]{\dfrac{-2{,}321^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[3]{9{,}032}}}$.

Вычислить путем логарифмирования по частям.

2042. 1) $\sqrt[5]{10-5,234\cdot\sqrt[5]{10}}$; 2) $\sqrt[6]{\dfrac{4,207+5\sqrt[4]{2,008}}{\sqrt[5]{17,23}}}$;

3) $\sqrt[7]{3,285^{2,3}+2,307^{3,2}}$; 4) $\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[5]{5}}{3^{0,6}}}$.

2043. 1) $\dfrac{13,23^{\frac{2}{3}}+3\sqrt[3]{0,01259}}{\sqrt[5]{0,8216^2\sqrt[4]{0,07453^3}}}$; 2) $300,8-23,47\cdot\sqrt[4]{\dfrac{6,003^3}{0,05915}}$;

3) $\dfrac{4}{3}\sqrt[12]{\dfrac{2,366^{2,4}+0,8128^3}{3,162^4}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{0,9606^3+\sqrt{0,4817}}}{\sqrt[5]{12,06}\cdot 3,703^{0,6}}$.

2044. 1) $\sqrt[8]{\dfrac{2,407^3}{0,9502^2}-\sqrt[5]{\dfrac{1,649^{1,5}}{0,08234^3}}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{4,53+\sqrt[3]{0,0783^2}}}{0,3784^3\cdot\sqrt[5]{85,92}}$;

3) $\dfrac{0.2145^3\cdot 3,2^{0,3}}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{\dfrac{0,6841}{0,5472}}+0,3}}$; 4) $\left(\dfrac{4,532^{0,2}+5\sqrt[3]{0,08846}}{15,06^{0,3}\cdot\sqrt{0,4892}}\right)^{0,3}$.

2045. 1) $\sqrt[5]{\dfrac{1,06^3\cdot\sqrt[4]{0,257}}{\sqrt[3]{0,0612}+0,754^{0,4}}}$; 2) $\sqrt[3]{\dfrac{1,875^4\cdot\sqrt[6]{0,0631}}{0,8732^2}+100^{0,6}}$;

3) $\sqrt[2,2]{1-\left(\sqrt[5]{0,234}\right)^{2,5}}$; 4) $\sqrt[-3]{\dfrac{12,5-\sqrt[5]{-3,45}}{0,0456}}$.

2046. 1) Вычислить при помощи логарифмической линейки произведения:

а) $37,2\cdot 2,13$; б) $0,243\cdot 38,5$; в) $0,0531\cdot 25,4$; г) $4,35\cdot 5,7$.

2) Дать обоснование умножения двух чисел *a* и *b* на линейке, когда метка множителя не выходит за пределы шкалы корпуса линейки (рис. 67). Как найти мантиссу и характеристику логарифма произведения?

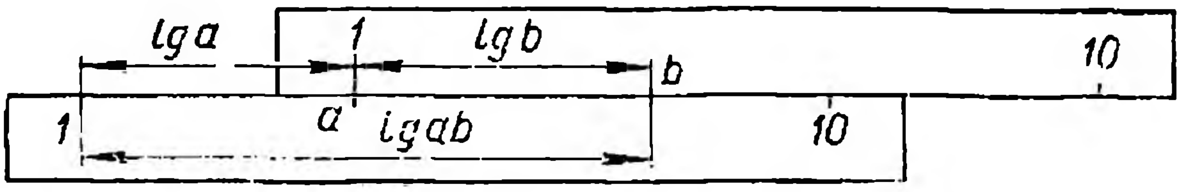


Рис. 67

3) Как найти мантиссу и характеристику логарифма произведения, когда метка множителя выходит за пределы шкалы корпуса линейки?

2047. 1) Вычислить при помощи логарифмической линейки:

а) $82{,}4 : 1{,}98$; б) $0{,}1234 : 23{,}78$; в) $\frac{12{,}3 \cdot 36{,}26}{17{,}3}$; г) $\frac{1{,}034 \cdot 2{,}83}{2{,}583}$.

2) Дать обоснование деления двух чисел a и b на линейке, когда начальная метка движка не выходит за пределы шкалы корпуса.

3) Если начальная метка движка выйдет за пределы шкалы корпуса, то частное можно прочитать на основной шкале корпуса под конечным делением движка. Обосновать это.

2048. 1) Вычислить при помощи логарифмической линейки:

а) $1{,}243^2$; б) $0{,}357^3$; в) $3{,}021^4$; г) $\sqrt{17{,}34}$; д) $\sqrt[3]{0{,}0342}$.

2) Если на основной шкале линейки засечь визиром метку a, то на шкале квадратов (кубов) под визиром можно прочесть первые значащие цифры квадрата (куба) числа a. Дать обоснование этой операции.

3) На какой подшкале квадратов (кубов) следует взять визиром подкоренное число, чтобы на основной шкале под визиром прочесть первые значащие цифры квадратного (кубичного) корня; привести примеры. Обосновать это действие.

Вычислить при помощи логарифмической линейки.

2049. 1) $\frac{12{,}08 \cdot 1{,}98}{5{,}327 \cdot 15{,}39}$; 2) $\frac{83{,}74 \cdot 5{,}109}{38{,}7 \cdot 0{,}935}$; 3) $\frac{91{,}7^2 \cdot 2{,}17^3}{2{,}39^2 \cdot 0{,}987}$; 4) $\frac{1{,}27^3 \cdot 29{,}6^2}{47{,}3^2 \cdot 1{,}39^3}$.

2050. 1) $0{,}931 \cdot \sqrt{23{,}91}$; 2) $21{,}3 \cdot \sqrt[3]{1{,}934}$;

3) $23{,}4 \cdot \sqrt{2{,}307^3}$; 4) $1{,}381 \cdot \sqrt[3]{21{,}51^2}$.

2051. 1) $\sqrt{\frac{0{,}1345^3}{2{,}37}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{52{,}3^2}{935{,}9}}$;

3) $\frac{2{,}34 \cdot \sqrt{59{,}04}}{0{,}00935 \cdot 87{,}8}$; 4) $\frac{24{,}8 \cdot \sqrt[3]{0{,}937}}{12{,}7 \cdot 0{,}00937}$.

2052. 1) $\frac{531^{0,5} \cdot 26{,}7^{\frac{1}{4}}}{345^{0,25}}$; 2) $\frac{2{,}5^{\frac{2}{3}} \cdot 1{,}65^{0,5}}{0{,}028^{\frac{1}{3}}}$;

3) $\frac{4{,}6^{\frac{2}{3}} \cdot 0{,}366^{\frac{1}{6}}}{0{,}0143 \cdot 0{,}0769^{\frac{1}{4}}}$; 4) $\frac{3{,}48 \cdot 0{,}274^{0,5}}{0{,}0146^{\frac{1}{3}} \cdot 0{,}37^{\frac{1}{12}}}$.

2053. 1) $(0{,}587)^{0,241}$; 2) $(1{,}234)^{1,234}$; 3) $(2{,}45)^{1,357}$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2,34}$.

2054. 1) $\sqrt{12,4}-\sqrt[3]{15,3}$; 2) $\sqrt{3,13+\sqrt[3]{9,876}}$;

3) $\sqrt[3]{7-\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{1,32+0,237\sqrt[3]{15,5}}{3,349^2}}$.

2055. 1) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt[3]{7}}{7-2,03^2}$; 2) $\frac{\sqrt{7,86^2-3,72^3}}{\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}}$;

3) $\frac{5-0,876^2}{\sqrt{10}-\sqrt{5}}$; 4) $\sqrt[3]{10-2,34\sqrt[3]{10}}$.

В следующих задачах вычисления произвести с помощью счетной линейки:

2056. 1) Найти площадь S правильного треугольника, сторона которого $a=2,34$ *м*, если $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

2) Пользуясь формулой $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, найти площадь S треугольника по трем его сторонам: $a=3,54$ *м*, $b=5,72$ *м*, $c=6,01$ *м*, где p — полупериметр треугольника.

2057. 1) Определить диаметр круга, площадь которого равна 12,4 *дм*^{2}.

2) Вычислить площадь кольца, внешний диаметр которого равен 5,24 *см*, а внутренний диаметр 4,76 *см*.

2058. 1) Найти диагональ куба, площадь диагонального сечения которого равна 24,5 *дм*^{2}.

2) Определить площадь диагонального сечения куба, полная поверхность которого равна 0,123 *м*^{2}.

3) Найти ребро куба, объем которого в три раза меньше объема другого куба с ребром 2,78 *дм*.

2059. Вычислить вес стальной трубы длиной 3,75 *м*, если внешний и внутренний диаметры ее равны соответственно 155 *мм* и 135 *мм* (удельный вес стали — 7,96 *кГ/дм*^{3}).

2060. Зная, что объем шара вычисляется по формуле $v=\frac{4}{3}\pi R^3$, найти вес чугунного полого шара, если внешний и внутренний диаметры его соответственно равны 100 *мм* и 90 *мм* (удельный вес чугуна — 7,13 *Г/см*^{3}).

2061. 1) Используя метку C на основной шкале счетной линейки, вычислить объем цилиндра по формуле $v=\left(\frac{D}{C}\right)^2\cdot H$, если:

а) $D=20,3$ *дм*, $H=4,5$ *дм*;
б) $D=1,24$ *м*, $H=0,54$ *дм*;
в) $D=1,05$ *м*, $H=2,07$ *дм*.

2) Моток медной проволоки диаметром 4 *мм* весит 20,5 *кГ*. Найти длину проволоки, если удельный вес меди 8,75 *Г/см*^{3}.

2062. Пользуясь формулой $Q=0,24I^2Rt$, рассчитать количество Q тепла в малых калориях, выделяемое за время $t=125$ *сек* током $I=0,45a$, проходящим по проводнику с сопротивлением $R=2,5$ *ом*.

2063. 1) Высота места h (*м*) над уровнем моря при $t = 10^\circ$ C вычисляется по формуле $h = 19080 \lg \frac{760}{p}$, где p — давление воздуха в миллиметрах ртутного столба. Определить h, если $p = 406{,}4$ *мм*.

2) Найти давление на высоте 10 *км*, если средняя температура $t = 10^\circ$ C.

Найти по таблицам.

2064. 1) $\lg\sin 30^\circ$; 2) $\lg\sin 78^\circ$; 3) $\lg\sin 20^\circ 12'$;
4) $\lg\sin 72^\circ 48'$; 5) $\lg\sin 50^\circ 18'$; 6) $\lg\sin 50^\circ 20'$;
7) $\lg\sin 45^\circ 29'$; 8) $\lg\sin 14^\circ 51'$; 9) $\lg\sin 11^\circ 20'$;
10) $\lg\sin 11^\circ 23'$; 11) $\lg\sin 9^\circ 06'$; 12) $\lg\sin 5^\circ 44'$;
13) $\lg\sin 5^\circ 45'$; 14) $\lg\sin 0^\circ 38'$.

2065. 1) $\lg\cos 15^\circ 12'$; 2) $\lg\cos 75^\circ 42'$; 3) $\lg\cos 40^\circ 24'$;
4) $\lg\cos 40^\circ 25'$; 5) $\lg\cos 62^\circ 35'$; 6) $\lg\cos 73^\circ 33'$;
7) $\lg\cos 80^\circ 35'$; 8) $\lg\cos 84^\circ 13'$; 9) $\lg\cos 89^\circ 20'$;
10) $\lg\cos 89^\circ 26'$.

2066. 1) $\lg \operatorname{tg} 20^\circ 42'$; 2) $\lg \operatorname{tg} 63^\circ 12'$; 3) $\lg \operatorname{tg} 30^\circ 32'$;
4) $\lg \operatorname{tg} 55^\circ 40'$; 5) $\lg \operatorname{tg} 41^\circ 17'$; 6) $\lg \operatorname{tg} 84^\circ 18'$;
7) $\lg \operatorname{tg} 5^\circ 48'$; 8) $\lg \operatorname{tg} 45^\circ$.

2067. 1) $\lg \operatorname{ctg} 35^\circ 24'$; 2) $\lg \operatorname{ctg} 35^\circ 25'$; 3) $\lg \operatorname{ctg} 26^\circ 38'$;
4) $\lg \operatorname{ctg} 75^\circ 47'$; 5) $\lg \operatorname{ctg} 86^\circ 23'$; 6) $\lg \operatorname{ctg} 84^\circ 13'$;
7) $\lg \operatorname{ctg} 0^\circ 34'$; 8) $\lg \operatorname{ctg} 45^\circ$.

Найти острый угол x, если дано значение функции.

2068. $\lg\sin x \approx$ 1) $\bar{1},6259$; 2) $\bar{1},7795$; 3) $\bar{1},8868$;
4) $\bar{1},9777$; 5) $\bar{1},4350$; 6) $\bar{1},4359$;
7) $\bar{1},8377$; 8) $\bar{1},9703$; 9) $\bar{1},1157$;
10) $\bar{1},3040$; 11) $\bar{2},4414$; 12) $\bar{1},0021$;
13) $\bar{2},9477$; 14) $\bar{3},8700$; 15) $\bar{1},9999$.

2069. $\lg\cos x \approx$ 1) $\bar{1},8081$; 2) $\bar{1},8830$; 3) $\bar{1},8855$;
4) $\bar{1},8817$; 5) $\bar{1},8815$; 6) $\bar{1},6332$;
7) $\bar{1},3947$; 8) $\bar{1},7643$; 9) $\bar{1},3331$;
10) $\bar{1},3810$; 11) $\bar{1},0046$; 12) $\bar{2},8720$.

2070. $\lg \operatorname{tg} x \approx$ 1) $\bar{1},9924$; 2) $0,3333$; 3) $0,1615$;
4) $\bar{1},7520$; 5) $\bar{1},4139$; 6) $2,9211$;
7) $\bar{2},8130$; 8) $1,0008$; 9) $1,6750$.

2071. $\lg \operatorname{ctg} x \approx$ 1) $\bar{1},9238$; 2) $0,1467$; 3) $0,1462$;
4) $\bar{1},4016$; 5) $0,3869$; 6) $\bar{1},6990$;
7) $\bar{1},3318$; 8) $\bar{1},0055$; 9) $2,3333$.

Вычислить с помощью таблиц логарифмов следующие выражения.

2072. $V=\frac{2}{3}a^3\cos^3\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$ при $a=2,56$ и $\alpha=54^\circ 30'$.

2073. $T=\frac{\sqrt{3}h^2}{\cos^2\alpha}\cdot\sin(\alpha+30^\circ)\cdot\sin(\alpha-30^\circ)$ при $h=0,28$ и $\alpha=41^\circ$.

2074. $S=\frac{a^2\sin^2\alpha\cdot\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$ при $a=208,3$; $\alpha=78^\circ 15'$; $\beta=43^\circ 22'$.

2075. $V=abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$ при $a=3,06$; $b=15,20$; $c=12,40$; $\alpha=62^\circ 50'$.

2076. $V=\frac{1}{12}\cdot\frac{m^3\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^3}$ при $m=20,1$; $\alpha=32^\circ 10'$.

2077. $R=\frac{r}{\sin\alpha}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$ при $r=12,56$; $\alpha=26^\circ 26'$.

2078. $H=\frac{1}{3}d(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha)^2$ при $d=6,178$; $\alpha=30^\circ 15'$; $\beta=20^\circ 28'$.

2079. $V=8m^3\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$ при $m=12,5$; $\alpha=20^\circ 20'$.

2080. $V=d^3\cos\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha\sqrt{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$ при $d=10,6$; $\alpha=50^\circ 10'$.

2081. $V=\frac{1}{2}b^3\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\beta-1}$ при $b=2,8$; $\alpha=50^\circ$; $\beta=42^\circ$.

2082. $S=l^2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}}$ при $l=10,29$; $\alpha=40^\circ 54'$; $\beta=36^\circ 26'$.

2083. $S=\frac{H^2}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\cdot(\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta+\cos\beta+\cos\alpha)$
при $H=3,7$; $\alpha=25^\circ$; $\beta=20^\circ$.

2084. $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}\right)$ при $a=5,08$; $\alpha=50^\circ 10'$; $\beta=25^\circ 20'$.

2085. $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi a^3}{(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)^2}$ при $a=13,65$; $B=50^\circ 18'$; $C=70^\circ 24'$.

2086. Углы какой величины охватывает шкала синусов; шкала тангенсов; шкала синусов и тангенсов малых углов?

2087. На сколько участков разделена шкала синусов; на сколько частей разделен каждый градус в этих участках? Какова цена деления на каждом участке?

2088. Отметить визиром бегунка на шкале синусов следующие деления:

1) 10°; 20°; 30°; 40°; 50°; 60°; 70°; 80°; 90°;
2) 8°; 11°; 12°; 17°; 35°; 45°; 55°; 75°;
3) 21°; 34°; 27°; 46°; 54°; 62°; 68°; 77°;

4) 12°10′; 15°40′; 18°20′; 10°50′; 16°30′; 7°40′; 9°25′; 6°45′; 8°05′; 5°55′;
5) 26°20′; 32°40′; 21°10′; 39°40′; 38°20′;
6) 44°30′; 52°30′; 47°30′; 50°30′; 49°30′;
7) 64°; 71°; 78°; 63°; 82°; 84°; 86°;
8) 8°,5; 11°,5; 17°30′; 42°30′; 24°20′; 13°50; 7°25′; 21°20′; 21°40′; 21°30′; 37°50′; 51°40′; 11°24′; 15°05′.

2089. Найти значение синуса данных углов при помощи логарифмической линейки; результаты сравнить с соответствующими значениями синуса, взятыми из таблиц (с округлением до третьего десятичного знака).

1) 40°; 2) 25°; 3) 36°; 4) 19°;
5) 54°; 6) 77°; 7) 15°20′; 8) 10°40′;
9) 19°10′; 10) 22°20′; 11) 38°40′; 12) 51°30′;
13) 46°30′; 14) 63°; 15) 82°; 16) 16°05′;
17) 12°,5; 18) 35°50′; 19) 7°25′; 20) 16°15′.

2090. На логарифмической линейке найти положительные острые углы по заданным значениям синуса; результаты сравнить с соответствующими значениями угла, взятыми из таблиц (с округлением до десятков минут):

1) 0,423; 2) 0,242; 3) 0,843; 4) 0,175; 5) 0,387;
6) 0,306; 7) 0,116; 8) 0,955; 9) 0,606; 10) 0,495.

2091. При помощи линейки найти значения косинуса данных углов; ответы проверить по таблицам натуральных значений косинуса:

1) 20°; 2) 70°; 3) 16°; 4) 65°; 5) 38°;
6) 53°; 7) 17°40′; 8) 54°30′; 9) 9°05′; 10) 72°.

2092. При помощи линейки найти положительные острые углы по данным значениям их косинусов; ответы проверить по таблице:

1) 0,270; 2) 0,583; 3) 0,132; 4) 0,326; 5) 0,745.

2093. Вычислить при помощи линейки:

1) $\arcsin 0,165$; 2) $\arcsin 0,380$; 3) $\arcsin 0,755$;
4) $\arccos 0,407$; 5) $\arccos 0,109$.

2094. Какие деления содержит шкала тангенсов? Какова цена деления шкалы тангенсов на участке от ее начала (5°44′) до 20° и от 20° до конца (45°)?

2095. Отметить визиром бегунка на шкале тангенсов

16°; 27°; 34°; 38°; 44°; 45°; 7°30′; 11°20′; 21°50′; 8°25′; 6°22′; 32°23′; 27°25′.

2096. Найти при помощи линейки:

1) $\mathrm{tg}\,14^\circ$; 2) $\mathrm{tg}\,28^\circ$; 3) $\mathrm{tg}\,7^\circ 30'$; 4) $\mathrm{tg}\,10^\circ 40'$;
5) $\mathrm{ctg}\,9^\circ 35'$; 6) $\mathrm{tg}\,72^\circ 30'$; 7) $\mathrm{tg}\,8^\circ 37'$; 8) $\mathrm{ctg}\,26^\circ 18'$;
9) $\mathrm{tg}\,72^\circ$; 10) $\mathrm{ctg}\,35^\circ 30'$; 11) $\mathrm{tg}\,38^\circ 30'$; 12) $\mathrm{ctg}\,26^\circ 45'$.

2097. При помощи линейки найти положительный острый угол x, если:

1) $\mathrm{tg}\,x \approx 0{,}364$; 2) $\mathrm{tg}\,x \approx 0{,}648$; 3) $\mathrm{tg}\,x \approx 4{,}60$;
4) $\mathrm{ctg}\,x \approx 0{,}505$; 5) $\mathrm{tg}\,x \approx 1{,}455$; 6) $\mathrm{ctg}\,x \approx 0{,}949$;
7) $\mathrm{ctg}\,x \approx 0{,}795$; 8) $\mathrm{tg}\,x \approx 0{,}864$; 9) $\mathrm{tg}\,x \approx 1{,}94$.

2098. Вычислить при помощи линейки:

1) $\mathrm{arctg}\,0{,}516$; 2) $\mathrm{arctg}\,0{,}960$; 3) $\mathrm{arcctg}\,1{,}76$;
4) $\mathrm{arcctg}\,0{,}724$; 5) $\mathrm{arctg}\,4{,}83$; 6) $\mathrm{arctg}\,20{,}8$.

2099. Какова цена наименьших делений шкалы синусов и тангенсов углов на участках: от начала шкалы до 3°, от 3° до 5° и от 5° до конца шкалы?

2100. Какой числовой промежуток охватывает основная шкала линейки при нахождении значений синусов и тангенсов малых углов?

2101. Почему для продолжения двух шкал синусов и тангенсов употребляется одна и та же шкала (тангенсов и синусов малых углов)?

2102. Отметить визиром бегунка на шкале синусы и тангенсы следующих углов:

$1^\circ 10'$; $1^\circ 50'$; $2^\circ 20'$; $3^\circ 40'$; 4°; $4^\circ 30'$; 5°; $5^\circ 30'$; $5^\circ 40'$; $1^\circ 27'$;
$2^\circ 13'$; $2^\circ 19'$; $3^\circ 06'$; $4^\circ 41'$; $4^\circ 05'$; $5^\circ 22'$; $2^\circ 52',5$.

2103. Найти при помощи линейки:

1) $\sin 3^\circ$; 2) $\sin 1^\circ 20'$; 3) $\mathrm{tg}\,5^\circ$; 4) $\sin 3^\circ 20'$; 5) $\mathrm{tg}\,2^\circ 37'$;
6) $\sin 4^\circ 05'$; 7) $\sin 1^\circ 12',6$; 8) $\mathrm{tg}\,4^\circ 30'$; 9) $\sin 0^\circ 52',5$.

2104. На логарифмической линейке найти положительный острый угол, если:

1) $\sin x \approx 0{,}061$; 2) $\sin x \approx 0{,}0332$; 3) $\sin x \approx 0{,}0131$;
4) $\sin x \approx 0{,}0301$; 5) $\cos x \approx 0{,}0447$; 6) $\sin x \approx 0{,}0465$;
7) $\mathrm{tg}\,x \approx 0{,}0787$; 8) $\mathrm{tg}\,x \approx 0{,}0419$; 9) $\mathrm{ctg}\,x \approx 14{,}3$;
10) $\mathrm{tg}\,x \approx 20{,}8$.

2105. Вычислить при помощи линейки:

1) $\arcsin 0{,}0355$; 2) $\mathrm{arctg}\,0{,}0725$; 3) $\arccos 0{,}0159$.

Найти при помощи линейки.

2106. 1) $\sin^2 8^\circ 55'$; 2) $\sin^2 43^\circ$;
3) $\cos^2 68^\circ$; 4) $\cos^2 88^\circ 41'$.

2107. 1) $\operatorname{tg}^2 10^\circ$; 2) $\operatorname{tg}^2 37^\circ 20'$;
3) $\operatorname{ctg}^2 67^\circ$; 4) $\operatorname{ctg}^2 79^\circ 55'$.

2108. 1) $\sin^3 11^\circ 20'$; 2) $\sin^3 25^\circ 40'$;
3) $\cos^3 44^\circ$; 4) $\cos^3 82^\circ 10'$.

2109. 1) $\operatorname{tg}^3 25^\circ 10'$; 2) $\operatorname{tg}^3 75^\circ 30'$;
3) $\operatorname{ctg}^3 6^\circ 05'$; 4) $\operatorname{ctg}^3 40^\circ 20'$.

2110. 1) $2{,}6 \sin 54^\circ$; 2) $18{,}3 \sin 21^\circ 20'$;
3) $55{,}2 \cos 47^\circ 30'$; 4) $4{,}65 \cos 86^\circ 20'$.

2111. 1) $0{,}75^2 \cdot \sin^2 27^\circ 30'$; 2) $30{,}6^3 \cdot \sin^3 26^\circ 20'$;
3) $5{,}5^2 \cdot \cos 42^\circ 30'$; 4) $1{,}42^3 \cdot \cos^3 73^\circ 50'$.

2112. 1) $\sqrt{5{,}6} \cdot \sin 52^\circ 30'$; 2) $\sqrt{13{,}4} \cdot \cos 82^\circ 15'$;
3) $\sqrt[3]{8{,}2} \cdot \sin 21^\circ 10'$; 4) $\sqrt[3]{0{,}325} \cdot \cos 68^\circ 10'$.

2113. 1) $1{,}6 \operatorname{tg} 11^\circ 30'$; 2) $2{,}42 \operatorname{tg} 21^\circ 15'$;
3) $26{,}2 \operatorname{ctg} 78^\circ 40'$; 4) $5{,}65 \operatorname{ctg} 54^\circ$.

2114. 1) $5{,}4^2 \cdot \operatorname{tg}^2 44^\circ$; 2) $10{,}8^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 77^\circ 40'$;
3) $0{,}45^3 \cdot \operatorname{tg}^3 16^\circ$; 4) $8{,}25^3 \cdot \operatorname{ctg}^3 48^\circ 20'$.

2115. 1) $\sqrt{82} \cdot \operatorname{tg} 9^\circ 20'$; 2) $\sqrt{5{,}45} \cdot \operatorname{ctg} 81^\circ 40'$;
3) $\sqrt[3]{1{,}8} \cdot \operatorname{tg} 38^\circ$; 4) $\sqrt[3]{60} \cdot \operatorname{ctg} 57^\circ$.

2116. 1) $\dfrac{6{,}5}{\sin 40^\circ}$; 2) $\dfrac{0{,}89}{\sin 46^\circ 30'}$;
3) $\dfrac{2{,}48}{\cos 35^\circ 30'}$; 4) $\dfrac{12{,}6}{\cos 63^\circ 40'}$.

2117. 1) $\dfrac{0{,}38}{\operatorname{tg} 11^\circ 20'}$; 2) $\dfrac{65{,}4}{\operatorname{ctg} 57^\circ 37'}$;
3) $\dfrac{\sqrt{28{,}5}}{\operatorname{tg} 27^\circ 25'}$; 4) $\dfrac{\sqrt{6{,}5}}{\operatorname{ctg} 48^\circ 50'}$.

2118. 1) $\dfrac{\sqrt{10{,}5}}{\sin 21^\circ 20'}$; 2) $\dfrac{\sqrt{0{,}84}}{\cos 46^\circ 30'}$;
3) $\dfrac{\sqrt[3]{78}}{\sin 52' 30''}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{183}}{\cos 73^\circ 55'}$.

2119. $x = \dfrac{\pi \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$ при $\alpha = 22^\circ$; $\beta = 24^\circ$.

2120. $y = 2\sqrt{2} \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$ при $\alpha = 12^\circ 10'$; $\beta = 10^\circ 30'$.

2121. $H = \dfrac{\pi \sin \alpha \cdot \sin \varphi}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \beta}$ при $\alpha = 3^\circ$; $\beta = 10^\circ$; $\varphi = 40'$.

2122. $R = \dfrac{2\sqrt{2}\, h}{\operatorname{tg} \alpha}$ при $h = 20{,}4$ *см*; $\alpha = 40^\circ 20'$.

2123. $S = \dfrac{\pi R^2 \sin \alpha}{\operatorname{tg} \varphi}$ при $R = 0{,}28$ *дм*; $\alpha = 23^\circ$; $\varphi = 44^\circ$.

2124. Найти положительные острые углы A_1, A_2, A_3 и A_4, если:

1) $\frac{\mathrm{tg}\, A_1}{19{,}1} = \frac{\mathrm{tg}\, A_2}{52} = \frac{\mathrm{tg}\, A_3}{32{,}4} = \frac{\mathrm{tg}\, A_4}{44{,}4} = \frac{\mathrm{tg}\, 24^\circ}{62{,}5}$;

2) $\frac{\sin A_1}{1{,}97} = \frac{\sin A_2}{2{,}86} = \frac{\sin A_3}{4{,}5} = \frac{\sin A_4}{3{,}72} = \frac{\sin 19^\circ}{5{,}6}$.

2125. Найти положительный острый угол x из пропорции:

1) $\frac{\mathrm{tg}\, x}{1{,}49} = \frac{\mathrm{tg}\, 32^\circ}{4{,}20}$; 2) $\frac{\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}\, 2^\circ} = \frac{7}{6}$; 3) $\frac{\mathrm{tg}\, x}{2{,}02} = \frac{\mathrm{tg}\, 45^\circ}{7{,}2}$;

4) $\frac{\sin x}{0{,}41} = \frac{\sin 40^\circ}{0{,}9}$; 5) $\frac{\sin x}{\sin 2^\circ 20'} = \frac{13}{17}$; 6) $\frac{\sin x}{0{,}14} = \frac{\sin 90^\circ}{0{,}47}$.

2126. Найти a и b, если:

1) $\frac{\sin 11^\circ 40'}{a} = \frac{\sin 28^\circ}{b} = \frac{\sin 52^\circ}{83{,}5}$;

2) $\frac{\sin 25^\circ 20'}{a} = \frac{\sin 64^\circ 40'}{b} = \frac{\sin 90^\circ}{3{,}96}$;

3) $\frac{\mathrm{tg}\, 12^\circ 10'}{a} = \frac{\mathrm{tg}\, 27^\circ 40'}{b} = \frac{\mathrm{tn}\, 42^\circ}{0{,}618}$.

2127. Найти положительный острый угол x:

1) $2{,}4 \cdot \sin 3^\circ = 0{,}7 \cdot \sin x$; 2) $22 \cdot \mathrm{tg}\, 4^\circ = 7{,}4 \cdot \sin x$.

2128. Найти: 1) $\mathrm{arctg}\, \frac{25}{74}$; 2) $\mathrm{arctg}\, \frac{18}{295}$; 3) $\arcsin \frac{3}{43}$.

§ 38. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Решить показательные уравнения путем уравнивания оснований.

2129. 1) $2^x = 4^5$; 2) $10^{-x} = 10\,000$; 3) $2^{-x} = \frac{1}{8}$;

4) $10^x = 0{,}001$; 5) $8^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{4}$; 6) $2^{x+2} = 64$.

2130. 1) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{3}$; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} = \frac{9}{4}$; 3) $(0{,}16)^x = \frac{5}{2}$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{0{,}2x} = 3\frac{3}{8}$; 5) $(0{,}75)^{x+1} = \frac{16}{9}$; 6) $4^{-5x} = \left(\frac{1}{8}\right)^{x+15}$.

2131. 1) $\sqrt{5^x} = 25$; 2) $\sqrt[3]{a^x} = \sqrt{a^{2x+1}}$; 3) $\sqrt[x+1]{a} = \sqrt[x]{a^2}$;

4) $b\sqrt{b^x} = \sqrt[3]{b^2}$; 5) $3^x = \sqrt[x]{3}$; 6) $\sqrt{8^x} = \sqrt[x]{32}$.

2132. 1) $2^{x^2-6x-2{,}5} = 16\sqrt{2}$; 2) $4^{2\sqrt{2}} = 2^{2x-6}$;

3) $8^{\frac{5}{3}x-4} = 4^{6-\frac{3}{2}x}$; 4) $0{,}5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$.

2133. 1) $5^{3x-1}=1$; 2) $0{,}2^{0{,}27-3x^2}=1$;

3) $a^{(3-x)(2x+1)}=1$; 4) $a^{x^2-x-6}=1$.

2134. 1) $0{,}01\sqrt[x]{1000}=\sqrt[3]{(0{,}1)^x}$; 2) $(0{,}25)^{x-14}=\frac{128}{2^{x-16}}$;

3) $16^{\frac{x+10}{x-10}}=0{,}125\cdot 8^{\frac{x+5}{x-15}}$; 4) $2^{x-1}\cdot 5^{x-1}=0{,}001\cdot 10^{2x+5}$.

2135. 1) $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-3}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^x}$; 2) $8\sqrt{(0{,}125)^{4-\frac{x}{3}}}=2^{\sqrt{x-6}}$;

3) $3^{x-1}=6^x\cdot 2^{-x}\cdot 3^{x+1}$; 4) $3^{x-1}=18^{2x}\cdot 2^{-2x}\cdot 3^{x+1}$.

2136. 1) $5^{|x|}=25$; 2) $6^{1-|x|}=36$;

3) $3^{2-\log_3 18}=\sqrt[x]{8}$; 4) $2^{3+\log_2 24}=3\sqrt[x]{8}$.

2137. 1) $0{,}5\cdot 2^{\cos x}=1$; 2) $4^{\sin x\cdot\cos x}=\sqrt{2}$;

3) $9^{|\cos x|}=3$; 4) $0{,}25^{|\sin x|}=2\sqrt{2}$.

2138. 1) $2^{\log_2\sin x}=1$; 2) $5^{1+\log_5\cos x}=2{,}5$;

3) $3^{\log_3|\cos x|}=0{,}5$; 4) $a^{\log_a\sin x}-b^{\log_b\cos x}=0$;

5) $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{\log_{\sqrt{2}}\cos x}-1=0$; 6) $0{,}5^{-2\log_2\sin x}+\cos x=1{,}25$.

2139. Решить показательные уравнения путем логарифмирования обеих его частей:

1) $6^x=23$; 2) $15^{-2x}=42{,}5$;

3) $8^{\cos x}=5$; 4) $5^{-2\operatorname{tg} x}=100$;

5) $5^{2x+1}-7^{x+1}=5^{2x}+7^x$; 6) $3^{x-1}\cdot 2^{3x-7}=12^{9-x}$.

Решить показательные уравнения способом вынесения общего множителя за скобки.

2140. 1) $5^{x+1}+5^x=150$; 2) $3^{x+1}-4\cdot 3^{x-1}=45$;

3) $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=56$; 4) $3^{x+1}-2\cdot 3^{x-1}-4\cdot 3^{x-2}=17$.

2141. 1) $2\cdot 3^{3x-1}+27^{x-\frac{2}{3}}=9^{x-1}+2\cdot 3^{2x-1}$;

2) $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$;

3) $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=3^x-3^{x-1}+3^{x-2}$;

4) $2^{\sqrt{x}+2}-2^{\sqrt{x}+1}=12+2^{\sqrt{x}-1}$.

Решить показательные уравнения методом замены переменной.

2142. 1) $3^{2x}-8\cdot 3^x-9=0$; 2) $2^{2x+6}+2^{x+7}=17$;

3) $2^{2+x}-2^{2-x}=5$; 4) $5^x-0{,}2^x=4$.

2143. 1) $25^{x+1}+0{,}4=11\cdot 5^{x}$; 2) $27^{2\sqrt{x}}=4\cdot 3^{\sqrt{9x}}-3$;

3) $1-3\cdot 2^{1-x}+2^{3-2x}=0$; 4) $3\cdot 2^{2(\sqrt{x}-1)}-2^{\sqrt{x}}-8=$

2144. 1) $9^{x+1}+9^{2x-1}=54\cdot 27^{x-1}$;

2) $12\sqrt[2x]{3}-\sqrt[x]{3}-27=0$;

3) $3\cdot 2^{\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}}-8\cdot 2^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}}+4=0$;

4) $7\cdot 4^{x^2}-9\cdot 14^{x^2}+2\cdot 49^{x^2}=0$.

2145. Решить графически следующие уравнения:

1) $2^{x}=0{,}8$; 2) $0{,}5^{x}=2x$; 3) $2^{x}=x^{2}$;

4) $x=3^{x-2}$; 5) $2^{x}+x-3=0$; 6) $3^{x+1}+x^{2}-9=0$.

2146. Решить неравенства:

1) $2^{\frac{3}{x}}>0$; 2) $0<3^{x^2-x-6}<1$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x^2-15x+13}<\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3x}$;

4) $2^{2x-1}+2^{2x-3}-2^{2x-5}>2^{7-x}+2^{5-x}-2^{3-x}$;

5) $3^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}+3}>84$; 6) $5^{x^2-7x+12}>1$.

Решить логарифмические уравнения:

2147. 1) $\lg x=2+\lg 3-\lg 5$; 2) $\lg(54-x^3)=3\lg x$;

3) $\lg(x-2)+\lg(x-3)=1-\lg 5$;

4) $\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0{,}18$.

2148. 1) $\dfrac{\lg(2x-5)}{\lg(x^2-8)}=0{,}5$; 2) $\dfrac{\lg(3x-5)}{\lg(3x^2+25)}=\dfrac{1}{2}$;

3) $\dfrac{1}{4-\lg x}+\dfrac{2}{2+\lg x}=1$; 4) $\lg x^4-\dfrac{30}{\lg x}=2$.

2149. 1) $\lg\left(36+2^{\sqrt{2(x-1)}}\right)^{\frac{3}{2}}=3$; 2) $\lg\sqrt[3]{75+5^{\sqrt{x-1}}}=1$;

3) $\log_x(2x^2-7x+12)=2$; 4) $\log_2(9-2^x)=3-x$.

2150. 1) $\log_2^2 x+3=2\log_2 x^2$;

2) $\lg^2 x-\lg x^2=\lg^2 3-1$;

3) $\lg 6+x\lg 5=x+\lg(2^x+1)$;

4) $\lg 2+\lg\left(4^{x-2}+9\right)=1+\lg\left(2^{x-2}+1\right)$.

2151. 1) $\lg\lg\lg x=0$; 2) $\log_5\lg\sqrt{x^2+19}=0$;

3) $\log_7\log_4\log_3^2(x-7)=0$; 4) $\log_4\log_3\log_2 x=\dfrac{1}{2}$.

Решить уравнения.

2152. 1) $x^{-2+\lg x}=1000$; 2) $x^{1-\frac{\lg x}{4}}=10$;

3) $x^{2\lg x}=10x$; 4) $x^{0,1+\frac{1}{5}\lg x}=\sqrt{x}$.

2153. 1) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=x$; 2) $10x^{2+\lg x}=(0,01)^{-2}$;

3) $x^{-\frac{2}{3}+\lg x}=100\sqrt[3]{100}$; 4) $\lg x^{\lg x}=1$.

2154. 1) $5^{\lg x}-3^{-1+\lg x}=3^{1+\lg x}-5^{-1+\lg x}$;

2) $9^{\log_{25}x^2}+\log_{\sqrt{2}}2\sqrt{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(9^{1+\log_{25}x}-9^{\log_{25}x}\right)$.

2155. Решить графически следующие уравнения:

1) $\lg x=1-x$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}x+2=0$;

3) $\log_2 x+|x|=0$; 4) $2\log_2 x=\sin x$.

2156. Решить логарифмические неравенства:

1) $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$; 2) $\log_{(x+3)}16>2$;

3) $\log_{0,5}(3x-1)<\log_{0,5}(3-x)$; 4) $\log_{(2x-3)}x>1$;

5) $\log_{(3x-2)}x<1$; 6) $\lg\frac{6}{x}>\lg(x+5)$.

2157*. Решить уравнения, используя формулу перехода от одной системы логарифмов к другой $\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$:

1) $\log_2 x+\log_8 x=8$;

2) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27}x=5,5$;

3) $\log_x 4+\log_{x^2}64=5$;

4) $3\log_x 16-4\log_{16}x=2\log_2 x$;

5) $\log_{x^2}16+\log_{2x}64=3$;

6) $\log_x 2\cdot\log_{2x}2=\log_{4x}2$.

Решить системы уравнений.

2158. 1) $\begin{cases}2^{x-y}=128,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2y+1}=\frac{1}{8};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt[x]{x+y}=2,\\ (x+y)\cdot 5^x=100;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\lg x-\lg y=7,\\ \lg x+\lg y=5;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\lg x-\lg y=2,\\ x-10y=900.\end{cases}$

2159. 1) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 4, \\ x^{\lg y} = 1000; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 1000, \\ x^{\lg y} = 100; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y^{\frac{x}{2}} = x, \\ y^2 = x^3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^{x+y} - y^{12} = 0, \\ y^{x+y} = x^3. \end{cases}$

2160. 1) $\begin{cases} \lg(x+y) - \lg(x-y) = 2\lg 2 + \lg 3, \\ \lg(x^2+y^2+10) = 2 + \lg 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \lg(x-y) - 2\lg 2 = 1 - \lg(x+y), \\ \lg x - \lg 3 = \lg 7 - \lg y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5^{\lg(x-2y)} = 1, \\ 3^{x-y} - 26 \cdot 3^{\frac{x-y}{2}} = 27; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt[(x-y)]{x+y} = 15, \\ (x+y) \cdot 3^{y-x} = 25. \end{cases}$

2161. 1) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = a, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = \frac{5}{2}\lg^2 a; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = \frac{3}{2}, \\ \log_x 3 + \log_y 9 = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = \frac{5}{2}, \\ \log_6(x^2+y^2) = 1. \end{cases}$

При радиоактивном распаде масса M оставшегося вещества определяется по формуле $M = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, где M_0 — количество вещества к началу распада, T — период полураспада.

Используя эту формулу, решить следующие задачи.

2162. Найти период T полураспада радия A, если через t минут распада от M_0 *мг* осталось M *мг* радия A.

Вычислить T, если $t = 6$ *мин*, $M_0 = 8$ *мг* и $M = 2$ *мг*.

2163. Через сколько минут радиоактивного распада от массы M_0 *мг* радия C останется M *мг*, если его период полураспада равен T *мин*?

Вычислить это время, если $M_0 = 100$ *мг*, $M = 25$ *мг* и $T = 20$ *мин*.

2164. Найти начальную массу радиоактивного вещества с периодом полураспада T лет, если по истечении t лет осталось M *г* этого вещества.

Вычислить M_0, считая, что $M = 3$ *г*, $t = 15$ лет, $T = 5$ лет.

2165. К началу наблюдения радиоактивного распада имелось M_1 *г* вещества с периодом полураспада T_1 лет и M_2 *г* вещества с периодом полураспада T_2 лет. Найти время распада, по истечении которого оба вещества будут иметь одинаковую массу.

Вычислить время распада, полагая, что $M_1 = 3$ *г*, $T_1 = 7$ лет, $M_2 = 24$ *г*, $T_2 = 3$ года.

2166. К началу наблюдения радиоактивного распада имелось M_1 *г* вещества с периодом полураспада T_1 лет и M_2 *г* другого вещества, период полураспада которого T_2 неизвестен. Найти период полураспада T_2 второго вещества, если через t лет массы обоих веществ станут одинаковы.

Вычислить значение T_2, полагая, что $M_1 = 125$ *мг*, $T_1 = 5$ лет, $M_2 = 1$ *г*, $t = 15$ лет.

2167. Искусственным путем было получено 30 *г* радиоактивного вещества с периодом полураспада в 10 суток. Через 10 суток было получено еще 15 *г* того же вещества. Через сколько суток от начала опыта из всей массы полученного вещества останется лишь 7,5 *г*?

2168. Имеется 8 *г* радиоактивного вещества с периодом полураспада в 3 года и 6 *г* вещества с периодом полураспада в 6 лет. Через сколько лет масса первого вещества будет на 1 *г* меньше массы второго вещества?

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

2169. Построить график функции $y = 0{,}25^x$. Пользуясь графиком, а) ответить, что больше и на сколько: $4^{-0{,}6}$ или $0{,}25^{1{,}2}$; б) найти с точностью до 1 значение y при $x = -\sqrt{2}$; значение x при $y = 2{,}5$.

2170. Исследовать функцию $y = 2^x - 4$ и построить ее график. Какая разница между графиком функции $y = 2^x$ и $y = 2^x - 4$?

2171. Найти значение r, при котором график функции $y = x^r$ проходит через точку $A\left(\frac{3}{4};\ \frac{1}{4}\sqrt[4]{108}\right)$.

2172. Найти наибольшее и наименьшее значения следующих функций:

1) $y = 2^{\cos x}$; 2) $y = 5^{1-\sin x}$;

3) $y = 3 + 3^{|\sin x|}$; 4) $y = \frac{10}{5^{|\cos x|}}$.

Решить уравнения.

2173. 1) $\sqrt{2} \cdot 2^{\cos x} = 2$; 2) $4^{\sin x} = \sqrt[\cos x]{2}$;

3) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\lg 4}{\lg 8}$; 4) $0{,}25^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$.

2174. 1) $\left(\frac{1}{8} \cdot 4^x\right)^x = 2^{3x-4}$; 2) $8^{3x-5} = 0{,}125 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{6-5x}$;

3) $\left[\frac{1}{3} \cdot \left(3^{\sqrt{x}+1}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}+2}} = 9$; 4) $\left(2^{-3} \cdot \sqrt{2}\right)^x = 2^3 \cdot 4^{3-2x}$.

2175*. 1) $4^x + 6^x = 9^x$; 2) $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 6 \cdot 9^{-\frac{1}{x}}$;

3) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$;

4) $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = 8$.

2176. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = a^2, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 10 \lg^2 a. \end{cases}$

2177. Пользуясь графическим методом, найти действительные корни уравнения (с точностью до 0,1):

1) $2^x = x$; 2) $2^x = x + 1$;

3) $2^x = x + 2$; 4) $2^x = x + 3$.

2178. Построить график функции $y = \log_3 x$. Пользуясь графиком, найти приближенные значения y при $x = 2{,}5$ и при $x = 4{,}5$; x при $y = -0{,}5$ и при $y = 1{,}5$.

2179. Исследовать функцию $y = \log_2(-x)$ и построить ее график. Какая разница между графиком функций $y = \log_2(-x)$ и $y = \log_2 x$?

2180. Построить график функции $y = \log_3 |x - 2|$.

2181. Возможно ли равенство:

1) $\lg \sin x = \sin x$; 2) $\lg \sin x = \cos x$?

2182. Найти область определения функции:

1) $y = \lg \sin x$; 2) $y = \sqrt{\lg \cos x}$.

2183. Как изменяются функции 1) $y = \lg \sin x$ и 2) $y = \lg \cos x$ при возрастании аргумента x от 0 до $\frac{\pi}{2}$?

2184. Вычислить (устно):

1) $\lg \sin 30^\circ \cdot \lg \sin 45^\circ \cdot \lg \sin 60^\circ \cdot \lg \sin 75^\circ \cdot \lg \sin 90^\circ \cdot \lg \sin 120^\circ$;

2) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \ldots \cdot \lg \operatorname{tg} 49^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 50^\circ$;

3) $\lg (\operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 41^\circ \cdot \operatorname{tg} 42^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 50^\circ)$.

2185. Определить допустимые значения для x в функции

$$y = \lg \left(\frac{4x + 3}{2x - 3} - 1 \right).$$

2186. При каких значениях x справедливы следующие равенства:

1) $\lg (x^2 - 10x + 25) = 2 \lg (5 - x)$;

2) $\lg (x^2 - 10x + 25) = 2 \lg |x - 5|$?

2187*. Определить, при каких значениях x каждая из следующих функций

1) $y = \lg \left(\frac{3x - 2}{x - 1} + 1 \right)$, 2) $y = \lg (x^2 - 2x - 2)$

а) принимает только положительные значения; б) принимает только отрицательные значения; в) не существует?

2188. Что больше:

1) $\frac{5}{\lg\frac{1}{2}}$ или $\frac{6}{\lg\frac{1}{2}}$; 2) $15^{\log_3 10}$ или $10^{\log_3 15}$?

Решить уравнения.

2189. 1) $\log_{\sqrt{2}} x = 6$; 2) $\log_x 0{,}125 = -2$; 3) $\log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{64} = x$.

2190. 1) $\log_{\cos x} 2 = -2$; 2) $\log_{\operatorname{tg} x} \sqrt{3} = -1$.

2191. Показать, что

$$\frac{1}{\sqrt[4]{8}} \cdot 2^{\left(\log_3 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}}\right)} = 1.$$

2192. Доказать, что $\lg\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right) = -\lg\left(a - \sqrt{a^2 - 1}\right)$.

2193. Решить уравнение $\log_{(2x-3)}(3x^2 - 7x + 3) - 2 = 0$.

2194. Решить следующие неравенства:

1) $\log_2(3x - 7) < 1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) > 1$; 3) $\log_3|2x-7| < 1$.

2195. Вычислить:

1) $8^{\log_2 3} \cdot (\lg 6{,}7 - \lg 0{,}67)$; 2) $3^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt{5} + \log_9 25}$.

2196*. Дано: $\lg 2 = a$ и $\lg 3 = b$. Найти $\log_5 6$.

2197*. Вычислить:

1) $\log_3 \sin^2 \frac{\pi}{7} \cdot \log_{\sin \frac{\pi}{7}} 9$; 2) $\log_5 \cos^3 \frac{\pi}{5} \cdot \log_{\cos \frac{\pi}{5}} 25 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \cos \frac{\pi}{3}$.

2198*. Показать, что

1) $\log_{\sqrt[3]{b}} a \cdot \log_{a^3} b^3 = 3$; 2) $\log_{\sqrt[3]{5}} 2 \cdot \log_{\sqrt[3]{2}} 5 = 9$.

2199. Вычислить без таблиц логарифмов

$$\lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2.$$

2200. Дано: $\lg 196 \approx 2{,}2923$; $\lg 56 \approx 1{,}7482$.
Найти $\lg 2$ и $\lg 5$, не пользуясь таблицами.

2201. Найти $\log_{12} 45$, если $\log_{12} 2 = m$ и $\log_{12} 5 = n$.

2202. Найти $x + y + z$, если

$$\lg x = 4 \lg \cos\beta, \quad \lg y = 2 \lg \sin\beta + 2 \lg \cos\beta, \quad \lg z = 2 \lg \sin\beta.$$

2203. Вычислить с помощью счетной линейки:

1) $x = 23{,}5 \cdot \sqrt[3]{\frac{6{,}05}{\sin 35^\circ}}$; 2) $x = 64{,}4 + 15{,}7 \sqrt{\frac{2{,}01^3}{\operatorname{tg} 2^\circ 35'}}$;

3) $x = \dfrac{\sqrt[3]{25{,}6 - \sqrt{\dfrac{506}{967}}}}{\sin^2 42^\circ 30' \cdot \sqrt[3]{\cos^2 55^\circ 20'}}$; 4) $x = \dfrac{\sqrt[9]{8{,}7 + \sqrt[3]{0{,}719}}}{\operatorname{tg}^2 1^\circ 31' \cdot \sqrt{1{,}29}}$.

2204. Вычислить при помощи таблиц логарифмов:

1) $x = 0{,}8372 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{2{,}037^{1{,}5} + 0{,}8403^2}{1{,}342^2}}$;

2) $x = \sqrt{\dfrac{4{,}231^3 \cdot \sqrt[4]{0{,}05894^5}}{0{,}8868^4} + 2000^{0{,}4}}$;

3) $S = 4R^2 \sin\beta(\cos\beta + \sin\beta + 1)$ при $R = 2{,}05$; $\beta = 35^\circ 20'$;

4) $V = \dfrac{\pi l^3 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}}{9\sqrt{3}} \sqrt{3 - 4\cos^2\alpha}$ при $l = 20{,}3$; $\alpha = 40^\circ 30'$.

Решить логарифмические уравнения.

2205. 1) $x - \lg 5 = x \lg 5 + 2 \lg 2 - \lg(1 + 2^x)$;

2) $\log_2\left(2^{x^2-5x+4} + \dfrac{1}{4}\right) = \log_5 0{,}2$;

3) $\log_5\left[\log_2^2 (x - 7)\right] = 0$;

4) $\lg^2 100x + 2 \lg x = 20$.

2206*. 1) $\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 8$;

2) $\log_a x + 2 \log_{a^2} x + 3 \log_{a^3} x = 3$;

3) $(\log_x 3) \cdot (\log_{3x} 3) = \log_{9x} 3$;

4) $-2 \log_{\frac{x}{3}} 3 \cdot \log_{\frac{x}{9}} 3 = \log_{\frac{x}{81}} 3$.

2207. Найти действительные корни уравнения $x \log_2 x = 1$.

2208*. Доказать тождества:

1) $\log_a N \cdot \log_b N + \log_a N \cdot \log_c N + \log_b N \cdot \log_c N = \dfrac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{(abc)} N}$;

2) $\dfrac{\log_a N}{\log_{ab} N} = 1 + \log_a b$.

2209. При каких значениях x имеет смысл выражение

$$\log(x^2 + 5x + 6)?$$

2210*. Решить следующие логарифмические неравенства:

1) $\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} > 1$; 2) $\frac{\lg^2 x + 2\lg x - 6}{\lg x} < 1$;

3) $\frac{1}{\lg x} - \frac{1}{\lg x - 1} < 1$.

2211. Доказать без помощи таблиц:

1) $\frac{1}{\log_3 5} + \frac{1}{\log_8 5} < 2$; 2) $\frac{1}{\log_3 5} + \frac{1}{\log_9 5} > 2$.

2212. Решить графически следующие уравнения:

1) $\log_2 x - 1 = 0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x - x = \frac{1}{2}$.

2213*. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} \log_2 \log_3 (x + y) = 1, \\ \lg x + \lg y = 3 \lg 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_3 (2x + y) + \log_3 (2x - y) = 1, \\ \log_3 (2x + y) - \log_2 (2x - y) = 1. \end{cases}$

2214. Решить уравнения:

1) $\lg x + \frac{1}{2} \lg x + \frac{1}{4} \lg x + \frac{1}{8} \lg x + \ldots = 2$;

2) $\lg x + \lg \sqrt[3]{x} + \lg \sqrt[9]{x} + \ldots = 3$;

3) $x^{\lg \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right)} = 1$.

2215. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Сумма их равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3. Найти эти числа.

2216. Логарифмы одиннадцати последовательных членов геометрической прогрессии при основании 10 образуют арифметическую прогрессию. Первый член геометрической прогрессии в 100 раз меньше последнего члена. Сумма членов арифметической прогрессии равна 33. Найти крайние члены обеих прогрессий.

2217. 1) Указать множество допустимых значений x для функции

$$y = \log_a (2x^2 + 5x - 3) \quad (a > 0, \ a \neq 1).$$

2) Определить, при каких значениях x функция

$$y = \log_a \frac{3x + 5}{x - 3} \, (a > 1)$$

принимает только отрицательные значения.

3) Решить неравенство $\log_3 (4x - 9) < 1$.

4) Определить x, если:

а) $\log_x 256 = -1\frac{1}{3}$; б) $\log_{(x-2)}(2x^2 - 11x + 16) = 2$.

5) Вычислить $$2^{\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3} + \log_4 9}.$$

2218. 1) При каких значениях x функция

$$y = \log_a(-2x^2 + 5x + 3)$$

не существует, если $a > 0$ и $a \neq 1$.

2) Определить, при каких значениях x функция

$$y = \log_a \frac{3x+5}{x-3} \quad (a > 1)$$

принимает только положительные значения.

3) Решить неравенство $\log_2|5x - 8| < 1$.

4) Определить x, если:

а) $\log_{2\sqrt[3]{2}} \frac{1}{256} = x$; б) $\log_{(x+2)}(x^3 + 5x^2 + 12x + 9) = 3$.

5) Вычислить $\sqrt{3}^{\log_3 4 + \log_{\sqrt[4]{3}} \sqrt{2}}$

2219. 1) Пользуясь счетной линейкой, вычислить площадь круга, зная, что длина окружности равна 53,2 *см*.

2) Вычислить с помощью таблиц логарифмов:

$$x = \sqrt[5]{1000^{0,3} + \frac{1,047^4 \cdot \sqrt[5]{0,02512}}{0,3142^3}}.$$

3) Решить уравнения:

а) $x \lg 3 - 1 = 2 \lg 3 - \lg(3^x + 1)$;

б) $3 + \log_2\left(9^{x-1,5\sqrt{x-1}} - 2\frac{3}{8}\right) = \log_2 5$.

2220. 1) Пользуясь счетной линейкой, вычислить площадь треугольника, зная длины его сторон: $a = 2,35$ *дм*, $b = 3,46$ *дм*, $c = 4,57$ *дм*.

2) Вычислить с помощью таблиц логарифмов:

$$V = 2R^3(1 - \sin\alpha) \cdot \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha \text{ при } R = 0,72;\ \alpha = 72^\circ.$$

3) Решить уравнения:

а) $\log_3\left(3^{x^2-x-9} + \frac{8}{27}\right) = \log_4 0,25$;

б) $4^{\log_2 \lg x} = \lg x - \lg^2 x + 1$.

Задачи для контрольных работ

2221. 1) Дана функция $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

Найти: а) значение y при $x=-1{,}5$; б) значение x при $y=1{,}5$. Построить график данной функции. Пользуясь графиком, найти приближенное значение x при $y=0{,}5$.

2) На основании определения логарифма проверить справедливость равенства

$$\log_4\sqrt[3]{\frac{1}{512}}=-1{,}5.$$

3) Найти допустимые значения аргумента x для функции

$$y=\log\left(\frac{x}{3}+1\right)-\log\left(1-\frac{x}{3}\right).$$

4) Решить графически уравнение

$$\log_2 x=-x-0{,}5.$$

2222. 1) Дана функция $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

Найти: а) значение y при $x=4$; б) значение x при $y=-1{,}5$. Построить график данной функции. Пользуясь графиком, найти приближенное значение y при $x=3$.

2) На основании определения логарифма проверить справедливость равенства $\log_{\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}}\sqrt{2}=-\frac{2}{3}$.

3) Найти допустимые значения аргумента x для функции

$$y=\log_a\sqrt{2-x}+\log_a\sqrt{x+2}.$$

4) Решить графически уравнение

$$2^x=x+2.$$

2223. 1) Найти x, если: а) $\log_{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} x=-2{,}5$; б) $\log_{(x-1)} 9=2$;

в) $x=2^{4-3\log_8 32}$.

2) Решить уравнение

$$\log_{16} x+\log_8 x+\log_4 x=6{,}5.$$

3) Дано: $x=\frac{m\sqrt{p^3}}{p\sqrt[3]{m^2}}$. Найти $\lg x$, если известно, что $\lg m=p$, а $\lg p=\frac{1}{3}$.

4) Найти x по данному его логарифму:

$$\lg x = \frac{1}{2}\lg(a+b) - \frac{2}{3}\lg b - 2\lg\lg c.$$

5) Прологарифмировать следующее выражение, приведя его к виду, удобному для логарифмирования:

$$x = 1 + 2\sin\alpha.$$

2224. 1) Найти x, если: а) $\log_x \frac{\sqrt[3]{9}}{3} = -\frac{2}{3}$; б) $\log_{(x-1)}(x^3-19)=3$;

в) $x = 8^{1-\frac{1}{3}\log_2 12}$.

2) Решить уравнение

$$\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x = 6.$$

3) Найти $\lg x$, если

$$x = \frac{\sqrt[5]{5a^4(a+b)^3}}{a^2\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a+b}}.$$

4) Найти x по данному его логарифму:

$$x = \frac{1}{2}\lg(a+b) - \frac{1}{3}\lg a + \frac{2}{3}\lg b - \lg(a-b).$$

5) Прологарифмировать следующее выражение, приведя его к виду, удобному для логарифмирования:

$$x = \sqrt{3} - 2\cos\alpha.$$

2225. 1) Вычислить при помощи таблиц логарифмов и правильность полученного результата проверить вычислением на логарифмической линейке:

$$x = \frac{8{,}36\cdot\sqrt{0{,}006725}}{0{,}9658\cdot\sqrt[3]{0{,}00003575}}.$$

2) Найти ребро куба, имеющего объем в два раза больший объема куба с ребром 2,4 *см*.

3) Вычислить с помощью таблиц логарифмов:

$$S = 2\pi a^2 \sin\alpha\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{при} \quad a = 36{,}17;\ \alpha = 18^\circ 46'.$$

2226. 1) Вычислить при помощи таблиц логарифмов и правильность полученного результата проверить вычислением на логарифмической линейке:

$$x = \frac{2{,}97\cdot\sqrt[3]{0{,}002974}}{0{,}7944\cdot\sqrt{0{,}00005424}}.$$

2) Площадь прямоугольного треугольника равна 28 *см*^{2}; один катет его втрое больше другого. Найти катеты.

3) Вычислить с помощью таблиц логарифмов:

$$S = \frac{4R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} \quad \text{при} \quad R = 25{,}3 \text{ и } \alpha = 65^\circ 36'.$$

2227. 1) Решить показательные уравнения:

а) $5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1}$;

б) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 3^{x-1} - 3^{x-2} + 3^{x-3}$;

в) $2^{x+2} + 2^{2x-1} = 3 \cdot 8^{x-1}$.

2) Решить логарифмическое уравнение

$$\lg(3x^2 + 13) - \lg(3x - 5) = 1.$$

3) Решить неравенство

$$\log_2(5x - 2) > \log_2(7 - 2x).$$

2228. 1) Решить показательные уравнения:

а) $2^{x-1} = 12^{2x} \cdot 3^{-2x} \cdot 2^{x+1}$;

б) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} = 9$;

в) $3^{x+2} + 3^{2x-1} = 4 \cdot 27^{x-1}$.

2) Решить логарифмическое уравнение

$$\lg(3x^2 - 7) - \lg(3x - 7) = 1.$$

3) Решить неравенство

$$\log_{0,5}(5x - 2) < \log_{0,5}(3 - 2x).$$

10

ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ

§ 39. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ФУНКЦИЯХ

Общее понятие функции. Обозначение функциональной зависимости

2229. 1) Какие первоначальные понятия положены в основу определения функции? 2) Сформулировать общее определение функции и указать, какая символическая запись употребляется для обозначения функциональной зависимости. В чем удобства этой записи? 3) Почему постоянную величину можно рассматривать как функцию некоторого аргумента?

2230. Даны две функции: $f_1(x)=f_2(x)$. Как записать, что значение $f_1(x)$ при $x=3$ равно значению $f_2(x)$ при $x=-1$?

2231. Дано уравнение $f_1(x)=f_2(x)$. Как записать, что: 1) числа 0,5; —2 и 1 являются корнями уравнения; 2) число 0 не является корнем уравнения?

2232. Дана функция $\varphi(x)$. Как записать, что: 1) число 5 является корнем данной функции; 2) при противоположных значениях аргумента данная функция принимает: а) равные значения; б) противоположные значения?

2233. Дано: $f(x)=x^2+x+41$.

Найти $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(-3)$; $f(10)$; $f(-7)$; $f(40)$; $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

2234. Дано: $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

1) Найти $f(0{,}5)$; $f(5)$; $f(x+1)$; $f(x^2)$; $\lg f(x)$; $f(\lg x)$.

2) Определить, при каких значениях x $f(x)=x$.

2235. Дано: $\varphi(x)=\frac{x-1}{x+1}$.

Определить $\varphi(1)$; $\varphi(0)$; $\varphi(-2)$; $2\varphi(3)$; $\varphi(x-1)$; $\varphi(2x)$; $\varphi(x^2)$; $\varphi(x)-\frac{1}{\varphi(x)}$; $[\varphi(x)]^2$; $\sqrt{\varphi(-1{,}25)}$; $\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)$.

2236. Дано: $F(x)=2^{x-1}$.
Найти $F(1)$; $F(2)$; $F(3)$; $F(0)$; $F(-4)$; $F(x+1)$; $F(x-1)\cdot F(x+1)$; $F(x-2):F(x-1)$.

2237. Дано: $g(x)=1+2\lg(x-2)$.
Найти $g(3)$; $g(12)$; $g(x+2)$; $g(x^2+2)$.

2238. Доказать, что если $f(x)=x^2+x+a$, то $f(a-1)=a^2$.

2239. Полагая $f_1(x)=\sqrt{x^2-4}$ и $f_2(x)=\sqrt{x^2+4}$, показать, что $f_1\left(a+\frac{1}{a}\right)+f_2\left(a-\frac{1}{a}\right)=2a$, $a>1$.

2240. Дано: $F(x)=a^x+\frac{1}{a^x}$. Доказать, что $F(-x)=F(x)$.

2241. Дано: $\Phi(x)=\sin x+\operatorname{tg} x$. Доказать, что $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

2242. Дано: $f(x)=\frac{x^6+1}{x^3}-\frac{x^2+1}{x}$. Показать, что $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$.

2243. Доказать, что если $f(x)=\log_a x$, то:

1) $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$; 2) $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$;

3) $f(x^y)=y\cdot f(x)$.

2244. Какая из элементарных функций обладает свойствами:

1) $f(1)=0$, $f(a)=1$, $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$;
2) $f(0)=1$, $f(1)=a$, $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$?

2245. Полагая $f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=\cos x$ и $\psi(x)=\operatorname{tg} x$, показать, что:

1) $\frac{f(x)-2f(2x)+f(3x)}{\varphi(x)+2\varphi(2x)+\varphi(3x)}=\psi(2x)$;

2) $\psi\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{f(x)}{1+\varphi(x)}=\frac{1-\varphi(x)}{f(x)}$;

3) $f(3x)=3f(x)-4[f(x)]^3$; 4) $\varphi(3x)=4[\varphi(x)]^3-3\varphi(x)$;

5) $f(x)=\dfrac{2\psi\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left[\psi\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2}$; 6) $\varphi(x)=\dfrac{1-\left[\psi\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2}{1+\left[\psi\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2}$;

7) $f(x)\cdot\varphi(y)=\frac{1}{2}[f(x-y)+f(x+y)]$;

8) $f\left(\frac{\pi}{18}\right)+f\left(\frac{5\pi}{18}\right)-f\left(\frac{7\pi}{18}\right)=0$;

9) $\varphi\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\varphi\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\varphi\left(\frac{6\pi}{7}\right)=-\frac{1}{2}$;

10) $\psi\left(\frac{\pi}{18}\right)\cdot\psi\left(\frac{5\pi}{18}\right)\cdot\psi\left(\frac{7\pi}{18}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2246. Дана функция $y=D(x)$ (функция Дирихле), определяемая следующим образом:

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,}\\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.}\end{cases}$$

Определить $D(3)$; $D(\sqrt{3})$; $D(0)$; $D(\pi)$; $D\left(-2\frac{1}{7}\right)$; $D(0{,}3777\ldots)$; $D(\sin 1)$; $D(0{,}121121112\ldots)$; $D(\lg 9)$; $D\left(-\frac{\pi}{4}\right)-4D(0{,}25)$.

2247. Дана функция $E(x)=[x]$, где символ $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее число x (целая часть числа x).

1) Определить $E\left(2\frac{1}{3}\right)$; $E(\pi)$; $E(5)$; $E(0)$; $E\left(\frac{18}{5}\right)$; $E(-1{,}7)$; $E(-\sqrt{2})$; $E(\sin 1)$; $E(-\sin 1)$; $E(2{,}5)-E(-2{,}5)$.

2) Найти l так, чтобы равенство $E(x+l)=E(x)+E(l)$ выполнялось при любых значениях x.

Область определения функции

2248. Если функция задана аналитически (и не указаны допустимые значения для аргумента), то что следует подразумевать под областью определения этой функции?

2249. Какие области определения имеют функции:

1) a^x, $a>0$, $a\neq 1$; 2) $\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$?

2250. Какую область определения имеет функция x^n, если: 1) n — натуральное число; 2) n — целое отрицательное число; 3) $n=\frac{p}{q}$ — несократимая положительная дробь?

2251. Даны функции:

а) $f(x)=x-1$; г) $Q(x)=\sqrt{x+2}$; ж) $\psi(x)=10^x$;

б) $F(x)=\frac{x}{x-\lg 2}$; д) $S(x)=\sqrt{9-x^2}$; з) $g(x)=\lg(x-10)$;

в) $R(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$; е) $\varphi(x)=\sqrt{x^2+1}$; и) $r(x)=\lg(x^2-1)$.

1) Указать область определения каждой из данных функций.

2) Вычислить: а) $f\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$; б) $F(\lg 4)$; в) $R\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\right)$; г) $Q(0{,}25)$; д) $S\left(\frac{1}{2}\sqrt{35}\right)$; е) $\varphi(2\sqrt{2})$; ж) $\psi(\lg 3)$; з) $g(10{,}1)$; и) $r(-\sqrt{2})$.

2252. Какие области определения имеют тригонометрические функции:

1) $\sin x$; 2) $\cos x$; 3) $\operatorname{tg} x$; 4) $\operatorname{ctg} x$?

2253. Чем отличаются друг от друга области определения функций:

1) $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$? 2) $\cos x$ и $\operatorname{ctg} x$?

2254. Какие области определения имеют функции:

1) $\arcsin x$; 2) $\arccos x$; 3) $\operatorname{arctg} x$; 4) $\operatorname{arcctg} x$?

2255. Найти значение функции $\frac{1}{\sin x}$ при: 1) $x=\frac{\pi}{6}$; 2) $x=-\frac{2\pi}{3}$; 3) $x=\frac{5\pi}{4}$; 4) $x=1{,}2$ (по таблице). При каких значениях аргумента x на замкнутом интервале $[0;\ 2\pi]$ данная функция теряет смысл? Выразить формулой множество всех таких значений аргумента.

2256. Дано: $\varphi(x)=\frac{1}{1+\sin x}$.

1) Найти $\varphi(0)$; $\varphi\left(\frac{7\pi}{3}\right)$; $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $\varphi(3{,}62)$ (по таблице).

2) При каких значениях аргумента x на замкнутом интервале $[0;\ 2\pi]$ данная функция теряет смысл? Выразить формулой множество всех таких значений аргумента.

Найти области определения следующих функций:

2257. 1) $\frac{|x|}{x}$; 2) $\sqrt{x}-\sqrt{-x}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{6-3x}}$;

4) $\lg\lg x$; 5) $\sqrt{3-3^{-x}}$; 6) $\lg(x^2-1)$;

7) $\sqrt{-x^2+x+6}$; 8) $\frac{2x+1}{x^2+x-6}$; 9) $\lg[x(x-1)(x+2)]$.

2258. 1) $\operatorname{tg}(\sin x)$; 2) $\operatorname{ctg}(\arccos x)$; 3) $\frac{1}{1+\sin 2x}$;

4) $\frac{1}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$; 5) $\frac{1}{\sin x+\cos x}$; 6) $\sqrt{1-\cos x}$;

7) $\arcsin 3x$; 8) $\arccos(1-2x)$; 9) $\arcsin(\sin x)$.

2259. 1) Какие функции называются тождественными? 2) Можно ли назвать тождественными функции, имеющие один и тот же закон соответствия, но разные области определения?

2260. Как изменяется область определения функции при выполнении следующих тождественных преобразований (левую часть тождества считать за исходную функцию):

1) $\sqrt{(x-1)(x+2)}=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+2}$;

2) $\sqrt{\frac{x^2-4}{x-1}}=\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-1}}$;

3) $\lg(5-2x)+\lg(x^2-1)=\lg(5-2x)(x^2-1)$;

4) $\lg(x-3)^2=2\lg(x-3)$; 5) $10^{\lg\frac{2}{x-2}}=\frac{2}{x-2}$;

6) $\sin x\cdot\operatorname{ctg} x=\cos x$; 7) $\sin x=\cos x\cdot\operatorname{tg} x$;

8) $\sin(\arcsin x)=x$?

Возрастание и убывание функции. Наибольшее и наименьшее значения функции

2261. Можно ли сказать, что функция $|x|$ возрастает: 1) при положительных значениях аргумента; 2) при всех значениях аргумента?

2262. Можно ли сказать, что функция 10^x возрастает во всей области ее определения?

2263. Является ли функция $\sin x$ монотонной на замкнутом интервале $[0; 2\pi]$? Показать, что $\sin x$ возрастает на замкнутом интервале $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

2264. Является ли $\cos x$ монотонной функцией на замкнутом интервале: 1) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $[0; \pi]$; 3) $[0; 2\pi]$? Показать, что $\cos x$ убывает на замкнутом интервале $[0; \pi]$.

2265. Указать промежутки монотонного изменения каждой из следующих функций: 1) $\sin 2x$; 2) $\operatorname{tg}\frac{x}{3}$; 3) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; 4) $2^{\sin x}$.

2266. Определить, какие из функций: 1) $x \cdot \sin x$; 2) $\cos x + \frac{1}{x+1}$; 3) $-3 \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, заданных на замкнутом интервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, являются возрастающими и какие убывающими.

2267. Показать, что $\sqrt[3]{\sin x}$ есть функция возрастающая на замкнутом интервале $[0; 0{,}5\pi]$ и убывающая на интервале $[0{,}5\pi; \pi]$.

2268. Исследовать на возрастание и убывание функцию $\cos(1-x)$ на замкнутом интервале $[0; 1]$.

2269. Определить, возрастает или убывает функция:

1) $1-\frac{2}{\cos x}$ в открытом интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $\frac{\operatorname{ctg} x}{x}$ на замкнутом интервале $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $2^{\sin x}$ на замкнутом интервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

4) $\cos^3 x$ на замкнутом интервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2270. Как изменяются функции 1) $\lg\sin x$ и 2) $\lg\cos x$ при возрастании аргумента x от 0 до $0{,}5\pi$?

2271. 1) Как изменяется функция $1-\cos x$ при изменении аргумента от 0 до 2π? При каких значениях x в указанном промежутке эта функция принимает наибольшее и наименьшее значения? Вычислить эти значения функции.

2) Ответить на аналогичные вопросы относительно функций:

а) $1+2\sin x$; б) $10^{\sin x}$.

2272. Найти наибольшее и наименьшее значения функций:

1) $\arccos(\sin x)$; 2) $2^{\cos x}$.

2273. 1) При каких значениях аргумента x на замкнутом интервале $[0; 2\pi]$ функция $\sin(\cos x)$ принимает наибольшее значение и при каких наименьшее? Пользуясь таблицами натуральных значений тригонометрических функций, найти эти значения.

2) Ответить на аналогичные вопросы относительно функций:

а) $1-\cos(\sin x)$; б) $\operatorname{tg}(\sin x)$.

2274. Какие из следующих функций являются ограниченными и какие неограниченными:

1) $x+\cos x$; 2) $\sin x\cdot\cos 2x$; 3) $x\cdot\sin x$;

4) $\frac{1}{1-\cos x}$; 5) $\operatorname{tg}(\sin x)$; 6) $5^{\cos x}$?

2275. Найти область изменения каждой из следующих функций:

1) $1+\sin^2 x$; 2) $|\cos x|$; 3) $\frac{x}{2}+\cos 2|x|$;

4) $\frac{1}{2-\cos 3x}$; 5) $-3x^2+x+2$; 6) $\frac{x}{1+x^2}$.

Четные и нечетные функции

2276. 1) Привести примеры четных функций. Какой особенностью обладает график четной функции? 2) Привести примеры нечетных функций. Каким свойством обладает график нечетной функции? 3) Привести примеры функций, которые не являются ни четными, ни нечетными.

2277. Показать, что если функция $f(x)$ определена для всех действительных значений аргумента x, то функция $f(x)+f(-x)$ четная, а функция $f(x)-f(-x)$ нечетная.

2278. Четной или нечетной функцией является сумма (разность): 1) двух четных функций; 2) двух нечетных функций?

2279. Доказать, что: 1) произведение двух четных или нечетных функций есть функция четная; 2) произведение четной и нечетной функций является функцией нечетной.

2280. Какие основные тригонометрические функции являются четными; нечетными? Какими равенствами можно выразить свойство четности и нечетности тригонометрических функций?

2281. Показать, что следующие функции являются четными:

1) $2-|x|$; 2) $\frac{\sin x}{x}$; 3) $\sin x\cdot\operatorname{tg}x$; 4) $\frac{\sin x+\operatorname{tg}x}{\sin x-\operatorname{tg}x}$.

2282. Показать, что следующие функции являются нечетными:

1) $\frac{|x|}{x}$; 2) $x+\sin x$; 3) $\sin 2x+\arcsin x$; 4) 2^x-2^{-x}.

2283. Определить, какие из следующих функций являются четными, какие нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными:

1) $2+\sin x$; 2) $x^2-\cos x$; 3) $\frac{x}{\sin x}$;

4) $\frac{\sin x}{|\sin x|}$; 5) 10^x+10^{-x}; 6) 10^x-10^{-x};

7) $\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$; 8) $\lg\cos x$; 9) $2^{\sin x}$;

10) $\sin x\cdot\cos 2x$; 11) $\sin(\cos 2x)$; 12) $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}$.

2284*. Показать, что любую функцию $f(x)$, определенную для всех действительных значений аргумента, можно представить в виде суммы четной функции $\varphi(x)$ и нечетной функции $\psi(x)$.

2285*. Показать, что:

1) если четная функция $f(x)$, определенная на всем множестве действительных чисел, в интервале $(0, +\infty)$ возрастает (убывает), то в интервале $(-\infty, 0)$ она убывает (возрастает);

2) если нечетная функция $\varphi(x)$, определенная на всем множестве действительных чисел, в интервале $(0; +\infty)$ возрастает (убывает), то в интервале $(-\infty, 0)$ она также возрастает (убывает).

Периодические функции

2286. 1) Проверить справедливость равенства $\sin\frac{5\pi}{4} = \sin\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$. Можно ли на основании этого равенства утверждать, что число $\frac{\pi}{2}$ является периодом функции $\sin x$?

2) Проверить справедливость равенства $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$. Можно ли на основании этого равенства утверждать, что число π является периодом функции $\cos x$?

2287. 1) Чему равен наименьший положительный период синуса; косинуса; тангенса; котангенса? Какими равенствами можно записать свойство периодичности функций: $\sin x$; $\cos x$; $\operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg} x$?

2) Доказать, что: а) период $\sin nx$ и $\cos nx$ равен $\frac{2\pi}{n}$ (n — некоторое положительное число); б) период $\operatorname{tg} nx$ и $\operatorname{ctg} nx$ равен $\frac{\pi}{n}$ (n — некоторое положительное число).

2288. Какие из следующих функций являются периодическими:

1) $1 + \sin x$; 2) $x + \sin x$; 3) $\operatorname{tg} x - 1$; 4) $\cos \pi x$;

5) $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$; 6) $\sin^2 x$; 7) $\sin|x|$; 8) $x + \cos x$;

9) $\sin(\cos x)$; 10) $\operatorname{tg}(\sin x)$?

Найти наименьшие положительные периоды функций.

2289. 1) $0{,}5 \sin x$; 2) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; 3) $\cos\frac{x}{n}$; $n > 0$; 4) $\sin \pi x$.

2290. 1) $\sin\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{3}$; 2) $\sin x + \operatorname{tg} x$;

3) $\sin x \cdot \cos x$; 4) $\cos^2 x$.

2291*. Дана функция $y = x - [x]$. 1) Доказать, что данная функция является периодической и найти наименьший положительный период этой функции. 2) Построить график данной функции.

2292*. Выполнить то же задание (задача 2291) относительно функций: 1) $y=(x-2n)^2$, $2n-1<x<2n+1$, $n=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$;

$$2)\ y=\begin{cases}(-1)^{[x]}\cdot\dfrac{x}{|x|}, & \text{если } x>0;\\ 1, & \text{если } x=0;\\ -(-1)^{[x]}\cdot\dfrac{x}{|x|}, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Обратные функции

2293. Найти обратные функции для следующих функций:

1) $2x+3$; 2) $1-x$; 3) $\frac{1}{x}$; 4) $\frac{x}{x-1}$; 5) $\sqrt[3]{x}$; 6) $\sqrt[3]{x+1}$; 7) $10^x+0{,}1$; 8) x^2, $x<0$; 9) $2-\lg x$; 10) $\log_5(x-5)$; 11) $\sin x$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$; 12) $\operatorname{ctg} x$, $0<x<\pi$.

2294. На одном и том же чертеже построить графики взаимно обратных функций:

1) $y=2x$ и $y=0{,}5x$; 2) $y=3x+2$ и $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$; 3) $y=2^x$ и $y=\log_2 x$; 4) $y=x^2$, $x\leqslant0$ и $y=-\sqrt{-x}$.

Как расположены графики взаимно обратных функций относительно прямой $y=x$ (биссектрисы I и III координатных углов)?

2295. Доказать, что если для данной точки $M(x;\ y)$ поменять местами координаты x и y, то получившаяся точка $M_1(y;\ x)$ будет симметрична первой относительно прямой $y=x$. Какой способ построения графика функции, обратной данной, можно указать на основании этого утверждения?

2296. 1) Дана функция $y=\frac{1}{x}$. Найти функцию, обратную данной. Привести другие примеры таких функций, которые совпадали бы с обратными им функциями. 2) Каким свойством обладает график функции, если известно, что эта функция и обратная ей одинаковы?

§ 40. ОБЗОР СВОЙСТВ И ГРАФИКОВ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Линейная функция

2297. Дана функция $y=kx+b$.

1) Указать области определения и изменения этой функции.

2) Выяснить характер изменения функции с возрастанием аргумента, если: а) $k>0$; б) $k<0$; в) $k=0$.

3) Доказать, что график функции $y=kx+b$ есть прямая линия. Какой геометрический смысл имеют параметры k и b?

4) Описать положение прямой $y=kx+b$ относительно координатных осей в случаях, когда: а) $b=0$; б) $k=0$; в) $k=b=0$.

5) Почему уравнение прямой, параллельной оси ординат, нельзя представить в виде уравнения $y = kx + b$? Каким свойством этой прямой следует воспользоваться при составлении ее уравнения?

6) Написать уравнение оси ординат.

2298. 1) Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью абсцисс угол: а) $\frac{\pi}{6}$; б) —45°; в) $\frac{2\pi}{3}$.

2) Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; 5)$ и параллельную: а) оси абсцисс; б) оси ординат.

3) Написать уравнение биссектрисы I и III координатных углов.

2299. Написать уравнение прямой: 1) имеющей угловой коэффициент $k = 3$ и проходящей через точку $(-2; 5)$; 2) отсекающей от оси ординат отрезок $b = -2$ и проходящей через точку $(-1; 8)$; 3) проходящей через точки $(-3; 2)$ и $(2; -1)$.

2300. Прямая задана уравнением $Ax + By = C$, где $B \neq 0$.

1) Привести уравнение к виду $y = f(x)$ и определить угловой коэффициент прямой.

2) Как найти отрезки, отсекаемые прямой на осях координат? Чему они равны?

3) При каких соотношениях между параметрами A и B функция $y = f(x)$ является: а) возрастающей; б) убывающей?

2301. Даны уравнения прямых:

$$\text{а) } 2x + y = 0; \quad \text{б) } x - 2y = 0; \quad \text{в) } 2x + 3y = 6;$$
$$\text{г) } 5x - 3y + 15 = 0.$$

1) Определить угловой коэффициент каждой из этих прямых и отрезки, отсекаемые ими на осях координат.

2) Построить прямые и указать промежутки, в которых соответствующие функции сохраняют знак.

3) Какие из указанных функций являются возрастающими и какие убывающими?

2302. Дана функция $y = x - 2$. 1) Составить уравнение функции, обратной данной. 2) Построить на одном и том же чертеже графики данной функции и ей обратной. 3) Проверить, что полученные графики симметричны относительно биссектрисы I, III координатных углов.

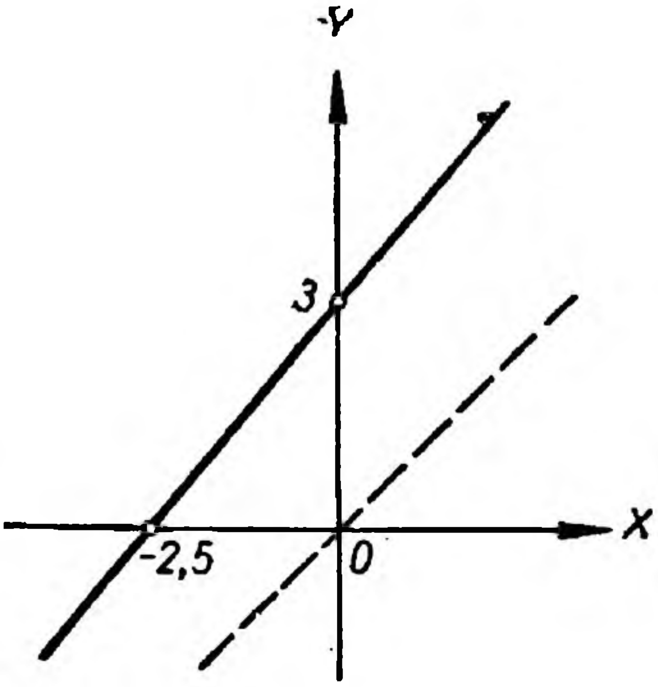


Рис. 68

2303. На рисунке 68 дан график некоторой линейной функции — прямая линия.

1) Используя данные чертежа, написать уравнение $y = f(x)$ этой прямой.

2) Составить уравнение $y=\varphi(x)$ прямой, симметричной данной относительно биссектрисы I, III координатных углов.

3) Убедиться, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются взаимно обратными.

Дробно-линейная функция

2304. Дана функция $y=\frac{k}{x}$, где $k \neq 0$.

1) Установить область определения этой функции.

2) Выяснить, при каких значениях аргумента x функция y принимает положительные значения; отрицательные значения. Рассмотреть случаи, когда $k>0$ и $k<0$.

3) Указать интервалы возрастания и убывания функции.

4) Доказать, что: а) для достаточно больших по абсолютной величине значений x (при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$) значения y по абсолютной величине могут сделаться меньше любого положительного числа; б) для достаточно близких к 0 значениях x значения y становятся сколь угодно большими по абсолютной величине. Какой геометрический смысл имеют эти свойства функции?

5) Доказать, что функция y нечетная. Какое заключение можно сделать о центральной симметрии графика данной функции?

6) Показать, что функция $y=\frac{k}{x}$ и обратная ей совпадают. Как использовать это свойство функции для доказательства симметричности ее графика (гиперболы) относительно прямой $y=x$?

7) Доказать, что прямая $y=-x$ также является осью симметрии гиперболы.

8) Какие точки гиперболы называются ее вершинами? Найти координаты вершин гиперболы $y=\frac{k}{x}$.

9) Построить гиперболу, полагая: а) $k=1$; б) $k=-6$; в) $k=12$.

10) Как изменяется положение ветвей гиперболы относительно осей координат: а) в зависимости от знака параметра k; б) при изменении абсолютной величины k?

2305. Доказать, что: 1) график функции $y=\frac{1}{x}+2$ можно получить при помощи параллельного переноса гиперболы $y=\frac{1}{x}$ в направлении оси ординат на две единицы масштаба вверх; 2) график функции $y=\frac{1}{x-2}$ можно получить при помощи параллельного переноса гиперболы $y=\frac{1}{x}$ в направлении оси абсцисс на две единицы масштаба вправо. Найти уравнение асимптот каждой из указанных гипербол.

2306. Дана функция $y=\frac{3x+1}{x-1}$.

1) Привести данное уравнение к виду $y=\frac{k}{x+n}+m$.

2) Составить уравнения асимптот гиперболы и определить координаты вершин гиперболы.

3) Построить схематически гиперболу (сравнить с рис. 69).

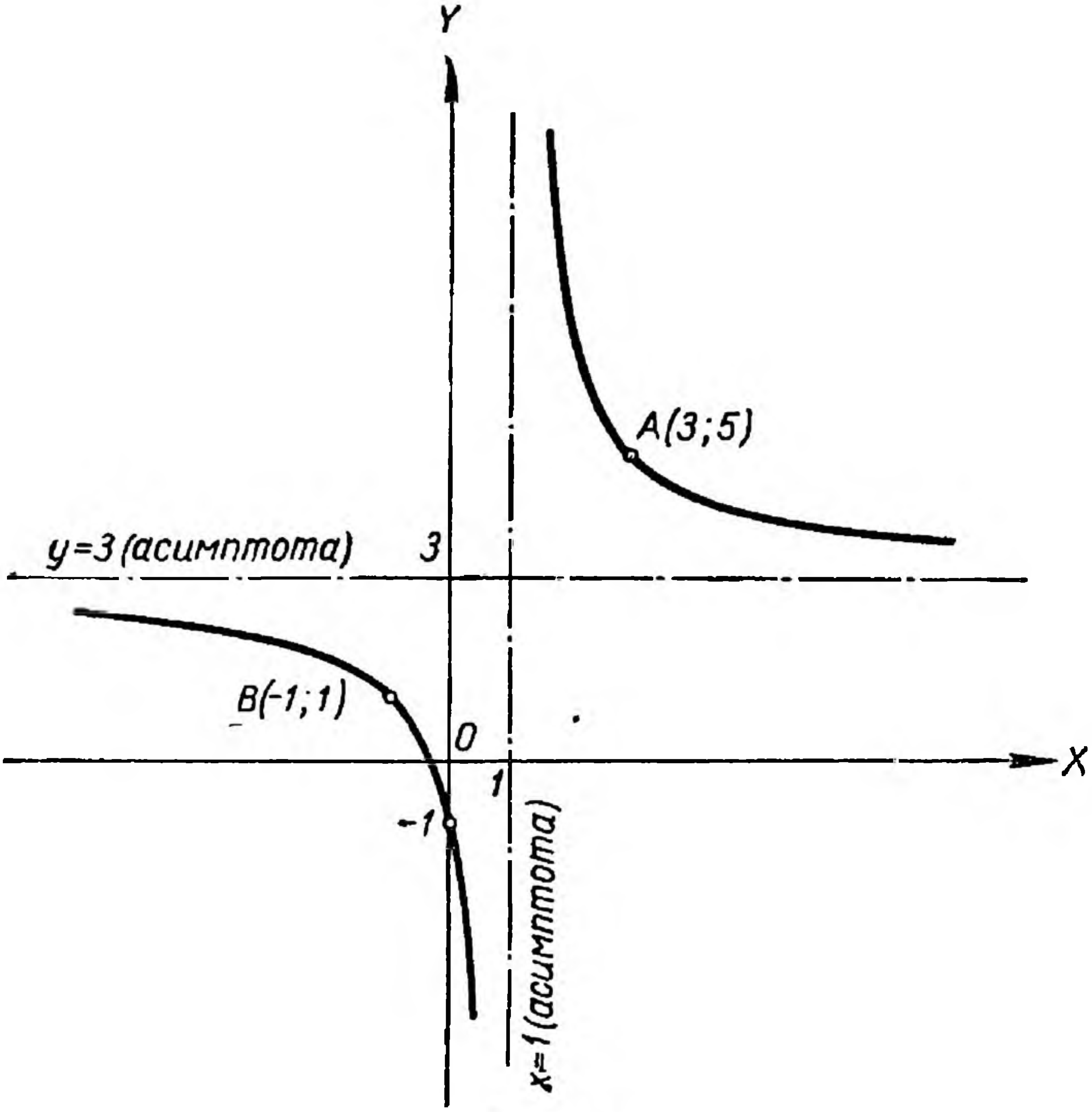


Рис. 69

2307. Пользуясь указаниями, данными в задаче 2306, построить графики функций:

1) $y=\frac{x+1}{x}$; 2) $y=-\frac{2x+1}{x+1}$; 3) $y=\frac{x-11}{x-2}$.

Квадратичная функция

2308. Дана функция $y=x^2$.

Доказать, что: 1) при любых значениях аргумента x функция y неотрицательна ($y\geqslant 0$); 2) в интервале $(-\infty, 0)$ функция убывает, в интервале $(0, +\infty)$ возрастает; 3) при $x=0$ функция y принимает свое наименьшее значение, равное 0; 4) функция $y=x^2$ является четной и ее график симметричен относительно оси ординат; 5) исходя из установленных свойств функции $y=x^2$, построить ее график; уточнить график функции построением некоторых контрольных точек.

2309. 1) Исследовать функцию $y=-x^2$, внося соответствующие изменения в указания, данные в задаче 2308.

2) Показать, что график функции $y=-x^2$ является параболой, симметричной параболе $y=x^2$ относительно оси абсцисс.

2310. Показать, что: 1) график функции $y=ax^2$ образуется посредством растяжения (если $a>1$) или сжатия (если $0<a<1$) в a раз всех ординат параболы $y=x^2$; 2) график функции $y=x^2+c$ можно получить при помощи параллельного переноса параболы $y=x^2$ вдоль оси ординат на c единиц масштаба вверх, если $c>0$, или вниз, если $c<0$; 3) график функции $y=(x+m)^2$ можно получить посредством параллельного переноса параболы $y=x^2$ вдоль оси абсцисс на m единиц масштаба вправо, если $m<0$, или влево, если $m>0$.

2311. Указать, каким преобразованиям надо подвергнуть параболу $y=x^2$, чтобы получить график функции:

1) $y=(x+1)^2+2$; 2) $y=(x-3)^2-4$; 3) $y=(3-x)^2+1$;

4) $y=9-(x+2)^2$; 5) $y=2(x-2)^2-8$; 6) $y=3-\frac{(x+2)^2}{3}$.

2312. Дана функция $y=x^2+6x+5$.

1) Привести данное уравнение к виду $y=(x+m)^2+c$ и убедиться, что графиком данной функции является парабола.

2) Определить координаты x_0 и y_0 вершины этой параболы. Какое экстремальное значение (максимум или минимум) имеет функция в точке $(x_0;\ y_0)$?

3) Выяснить, пересекает ли парабола ось x. Найти абсциссы точек пересечения.

4) Найти ординату точки пересечения параболы с осью y и координаты симметричной ей относительно оси параболы точки графика.

5) Построить схематически график функции $y=x^2+6x+5$ и по графику указать промежутки знакопостоянства функции и промежутки возрастания и убывания функции.

2313. Используя указания, данные в задаче 2312, исследовать функции и построить их графики:

1) $y=0{,}5x^2+3x+2{,}5$; 2) $y=-2x^2+7x-3$;

3) $y=-x^2+2x-3$; 4) $y=|x^2+6x+5|$;

5) $y=x^2-6|x|+5$; 6) $y=(5-|x|)\cdot(1+x)$.

2314. Даны функции: $f(x)=(x+1)(x-1)$ и $\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

На одном и том же чертеже построить графики этих функций и определить по графику, при каких значениях x имеет место соотношение:

1) $f(x)=\varphi(x)$; 2) $f(x)>\varphi(x)$; 3) $f(x)<\varphi(x)$.

Степенная функция

2315. Дана функция $y = x^r$, где r — рациональное число.

1) При каких r данная функция будет определена: а) на всей числовой прямой; б) только на интервале $(0; +\infty)$? Чем отличаются друг от друга области определения функций $y = x^r$, $r > 0$ и $y = x^{-r}$?

2) Показать, что при любом $r > 0$ график функции $y = x^r$ проходит через начало координат и точку $(1; 1)$. Проходит ли через указанные точки график функции $y = x^r$ при $r < 0$?

3) Доказать, что в интервале $(0; +\infty)$ функция $y = x^r$ возрастает. Сравнить значения функций $y = x^r$ и $y = x$, соответствующие одним и тем же значениям аргумента на интервалах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$, рассмотрев случаи, когда $r > 1$ и $0 < r < 1$. Какое заключение можно сделать из этих сравнений о положении графика степенной функции в указанных интервалах относительно биссектрисы первого координатного угла?

4) Доказать, что степенная функция $y = x^r$ на интервале $(-\infty; 0)$ возрастает, если показатель степени r — нечетное число или несократимая дробь с нечетными числителем и знаменателем, и убывает, если r — четное число или несократимая дробь с четным числителем.

5) Выяснить, в каких случаях график степенной функции имеет ось или центр симметрии.

2316. Исследовать следующие функции и построить их графики:

1) $y = x \cdot |x|$; 2) $y = (1 - x)^3$; 3) $y = x^4 - 2$;

4) $y = |x^3| + 1$; 5) $y = (x + 2)^{-2}$; 6) $y = x^{-3}$;

7) $y = (x + 1)^{\frac{2}{3}}$; 8) $y = (x + 1)^{\frac{3}{2}}$.

Показательная и логарифмическая функции

2317. Дана функция $y = a^x$.

1) Каковы области определения и изменения этой функции?

2) Сформулировать свойства функции при $a > 1$ и при $0 < a < 1$.

3) Построить схематически график функции $y = a^x$, $a > 1$. Как изменится ход кривой, если $0 < a < 1$? Имеет ли асимптоту график показательной функции?

2318. 1) Каким преобразованиям надо подвергнуть график функции $y = a^x$, чтобы получить график функции $y = \log_a x$? Дать обоснование.

2) Сформулировать свойства логарифмической функции $y = \log_a x$ при $a > 1$ и при $0 < a < 1$ и проиллюстрировать их на графике.

3) Доказать, что $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$. Как, используя это равенство, можно получить график функции $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ из графика функции $y = \log_a x$?

4) Пользуясь шаблоном для построения графика функции $y = 2^x$, построить графики следующих функций:

а) $y = \log_2 x$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; в) $y = -\log_2 x$; г) $y = |\log_2 x|$;

д) $y = |\log_{\frac{1}{2}} x|$; е) $y = 1 + \log_{0,5} x$; ж) $y = 2 - \log_2 x$;

з) $y = \log_2 (x - 1) + 2$.

2319. Чем отличаются друг от друга графики функций:

$$y = 2^{\log_2 x} \text{ и } y = x?$$

Основные тригонометрические функции

2320. Дана функция $y = \sin x$.

1) Какова область определения функции?

2) Показать, что функция $y = \sin x$ является ограниченной функцией, и указать область изменения этой функции. При каких значениях x функция: а) обращается в нуль; б) принимает свое наименьшее значение; в) принимает свое наибольшее значение?

3) Выяснить, как изменяется значение функции y при замене произвольного значения аргумента x противоположным ему значением $-x$.

4) Доказать, что: а) $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$; б) $\sin(x \pm \pi) = -\sin x$.

5) Выделить промежутки монотонного изменения функции и промежутки знакопостоянства.

6) Построить схематически график функции и проиллюстрировать на нем свойства функции.

2321. 1) Исследовать функцию $y = \cos x$, используя указания задачи 2320.

2) Показать, что график функции $y = \cos x$ есть синусоида, сдвинутая влево на $\frac{\pi}{2}$ единиц масштаба.

2322. Дана функция $y = \operatorname{tg} x$.

1) Каковы области определения и изменения этой функции?

2) Доказать, что: а) $\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x$; б) $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

3) Выделить промежутки монотонного изменения функции и промежутки знакопостоянства.

4) Построить схематически график функции $y = \operatorname{tg} x$ и проиллюстрировать на нем свойства тангенса.

5) Написать уравнения асимптот графика функции $y = \operatorname{tg} x$.

2323. 1) Исследовать функцию $y = \operatorname{ctg} x$, внося соответствующие изменения в указания, данные в задаче 2322.

2) Показать, что график функции $y=\operatorname{ctg} x$ есть тангенсоида, отраженная зеркально в оси абсцисс и сдвинутая по этой оси на $\frac{\pi}{2}$ единиц масштаба вправо.

2324. Показать, что $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, если $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Обратные тригонометрические функции

2325. 1) Дать определение функции $y=\arcsin x$. 2) Указать области определения и изменения этой функции. 3) Чему равно выражение $\sin(\arcsin x)$? 4) Как изменяется функция $\arcsin x$ при изменении x на замкнутом интервале $[-1;\ 1]$? 5) При каких значениях аргумента x функция $\arcsin x$ принимает положительные значения; отрицательные значения; равна нулю? 6) Как изменяется значение $\arcsin x$ при изменении знака аргумента на противоположный? 7) Построить график функции $y=\arcsin x$.

2326. Исследовать функции: 1) $y=\arccos x$; 2) $y=\operatorname{arctg} x$; 3) $y=\operatorname{arcctg} x$, внося соответствующие изменения в указания, данные в задаче 2325.

2327. Известно, что $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$. Почему $\arcsin x$ может принимать значения $\pm\frac{\pi}{2}$, а $\operatorname{arctg} x$ этих значений принимать не может?

2328. Доказать тождества:

1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

2) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Привести геометрические пояснения для случаев: $x > 0$ и $x < 0$.

2329. Какая разница между функциями:

1) $y=\cos(\arccos x)$ и $y=x$;

2) $y=\cos[\arccos(-x)]$ и $y=-x$?

Показать на чертеже.

2330*. Доказать:

1) $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, $|x| \leqslant 1$;

2) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x \neq 0$, $|x| < 1$.

2331. Дать геометрическое истолкование соотношению

$$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2},\quad |x| \leqslant 1.$$

§ 41. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Предел переменной величины

2332. 1) В каком случае говорят, что число A является пределом переменной величины x?

2) Дать геометрическое истолкование предела переменной величины и показать, что переменная величина может иметь не более одного предела.

3) Почему в определении предела переменной величины рассматривается не сама разность $A - x$ между пределом и переменной, а абсолютная величина этой разности $|A - x|$?

2333. 1) Может ли переменная величина, стремящаяся к пределу, принимать также и свое предельное значение? Привести примеры.

2) Если переменная величина стремится к некоторому пределу, то является ли обязательным условие, чтобы каждое новое значение переменной было ближе к пределу, чем предыдущее ее значение? Ответ подтвердить примером.

2334. Почему переменная величина, принимающая только положительные значения, не может иметь своим пределом отрицательное число? Может ли предел этой переменной величины быть равным нулю?

2335. Как читается равенство $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$? Записать это равенство с помощью неравенств и привести примеры таких переменных, предел которых равен нулю.

2336. Показать, что:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right) = \pm \infty$.

Привести графическую иллюстрацию для каждого равенства (построить график функции $y = \frac{1}{x}$).

2337. 1) Сформулировать теорему о существовании предела монотонной ограниченной переменной величины и дать геометрические пояснения к этой теореме.

2) Привести примеры, иллюстрирующие существование предела монотонной ограниченной переменной величины.

2338. 1) Сформулировать теоремы о пределе суммы и о пределе произведения двух переменных величин. Можно ли распространить эти теоремы на случай любого (конечного) числа переменных — слагаемых (сомножителей)?

2) Чему равен предел разности и предел частного двух переменных величин? Какие ограничения накладываются на переменные в последнем случае?

2339. Дано $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Найти: 1) $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n + a)$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} (a - x_n)$;

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{x_n}{a}\right)$; 4) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{a}{x_n}\right)$.

2340. a — постоянная величина.

Найти:

1) $\lim\limits_{x \to 0}(ax)$; 2) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x}{a}\right)$; 3) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{a}{x}\right)$; 4) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{a}{x^2}\right)$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty}(ax)$; 6) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{x}{a}\right)$; 7) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{a}{x}\right)$.

Найти следующие пределы:

2341. 1) $\lim\limits_{x \to 1}(5x - 1)\cdot(5x + 1)$; 2) $\lim\limits_{x \to -3}(2x^2 + 7x + 3)$;

3) $\lim\limits_{x \to -1}(x^3 - x^2 - 10x - 3)$; 4) $\lim\limits_{x \to 2}(3x^3 - 5x^2 - 1)^2$.

2342. 1) $\lim\limits_{x \to -2}\frac{2x^2 - 6}{2x + 3}$; 2) $\lim\limits_{x \to 4}\left(x^2 - 5x + 3 - \frac{4}{x} - \frac{7}{x + 3}\right)$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$; 4) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{5}{1 - x} - \frac{4}{x + 1} - \frac{3}{x^2} - 2\right)$.

2343. 1) $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x^3}$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{3x^4 + 4x^3 - 2}{0{,}1x^4}$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{\frac{2}{5}x^2 - x - 7}{2x^2 + 7x + 5}$; 4) $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{4 - x^4}{x(x^3 + x + 1)}$.

Предел функции

2344. Дана функция $F(x) = (x - 1)^2$.

1) Проследить ход изменения функции при $x \to 1$ в случаях, когда: а) x приближается к 1 слева (принимает только значения, меньшие единицы); б) x приближается к 1 справа (принимает только значения, большие единицы). К какому числу приближается значение функции в каждом случае? Совпадают ли предельные значения этой функции?

2) Построить график функции и пояснить выводы по чертежу.

3) Выполнить то же задание относительно функций:

а) $f(x) = |\log_2 x|$; б) $\psi(x) = \begin{cases} x^2, & \text{для } x < 1; \\ 2x, & \text{для } x \geqslant 1. \end{cases}$

2345. 1) В каком случае говорят, что функция $f(x)$ имеет предел B при $x \to A$? 2) Указать, какие из рассмотренных в задаче 2344 функций имеют предел при $x \to 1$ и какой именно.

2346. Исходя из определения предела функции, доказать, что:

1) $\lim\limits_{x \to 2}(2x + 1) = 5$; 2) $\lim\limits_{x \to 3}x^2 = 9$;

3) $\lim\limits_{x \to 4}\sqrt{x} = 2$; 4) $\lim\limits_{x \to 1}\sqrt[3]{x} = 1$;

5) $\lim\limits_{x \to 2}5^x = 25$; 6) $\lim\limits_{x \to 2}\lg x = \lg 2$.

Найти пределы следующих функций:

2347. 1) $\lim\limits_{x\to 1}(5x^4-3x^3+x^2-3x+5)$; 2) $\lim\limits_{x\to(a-1)}\dfrac{x^2+x+a}{x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5-3^x}{3+2^x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 5}\left[x-\lg\left(\dfrac{1}{2x}\right)\right]$.

2348. 1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-4x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-a)^2-a^2}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x-2}$.

2349. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$; 2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$, $a>0$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}$.

2350. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}$.

2351. 1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{10}$; 2) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{5}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to -\infty}2^x$; 4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{a+1}{\lg x}$.

2352. 1) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{2-x}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\dfrac{2x}{x+1}-1\right)$.

2353. 1) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}(x^3-x^2-x-1)$; 2) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2+x)$;

3) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{2x^2+x-5}{x^2+3x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{3x^4-x^2+x}{6x^4+3x^3-x^2+7}$.

2354. 1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x+2}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

2355. 1) Исходя из неравенства $\sin x<x<\operatorname{tg}x$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$, показать, что $0<1-\dfrac{\sin x}{x}<x$. Какое заключение можно сделать отсюда относительно предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$? Дать геометрическое истолкование этому результату по графику на рисунке 70.

2) Доказать, что для $x < 0$ предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ также существует и равен 1.

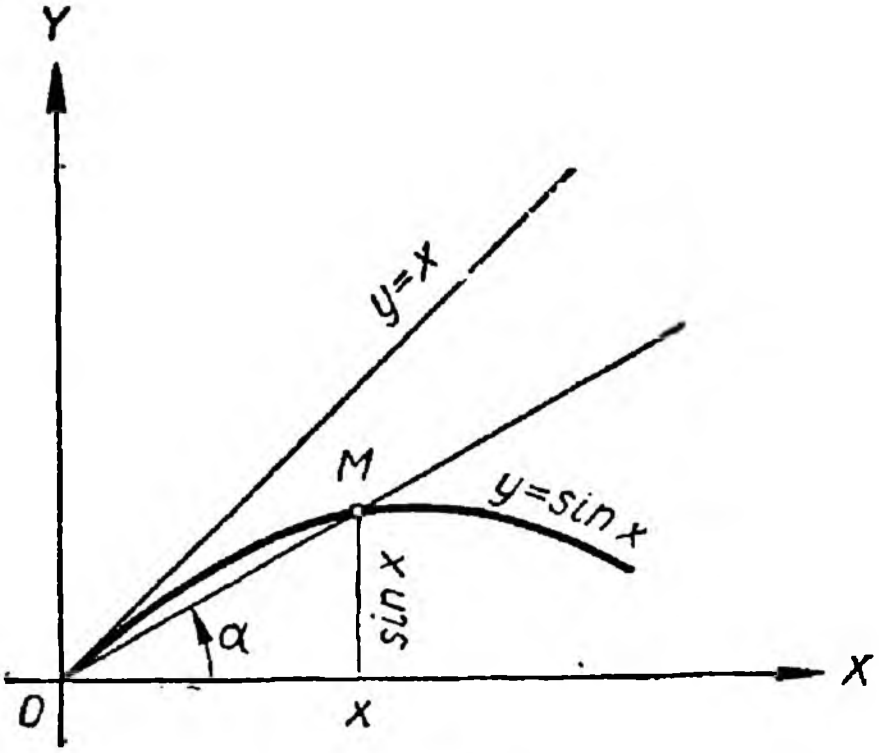


Рис. 70

Найти пределы следующих функций:

2356. 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{4x}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 2x}$.

2357. 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cdot \cos x}{\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{\sin 2x}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x \cdot \cos x}$.

2358. 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} (x \cdot \operatorname{ctg} x)$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin^3 2x}$.

Задачи для контрольных работ

2359. 1) Дана функция $f(x) = 5^x + 5^{-x}$.
Показать, что $f(-x) = f(x)$.

2) Указать область определения функции $\varphi(x) = \arccos(1 - x)$ и вычислить $\varphi(1{,}5)$.

3) Исследовать функцию $F(x) = |x - 1| + |x|$ и построить ее график.

2360. 1) Показать, что функция $\varphi(x)=\frac{\sin x}{\cos 2x}$ является нечетной.

2) Указать область определения функции $F(x)=\log_2\sqrt{6+x-x^2}$ и вычислить $F(2)$.

3) Исследовать функцию $f(x)=-x\cdot|x|$ и построить ее график.

2361. 1) Исследовать функцию $\varphi(x)=1+\log_2 x$ и построить ее график.

2) Вычислить: а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x}{\sin 2x}$.

2362. 1) Исследовать функцию $F(x)=(0{,}5)^{x-1}$ и построить ее график.

2) Вычислить: а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 5x}$.

11

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

§ 42. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИЯ

Приращение аргумента и приращение функции

2363. В каких случаях приращение аргумента и соответствующее ему приращение функции являются числами одного знака; числами разных знаков? Привести графическую иллюстрацию.

2364. 1) Дана функция $y=x^2$. Можно ли вычислить Δy, если известно только, что $\Delta x=2$? 2) Ответить на тот же вопрос относительно функции $y=5x-3$.

2365. Найти приращение функции: 1) $y=2x^2$ при $x=3$ и $\Delta x=0{,}1$; 2) $y=5x+2$ при любом x и $\Delta x=0{,}2$; 3) $y=x^3$ при $x=0{,}5$ и $\Delta x=-0{,}1$; 4) $y=\frac{6}{x}$ при $x=1{,}2$ и $\Delta x=0{,}3$; 5) $y=\sqrt{x}$ при $x=1{,}69$ и $\Delta x=-0{,}25$; 6) $y=\sin x$ при $x=\frac{5\pi}{6}$ и $\Delta x=\frac{\pi}{36}$.

2366. Найти приращение функции $y=5-x^2$, когда аргумент x переходит: 1) от значения 3 к значению 3,2; 2) от значения, равного -4, к значению, равному $-4{,}1$; 3) от значения -2 к значению $-1{,}8$.

2367. Найти приращение площади круга, когда радиус $R=18$ *см* получает приращение $\Delta R=0{,}2$ *см*.

2368. Найти приращение поверхности и объема куба, когда: 1) ребро, равное 5 *см*, получает приращение 0,1 *см*; 2) ребро, равное 10 *см*, получает приращение, равное 1 *см*; 3) ребро, равное 6 *см*, получает приращение $-0{,}1$ *см*.

2369. Дано, что приращение $\Delta f(x)$ функции $f(x)$ при любом значении аргумента x определяется по формуле $\Delta f(x)=2\cdot\Delta x$. Построить график функции $f(x)$, если известно, что он проходит через точку $(0; -2)$.

2370. Приращение Δy функции y при любом значении аргумента x задано формулой $\Delta y=\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\Delta x$. Построить график функции на замкнутом интервале [—5; 5], если известно, что он проходит через точку (0; —1).

2371. Построить график функции $y = f(x)$ на замкнутом интервале [—2; 4], если известно, что он проходит через точку (1; 2) и указано, что приращение функции при любом значении аргумента x определяется формулой $\Delta y = -\Delta x \cdot (2x + \Delta x - 2)$.

Понятие о мгновенной скорости прямолинейного движения

2372. Дано уравнение прямолинейного движения тела $s = 3t + 8$, где расстояние s выражено в сантиметрах, а время t — в секундах. Определить среднюю скорость движения: 1) за первые 8 *сек*; 2) за промежуток времени от конца 3-й секунды до конца 7-й секунды.

2373. Точка M движется прямолинейно, удаляясь от неподвижной точки A так, что расстояние AM возрастает пропорционально квадрату времени t. Зная, что по истечении 3 *мин* от начала движения расстояние AM равнялось 18 *м*, найти среднюю скорость движения: 1) за первые 5 *мин*; 2) за промежуток времени от $t = t_1$ до $t = t_2$.

2374. Известно, что свободное падение тел совершается по закону $s = \frac{gt^2}{2}$, где $g = 980$ *см/сек*^{2}.

1) Найти среднюю скорость движения за промежуток времени от $t = 10$ *сек* до $t = 10 + \Delta t$ *сек*, полагая $\Delta t = 1$ *сек*; 0,1 *сек*; 0,05 *сек*; 0,01 *сек*; 0,001 *сек*.

2) Если $\Delta t \to 0$, то как изменяется средняя скорость движения в промежутке (10; $10 + \Delta t$)? Найти $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Какой физический смысл имеет полученный результат?

3) Определить скорость падения тела: а) в конце 1-й секунды после начала падения; б) в конце 5-й секунды.

4) Вывести формулу скорости свободного падения тела для любого момента времени t.

2375. Путь, пройденный падающим телом с начальной скоростью v_0, определяется по формуле $s = v_0 t + 0{,}5gt^2$, где s выражено в метрах, t — в секундах.

1) Вывести формулу скорости движения v тела для любого момента времени t.

2) Найти скорость движения тела в конце 15-й секунды, если $v_0 = 3$ *м/сек*.

2376. Дано уравнение прямолинейного движения $s = 3t^2 - 0{,}4t + 2$, где t выражено в секундах, а s — в метрах.

1) Найти среднюю скорость движения за промежуток времени от $t = 5$ до $t = 5 + \Delta t$, полагая $\Delta t = 1$; 0,5; 0,1; 0,01.

2) Найти скорость движения в конце 5-й секунды.

3) Вывести формулу скорости для любого момента времени t.

2377. Найти скорость, которую приобретает в момент $t = t_1$ точка, совершающая прямолинейное движение по закону, выраженному формулой:

1) $s = 5t - 4$; 2) $s = t^3$; 3) $s = 2t^3 + 3t$;
4) $s = \frac{2}{t+1}$; 5) $s = \frac{3t}{t+1}$; 6) $s = \frac{1}{t^3}$;
7) $s = \sqrt{t+1}$; 8) $s = \sqrt{2t+1}$.

Понятие о производной

2378. Дана функция $y = x^2$.

1) Найти отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}1$. Что выражает собой это отношение?

2) Показать, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4$. Изменится ли значение $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, если из точки $x = 2$ перейти к другому значению аргумента x?

2379. Если переменные x и y, каждая из которых имеет определенный физический смысл, связаны уравнением $y = f(x)$, то:

1) что выражает отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при данном значении аргумента x;

2) как определяется скорость изменения функции при данном значении аргумента?

2380. Найти производную функции:

1) $y = x^2 - 3x + 2$ при: а) $x = 2$; б) $x = -3$.

2) $y = |x|$ при: а) $x = 1$; б) $x = 2$; в) $x = -2$.

Имеет ли функция $y = |x|$ производную в точке $x = 0$? Почему?

2381. 1) Дана функция $f(x) = 6x^2$. Найти $f'(1)$; $f'(2)$; $f'\left(-\frac{2}{3}\right)$.

2) Дана функция $F(x) = x^3 - \frac{x}{2}$. Найти $F'(0)$; $F'(1)$; $F'(-2)$.

2382. Дана функция $y = \frac{3}{x}$. Найти $\frac{dy}{dx}$ в точке $x = 1$. При каком значении аргумента x эта функция не имеет производной?

2383. Дана функция $f(x) = x^2$.

1) Показать, что для этой функции справедливо равенство $f'(a+b) = f'(a) + f'(b)$.

2) Определить, при каком значении x справедливо соотношение $f(x) = f'(x)$.

Найти производные следующих функций, пользуясь определением производной.

2384. 1) $y = 4x^2$; 2) $y = \frac{x}{2} + 7$;
3) $y = 2x^3$; 4) $y = 0{,}5x^2 - x^3$.

2385. 1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = \frac{x+1}{x-1}$.

2386. Точка движется прямолинейно по закону $s = f(t) = t^3 - t$.

1) Вывести формулу, выражающую скорость движения точки для любого момента времени t. Какая существует связь между скоростью движения точки в момент t и производной пути s по времени t?

2) Вычислить скорость движения точки в момент времени $t = 1$; $t = 4$.

2387. Угловую скорость равномерного вращения определяют как отношение угла поворота φ к соответствующему промежутку времени t. Если вращение протекает неравномерно, то угол поворота φ будет являться некоторой нелинейной функцией времени t: $\varphi = f(t)$.

1) Дать определение средней угловой скорости вращения за промежуток времени от момента t_1 до момента t_2.

2) Дать определение угловой скорости неравномерного вращения в момент времени $t = t_1$. Какая существует связь между угловой скоростью вращения в момент времени t_1 и производной функции $\varphi = f(t)$ в точке t_1?

2388. Угол φ поворота тела вокруг оси изменяется в зависимости от времени t по закону $\varphi(t) = 2t^2 - 3t + 1$. Вывести формулу для вычисления угловой скорости ω тела в любой момент времени t и вычислить ее при $t = 5$ *сек*.

2389. Маховик, задерживаемый тормозом, за t *сек* поворачивается на угол $\varphi(t) = 8t - 0{,}5t^2$.

1) Определить угловую скорость ω вращения маховика в момент времени $t = 3$ *сек*.

2) С какого момента времени вращение маховика прекратится?

2390. Удельной теплоемкостью вещества называется количество теплоты, которое надо сообщить единице массы этого вещества, чтобы повысить ее температуру на 1° С. Опытом установлено, что при нагревании 1 *г* некоторого вещества от 0 до T °С потребовалось Q малых калорий, причем величина Q изменялась по закону $Q = F(T)$.

1) Найти среднюю удельную теплоемкость вещества в интервале $(T;\ T + \Delta T)$.

2) Найти удельную теплоемкость вещества при температуре T. Какая существует связь между удельной теплоемкостью вещества при данной температуре T и производной от количества тепла Q по температуре T?

2391. Количество теплоты Q, необходимое для нагревания 1 *г* воды от 0 до T °С, определяется формулой $Q = T + 0{,}00002T^2 + 0{,}0000003T^3$ (калорий).

1) Найти среднюю удельную теплоемкость воды в интервале (50°; 100°).

2) Узнать удельную теплоемкость воды при $T = 50°$ и при $T = 100°$.

2392. Сила постоянного тока определяется как количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника в единицу времени. Зная, что за промежуток времени от t_1 до t_2 через поперечное сечение проводника прошло q кулонов электричества и что величина q является некоторой функцией переменного t: $q = f(t)$, найти:

1) среднюю силу переменного тока за промежуток времени от t_1 до t_2;

2) силу переменного тока в момент времени t.

Какая существует связь между силой переменного тока в момент времени t и производной от количества протекшего электричества по времени?

2393. Количество электричества, протекшее через проводник начиная с момента $t = 0$, выражается формулой $q(t) = 3t^2 - 2t$ (кулонов). Вывести формулу для вычисления силы тока i в любой момент времени t и вычислить силу тока в конце 6-й секунды.

2394. Зависимость количества вещества M, вступившего в химическую реакцию, от времени t выражается уравнением $M = f(t)$.

1) Что следует понимать под средней скоростью данной химической реакции за промежуток времени от t_1 до t_2?

2) Как найти скорость химической реакции в любой момент времени t?

2395. Если бы процесс радиоактивного распада протекал равномерно, то под скоростью распада следовало бы понимать количество вещества, разложившегося в единицу времени. На самом деле процесс протекает неравномерно. Считая, что количество граммов вещества R, разложившегося за t *сек*, изменяется по закону $R = f(t)$, найти: 1) среднюю скорость радиоактивного распада за промежуток времени от момента t_1 до момента t_2; 2) скорость радиоактивного распада в момент t.

Геометрический смысл производной. Касательная к кривой

2396. 1) Построить график функции $y = 0{,}5x^2$ и отметить на полученной кривой точку M с абсциссой $x = 2$.

2) Придав абсциссе x приращение $\Delta x = 0{,}5$, отметить на кривой точку N с абсциссой $x + \Delta x$.

3) Построить секущую MN и показать, что ее угловой коэффициент равен отношению $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

4) Выяснить, как будет изменяться взаимное расположение точек M и N кривой, если $\Delta x \to 0$. Как при этом же условии будет изменяться положение секущей на координатной плоскости? Как называется предельное положение секущей MN, занимаемое ей в тот момент, когда точка N сольется с точкой M?

5) Найти угловой коэффициент касательной к кривой в точке $x = 2$. Какая существует связь между этим угловым коэффициентом и производной функции в точке $x = 2$?

2397. Дать общее определение касательной к кривой $y = f(x)$ в данной точке и показать, что известное из курса элементарной геометрии определение касательной к окружности является частным случаем этого общего определения касательной.

2398. Какой геометрический смысл имеет производная $f'(x)$ в данной точке?

2399. На кривой $y=x^2$ взяты точки, абсциссы которых равны соответственно 2 и 3. 1) Найти угловой коэффициент секущей, проходящей через эти точки. 2) Найти угловой коэффициент касательной к кривой в каждой из указанных точек. 3) Доказать, что касательная к параболе $y=x^2$ в точке M (рис. 71) проходит через середину T отрезка OP оси абсцисс. Указать вытекающий отсюда прием практического построения касательной к параболе в любой ее точке.

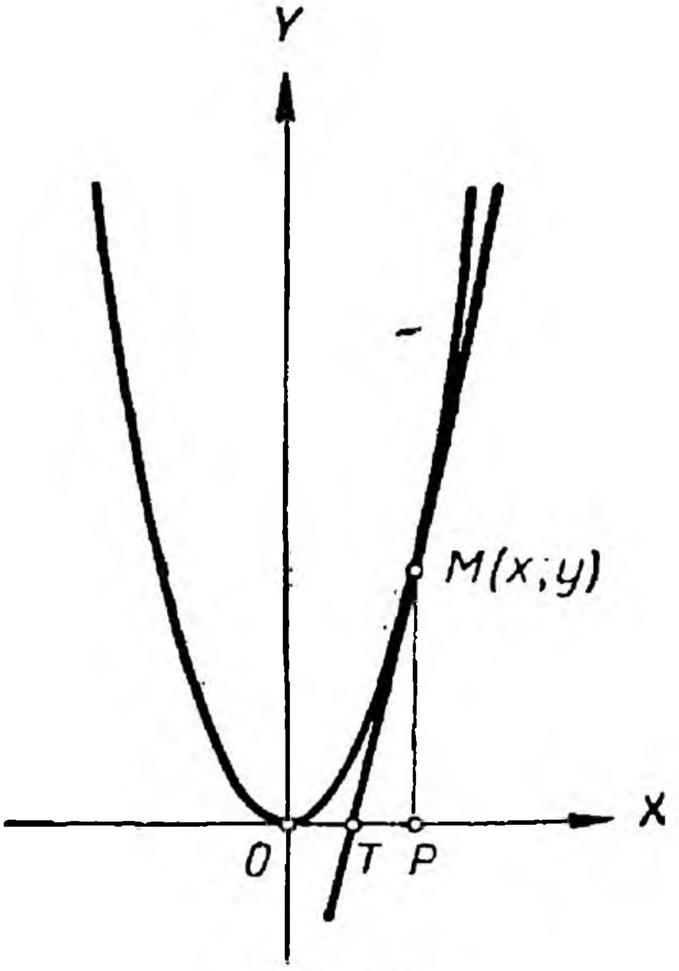


Рис. 71

2400. Используя результаты, полученные при решении упражнений 2384 и 2385, найти угловые коэффициенты касательных к кривым в указанных точках.

1) $y=4x^2$ в точке, абсцисса которой равна; а) 1; б) —2;

2) $y=\frac{x}{2}+7$ в точке, абсцисса которой равна: а) 0; б) 10;

3) $y=2x^3$ в точке, абсцисса которой равна: а) $\frac{1}{2}$; б) —1;

4) $y=\sqrt{x}$ в точке, абсцисса которой равна: а) 4; б) 0,9.

В каждом случае написать уравнение касательной к кривой.

2401. На кривой, определяемой уравнением $y=x^2-2x$, найти точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

2402. В какой точке кривой $y=\sqrt{x}$ касательная наклонена к оси X под углом в 45°?

2403. Найти угловые коэффициенты касательных к кривой $y=x^2-x-2$ в точке пересечения этой кривой с осью абсцисс.

§ 43. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПО ФОРМУЛАМ

Производная суммы и произведения двух функций

2404. Пользуясь определением производной, показать, что: 1) производная функции $f(x)=C$, принимающей постоянное значение, равна нулю; 2) производная функции $f(x)=x$, каждое значение которой равно значению аргумента, равна единице; 3) производная линейной функции $f(x)=ax+b$ равна коэффициенту при независимой переменной. Как согласуются эти выводы с геометрическим смыслом производной? с ее механическим истолкованием?

2405. 1) Сформулировать теоремы о производной суммы и производной произведения двух дифференцируемых функций. Каким приемом надо воспользоваться, чтобы распространить эти теоремы на случай любого конечного числа функций — слагаемых (сомножителей)?

2) Чему равна производная произведения двух функций, если значение одной из них постоянно во всей области ее определения?

2406. Найти производные следующих функций:

1) $y = 10$;
2) $y = -0{,}3$;
3) $y = 5x$;
4) $y = \frac{x}{3}$;
5) $y = -\frac{2x}{5}$;
6) $y = 2 - 7x$;
7) $y = x \cdot (x + 1)$;
8) $y = \sqrt{2} \cdot x \cdot (2 - x)$;
9) $y = (x + 3) \cdot (x - 1)$;
10) $y = \frac{(2x-5)(3x-2)}{4}$;
11) $y = (2x-3)(3x-4)(4x-5)$.

2407. Дано: $f(x) = \frac{x}{2} + 2$. Найти $f'(0)$; $f'(-1)$.

2408. Дано: $F(x) = \frac{0{,}2(11 - 0{,}6x)}{3}$. Найти $F'(1)$; $F'(-0,1)$.

2409. Дано: $\varphi(x) = (x - 1) \cdot (x + 2)$. Найти $\varphi'(0)$; $\varphi'(-1)$; $\varphi'(2)$.

2410. Дано: $\psi(x) = x(1 + 2x)(2 + 3x)$. Найти $\psi'(-1)$; $\psi'(1)$; $\psi'(-2)$.

2411. Найти угол наклона касательной к кривой $y = (x + 1)(x - 3)$ в точке пересечения ее с осью ординат.

2412. Найти угловые коэффициенты касательных к кривой

$$y = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$$

в точках ее пересечения с осью абсцисс.

2413. Написать уравнения касательных к кривой $y = (1 + 0{,}5x)(1 - x)$ в точках пересечения ее с осью абсцисс.

Производная степени. Производная многочлена

2414. Пользуясь теоремой о дифференцировании произведения, найти производные следующих функций: 1) $y = x^2$; 2) $y = x^3$; 3) $y = x^4$; 4) $y = x^5$.

2415. 1) Доказать формулу

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \text{ где } n \text{ — натуральное число.}$$

2) Пользуясь определением производной, показать, что доказанная формула справедлива и в случаях, когда: а) $n = -1$; б) $n = \frac{1}{2}$. Можно ли применять эту формулу для дифференцирования степеней с любым действительным показателем?

2416. 1) Дано: $k=\pi R^2$. Найти $\frac{dk}{dR}$.

2) Дано: $v=\frac{4}{3}\pi R^3$. Найти $\frac{dv}{dR}$.

Найти производные следующих функций:

2417. 1) $y=x^7$; 2) $y=2x^5$; 3) $y=-3x^4$; 4) $y=\frac{2}{3}x^6$.

2418. 1) $y=5x^2+3x-2$; 2) $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+4x$;

3) $y=0{,}2x^5-2x^3-0{,}5x^2-10$; 4) $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$.

2419. 1) $y=x^2(5x-1)$; 2) $y=(x^3-2)(x^2+1)$;

3) $y=\left(\frac{x^3}{3}+2\right)(2x^2-3x)$; 4) $y=(1-x^3)(x-5)(x^2+2x)$.

2420. 1) $y=x^{-2}$; 2) $y=\frac{1}{x^3}$; 3) $y=\frac{5}{x^2}$; 4) $y=\frac{1}{2x^4}$.

2421. 1) $y=x+\frac{1}{x}$; 2) $y=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}$;

3) $y=\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}$; 4) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x^2}+2x$.

2422. 1) $y=x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y=x^{\frac{3}{2}}$; 3) $y=\sqrt[3]{x^2}$; 4) $y=\sqrt[5]{x^3}$.

2423. 1) $y=x+2\sqrt{x}$; 2) $y=4\sqrt[4]{x}-6\sqrt[3]{x^2}$;

3) $y=x^2-x^{-\frac{2}{3}}+x$; 4) $y=\frac{5}{\sqrt{x}}-x\sqrt{x}+1$.

2424. 1) Дано: $S=\frac{at^2}{2}+v_0t$. Найти $\frac{ds}{dt}$.

2) Дано: $f(t)=2t^4-t$. Найти $f'(5)$.

3) Дано: $F(s)=s^2(s-2)$. Найти $F'(-2)$.

4) Дано: $\varphi(r)=\frac{5}{6}r^6-2r^3+r$. Найти $\varphi'(-1)$.

2425. 1) Дано: $y=\frac{2x-1}{2x+1}$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

2) Дано: $f(x)=\frac{2x^3-3x+2}{x^2}$. Найти $f'(-1)$.

3) Дано: $F(t)=\frac{t^3+1}{t^3-1}$. Найти $F'(2)$.

4) Дано: $\Phi(u)=\frac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u}+1}$. Найти $\Phi'(4)$.

2426. Закон прямолинейного движения точки выражен уравнением

$$s=f(t)=4+12t-0{,}25t^2.$$

Найти скорость точки в момент времени $t=8$. В какой момент времени t тело остановится?

2427. Тело, брошенное вертикально вверх с начальной скоростью v_0 *м/сек*, за t *сек* проходит расстояние s (в метрах), равное $s = v_0t - 4{,}9t^2$.

Пренебрегая сопротивлением воздуха и полагая $v_0 = 98$ *м/сек*, определить: а) скорость движения тела в момент времени $t = 10$ *сек*; б) через сколько времени тело достигнет наивысшей точки подъема.

2428. Угол поворота тела вокруг оси изменяется в зависимости от времени t по закону $\varphi(t) = 0{,}1t^2 - 0{,}5t + 0{,}2$.

Найти угловую скорость вращения тела в момент времени $t = 20$ *сек*.

2429. В тонком однородном стержне AB длиной 45 *см* масса m (в граммах) распределена по закону $m = 3l^2 + 5l$, где l — длина части стержня (в сантиметрах), отсчитываемая от точки A. Найти линейную плотность стержня: 1) в точке A; 2) в точке, отстоящей от A на расстоянии $l = 10$ *см*; 3) в точке B.

2430. 1) Написать уравнение касательной к кривой $y = 2 - \frac{x}{2} - x^2$ в точке пересечения ее с осью ординат.

2) Прямая $y = -3x + 1$ параллельна касательной к параболе $y = x^2 - x$. Найти координаты точки касания.

2431. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет производную для определенного значения аргумента x, то для этого значения x имеет место равенство

$$[f^n(x)]' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x),\text{ где } n \text{ — натуральное число.}$$

Найти производные следующих функций.

2432. 1) $y = (2x - 5)^3$; 2) $y = (3 - x)^5$;
3) $y = (4x^2 - x)^3$; 4) $y = (2 - 3x)^2 \cdot (x - 1)$.

2433. 1) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$; 2) $y = \frac{6}{(3-x^2)^3}$;
3) $y = \sqrt[3]{(x^3 - 2)^2}$; 4) $y = \frac{5}{\sqrt{7 - 2x}}$.

Производные синуса и косинуса

2434. Пользуясь определением производной, доказать следующие формулы:

1) $(\sin x)' = \cos x$; 2) $(\cos x)' = -\sin x$.

Найти производные следующих функций:

2435. 1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = x - \sin x$;
3) $y = \frac{\sin x}{3} - 3\cos 3x$; 4) $y = \frac{1 - \sin x}{2} - \frac{1 + \cos x}{2}$.

2436. 1) $y = x \cdot \sin x$; 2) $y = x \cdot \cos x$;
3) $y = \sin x \cdot \cos x$; 4) $y = \sin 2x$.

2437. 1) $y=\sin^2 x$; 2) $y=\cos^2 x$;
3) $y=\cos 2x$; 4) $y=\sin^3 x-\cos^3 x$.

2438. 1) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$; 2) $y=3\sin x-4\sin^3 x$;
3) $y=4\cos^3 x-3\cos x$; 4) $y=\sin^n x-\cos^n x$;
5) $y=\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$.

2439. 1) $y=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x$; 2) $y=x\cdot\operatorname{ctg} x$;
3) $y=(1+\sin^2 x)\cdot(1+\cos^2 x)$; 4) $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$;
5) $y=(1-\sin x)^3$; 6) $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x-x$.

2440. Найти угловой коэффициент касательной к кривой в указанной точке.

1) $y=\sin x$ в точке, абсцисса которой равна π;
2) $y=\cos x$ в точке, абсцисса которой равна $\frac{3\pi}{2}$;
3) $y=\sin^2 x$ в точке, абсцисса которой равна $\frac{\pi}{8}$;
4) $y=\cos^2 x$ в точке, абсцисса которой равна $\frac{5\pi}{12}$.

2441. Исходя из определения производной функции, доказать формулы (a, b — постоянные):

1) $\frac{d\sin(ax+b)}{dx}=a\cos(ax+b)$;
2) $\frac{d\cos(ax+b)}{dx}=-a\sin(ax+b)$.

2442. 1) Почленным дифференцированием соотношения $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$ доказать формулу $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$.

2) Почленным дифференцированием соотношения $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ доказать формулу $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$.

Найти производные следующих функций.

2443. 1) $y=2\sin\frac{x}{2}$; 2) $y=\frac{1}{3}\cos 3x$;
3) $y=\frac{\sin 5x}{5}-5\cos\frac{x}{2}$; 4) $y=x^2+\cos(x-1)$.

2444. 1) $y=\cos(2-3x)+\sin(2-3x)$; 2) $y=x^2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;
3) $y=\sin(x-1)\cdot\cos 2(x-1)$; 4) $y=2\sin^2 3x$.

2445. 1) $y=x\cos 5x$; 2) $y=\sin(3x-2)\cdot\cos(2x-3)$;
3) $y=\operatorname{tg} 4x$; 4) $y=x\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

2446. 1) $y=(2-\sin 2x)^2$; 2) $y=(3-\sin 3x)\cdot(3-\cos 3x)$;

3) $y=10-x\sin^2\frac{x}{2}-\cos^3\frac{x}{2}$; 4) $y=(4\sin x-\cos 2x)^3$.

2447. На кривой $y=\cos 2x$ найти точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

Понятие о второй производной. Ускорение

Найти вторую производную следующих функций.

2448. 1) $y=x^2$; 2) $y=\frac{x^3}{6}$;

3) $y=5x^2+4x-3$; 4) $y=(2x-1)(3x^2-2)$.

2449. 1) $y=x^n$; 2) $y=x^{-2}$; 3) $y=x^{\frac{1}{2}}$; 4) $y=\sqrt[3]{x^2}$.

2450. 1) $y=x^3+\frac{1}{x}$; 2) $y=\sqrt[3]{x}-x$;

3) $y=\frac{1}{x-1}$; 4) $y=(x^2+1)^3$.

2451. 1) $y=\sin x$; 2) $y=\cos x$; 3) $y=\sin 2x$; 4) $y=\cos\left(\frac{\pi}{8}-3x\right)$.

2452. 1) $y=\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$; 2) $y=x^2-\sin^2 x$;

3) $y=\cos^2 3x-3x$; 4) $y=(1-2x)^3$.

2453. Убедиться, что функция $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+B\cos(\omega t+\varphi)$ удовлетворяет соотношению $f''(t)+\omega^2 f(t)=0$.

2454. По данным задачи 2375 найти:

1) среднее ускорение движения в промежутке времени $(t;\ t+\Delta t)$;

2) ускорение в момент времени t. Какая существует связь между ускорением в момент времени t и второй производной от пути s по времени t?

2455. Точка движется прямолинейно со скоростью $v=3t^2-1$ (*м/сек*).

1) Найти среднее ускорение движения за промежуток времени от $t=2$ до $t=2+\Delta t$, полагая $\Delta t=2$; 1; 0,1; 0,01; 0,001.

2) Определить ускорение движения в момент $t=2$.

3) Вывести формулу ускорения в любой момент времени t.

2456. Дано уравнение прямолинейного движения точки

$$s=t^3+2t-1.$$

1) Найти скорость движения точки в любой момент времени t.

2) Найти ускорение движения точки в любой момент времени t.

2457. Точка движется прямолинейно, причем $S=\frac{2}{9}\sin\frac{\pi t}{2}+S_0$ (*см*). Найти ускорение точки в конце 3-й секунды.

2458. Точка движется прямолинейно по закону $S=\frac{1}{12}t^4-\frac{5}{6}t^3+2t^2$ (*см*).

1) Найти ускорение в момент времени t.

2) В какой момент времени ускорение будет равно: а) 0; б) —2 *см/сек*^{2}?

2459. Тело массой в 2 *кг* движется прямолинейно по закону

$$s = f(t) = t^2 + t + 1,$$

где s — путь в сантиметрах, t — время движения в секундах.

Определить: 1) действующую силу; 2) кинетическую энергию W тела через 2 *сек* после начала движения.

§ 44. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Признаки возрастания и убывания функции

2460. 1) Дать определение функции, возрастающей в интервале (a, b); убывающей в интервале (a, b).

2) Привести примеры функций, которые во всей области определения: а) возрастают; б) убывают.

2461. 1) Построить график функции $y = \cos x$ и указать промежутки возрастания и убывания функции.

2) Выполнить то же задание для функции $y = 1 - (1 - x)^2$.

2462. 1) Если функция возрастает в интервале (a, b), то положительными или отрицательными числами будут угловые коэффициенты касательных к графику функции в точках, принадлежащих интервалу? 2) Ответить на тот же вопрос относительно функции, убывающей в интервале (a, b).

2463. 1) Какой знак имеет производная в точках возрастания функции; в точках убывания функции? Каковы необходимые условия возрастания и убывания функции в интервале (a, b)? 2) Сформулировать достаточные признаки возрастания и убывания функции в интервале (a, b). Привести примеры, иллюстрирующие эти признаки.

2464. Известно, что функция $y = \sin x$ возрастает в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Показать это, исследуя знак производной функции в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

2465. Доказать, что функция $y = (x - 1)^2$ возрастает в интервале $(1; +\infty)$ и убывает в интервале $(-\infty; 1)$. Пояснить изменение функции на графике.

2466. Показать, что: 1) функция $y = x^3 + x$ возрастает в любом промежутке; 2) функция $y = \frac{1}{x}$ убывает в интервалах $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

2467. Доказать, что функция $y = \sqrt{2x - x^2}$ возрастает в интервале $(0; 1)$ и убывает в интервале $(1; 2)$.

2468. 1) Дана функция $y = x^2 - 2x$. Выяснить, возрастает или убывает эта функция при значении аргумента: а) $x = 0{,}9$; б) $x = 1{,}1$.

2) Выполнить то же задание для функции $y = -x^2 + x - 1$ при значении аргумента: а) $x = 0$; б) $x = 1$.

2469. Доказать, что если $a > 0$, то функция $y = ax^2 + bx + c$ в интервале $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ убывает, а в интервале $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ возрастает. Указать промежутки возрастания и убывания функции при $a < 0$.

2470. Указать промежутки возрастания и убывания функций:

1) $y = -x^2 + 4x + 1$;
2) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$;
3) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}$;
4) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$, для $0 < x < \pi$.

2471. Исследовать на возрастание и убывание следующие функции:

1) $y = 2 - x - x^2$;
2) $y = x - 2|x|$;
3) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 4$;
4) $y = \sqrt{|x|}$;
5) $y = \sin x - x$;
6) $y = x - \cos x$.

Максимум и минимум функции

2472. Если данная функция имеет несколько экстремумов (больше двух), может ли случиться, что какой-нибудь максимум окажется меньше минимума?

2473. Сформулировать необходимые признаки для существования максимума и минимума функции и привести геометрическую иллюстрацию в каждом случае. Может ли функция иметь максимум или минимум в точке, где производная существует и отлична от нуля?

2474. 1) Во всех ли точках, где производная равна нулю, функция имеет максимум или минимум? Ответ подтвердить примерами. 2) Сформулировать правило для нахождения максимума и минимума функции с помощью первой производной.

Исследовать на максимум и минимум с помощью первой производной следующие функции.

2475. 1) $y = 2x^2 - 4x + 7$;
2) $y = -\frac{x^2}{2} - 3x + 5$;
3) $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x + 4$;
4) $y = x^2 - \frac{x^4}{2}$.

2476. 1) $y = x + \frac{9}{x}$;
2) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$;
3) $y = a + (b - x)^3$;
4) $y = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$, $a > 0$.

2477. 1) $y = (x-1)^3 \cdot (x-2)^2$;
2) $y = \sin x + \cos x$;
3) $y = \sin x - x$;
4) $y = \sin 2x - x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

2478. Доказать, что следующие функции не имеют ни максимума, ни минимума:

1) $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+x-2$; 2) $y=6x^5-15x^4+10x^3$.

2479. 1) Доказать, что если функция $f(x)$ в некотором промежутке принимает только положительные значения, то максимум (или минимум) этой функции в рассматриваемом промежутке является одновременно максимумом (или минимумом) функции $[f(x)]^2$.

2) Исследовать на максимум и минимум функцию $f(x)=\sqrt{2+x^2}$.

2480. 1) Доказать, что произведение двух положительных чисел, сумма которых постоянна, имеет максимум при равенстве множителей.

2) Доказать, что сумма двух положительных чисел, произведение которых постоянно, имеет минимум при равенстве слагаемых.

2481. Каковы должны быть коэффициенты p и q трехчлена x^2+px+q, чтобы этот трехчлен при $x=5$ имел минимум, равный 1?

2482. Требуется огородить проволочной сеткой длиной a *м* прямоугольный участок, прилегающий к стене (рис. 72). Найти размеры участка, при которых его площадь будет наибольшей.

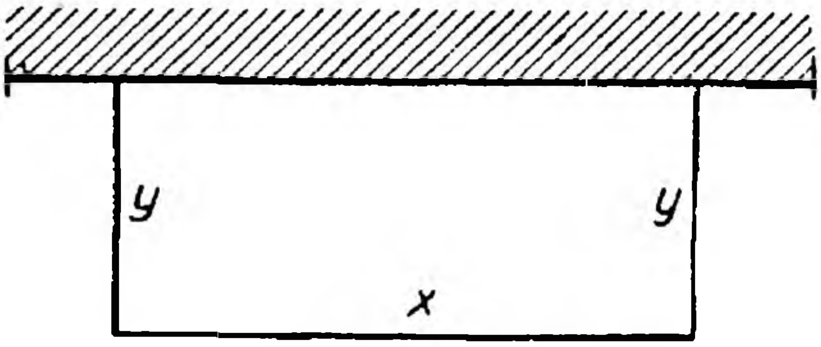


Рис. 72

2483. Известно, что прочность балки прямоугольного поперечного сечения пропорциональна произведению ширины на квадрат высоты сечения. Найти размеры сечения балки наибольшей прочности, которую можно выпилить из круглого бревна, имеющего наименьший диаметр в d *см*.

2484. Из квадратного листа жести, сторона которого равна a *см*, требуется сделать открытый сверху ящик возможно большей емкости, вырезая по углам равные квадраты и затем загибая края, чтобы образовать стенки ящика. Какова должна быть длина стороны вырезаемых квадратов?

2485. Материальная точка совершает прямолинейное движение по закону $s=f(t)=5t+2t^2-\frac{2}{3}t^3$, где s — путь в метрах и t — время в секундах. В какой момент времени t скорость движения точки будет наибольшей и какова величина этой наибольшей скорости?

2486. 1) Сформулировать правило нахождения экстремума функции с помощью второй производной. 2) Как установить существование экстремума в случае, когда при некотором значении аргумента и первая и вторая производные исследуемой функции обращаются в нуль?

2487. Доказать, что функция $y=ax^2+bx+c$ имеет только один максимум или минимум.

Исследовать на максимум и минимум с помощью второй производной следующие функции:

2488. 1) $y=5-4x-x^2$; 2) $y=(x+1)(x+2)$;
3) $y=36x-3x^2-2x^3$; 4) $y=x^2(3x^2+8x-18)$.

2489. 1) $y=x+\frac{4}{x}$; 2) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x^2}$;
3) $y=\frac{x}{x^2+1}$; 4) $y=\sqrt{1+x^2}$.

2490. 1) $y=\cos 2x$, $0<x<2\pi$; 2) $y=\sin 2x+\cos 2x$, $0<x<\pi$;
3) $y=\frac{x}{2}-\sin x$, $0<x<\pi$; 4) $y=\frac{x}{2}-\cos x$, $0<x<2\pi$.

2491. 1) $y=\sin x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $0<x<\pi$;
2) $y=\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$, $0<x<\pi$;
3) $y=\sin x\cdot(1-\cos x)$, $0<x<2\pi$;
4) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

2492. Показать, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, наибольший периметр имеет равносторонний треугольник.

2493. Из куска картона 32 *см* $\times$ 20 *см* требуется сделать коробку без крышки наибольшей вместимости, вырезая по углам равные квадраты и затем загибая выступы для образования боков коробки. Какова должна быть длина сторон вырезаемых квадратов?

2494. Доказать, что из всех прямоугольных треугольников с заданной гипотенузой наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

2495. Сечение туннеля (или шлюзового канала) имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом (рис. 73).

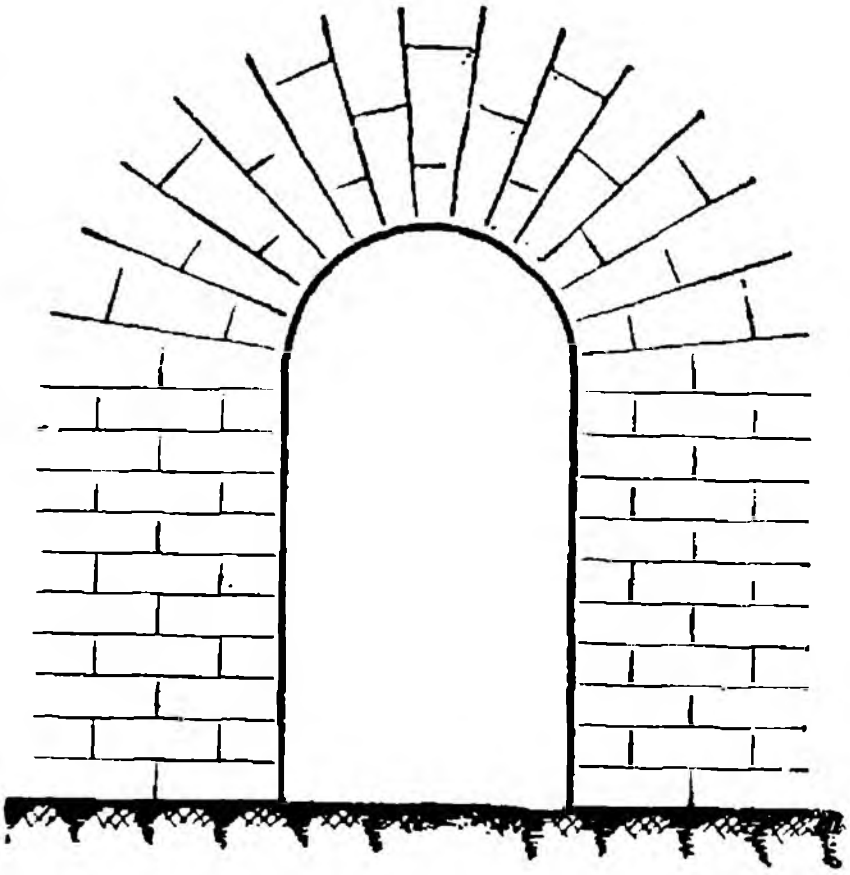


Рис. 73

1) Зная периметр сечения $2p$, определить, при каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей.

2) Зная площадь сечения S, определить, при каких условиях периметр сечения будет наименьшим.

2496. Поперечное сечение каналов в большинстве случаев имеет форму равнобедренной трапеции; часть периметра сечения канала, соприкасающаяся с водой, называется смоченным периметром, а часть сечения канала, занятая водой, — живым сечением (рис. 74). Чтобы увеличить пропускную способность канала, имеющего постоянную площадь живого сечения, при сооружении его стараются сделать смоченный периметр наименьшим. Определить, при каком угле φ откоса при заданной глубине h канала и данной площади S живого сечения канала смоченный периметр имеет наименьшее значение и какое именно.

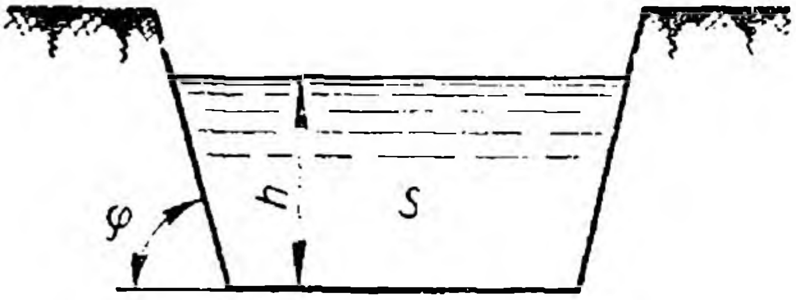


Рис. 74

2497. Из прямоугольного листа жести шириной 60 *см* требуется изготовить открытый сверху желоб, имеющий в поперечном сечении форму равнобедренной трапеции с боковой стороной 20 *см*. Под каким углом к дну желоба надо наклонить его стенки, чтобы вместимость желоба была наибольшей?

2498. Из всех цилиндров данного объема V найти тот, который имеет наименьшую полную поверхность.

2499. Лампа висит над центром круглого стола радиуса r. При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшей (освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света)?

2500. Найти высоту конуса максимального объема, который можно вписать в шар радиуса R.

2501. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в данный прямой конус с высотой H и радиусом основания R.

2502. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

2503. Движение тела, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0, имеет траекторию $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$. При каком значении x тело достигает максимальной высоты? Вычислить наибольшую высоту подъема тела, если $\alpha = 45^\circ$, $v_0 = 400$ *м/сек*, $g = 10$ *м/сек*^{2}.

2504. 1) Имея N одинаковых электрических элементов, можно различными способами составлять из них батареи, соединяя по n элементов последовательно, а затем полученную группу $\left(\text{числом } \frac{N}{n}\right)$ — параллельно. Сила тока, даваемая такой батареей, определяется формулой

$$i = \frac{Nne}{NR + n^2 r},$$

где e — электродвижущая сила одного элемента,

r — его внутреннее сопротивление,

R — внешнее сопротивление.

Определить, при каком значении n батарея даст ток наибольшей силы.

2) Решить задачу для случая, когда в каждой группе элементы соединены параллельно, а сами группы соединены последовательно.

Доказать неравенства.

2505. $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$, $x > 0$.

2506. $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, $x > 0$.

Построение графиков функции

Исследовать следующие функции и построить их графики. При исследовании каждой функции: 1) определить область ее существования и область изменения; 2) исследовать экстремумы функции и найти интервалы возрастания и убывания; результат исследования записать в следующую таблицу;

Таблица 13

	$x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x < x_3$			$x_k < x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0				
$f(x)$	убывает	$f(x_1)$ minimum	возрастает	$f(x_2)$ maximum				

3) выяснить наличие симметрии графика функции; 4) найти точки пересечения кривой с осями координат; 5) найти несколько точек кривой, уточняющих ее форму; 6) построить график функции.

2507. 1) $y = x^3 + 3$; 2) $y = 3x - x^3$;
3) $y = x^3 - x^2$; 4) $y = x^3 - 3x + 3$.

2508. 1) $y = x^4$; 2) $y = x^5$; 3) $y = \frac{1}{4}x^4 - 8x$; 4) $y = x^4 - 5x^2 + 4$.

2509. 1) $y = x + \frac{1}{x}$; 2) $y = \frac{1}{1+x^2}$; 3) $y = \frac{x}{1+x^2}$; 4) $y = \frac{x^2}{x-1}$.

2510. Решить графически следующие уравнения:

1) $x^3 + 2x = x^2$; 2) $x^4 - 2x^2 + |x| = 0$;
3) $\frac{3x+2}{x^3} = 1$; 4) $\frac{x^2}{x-1} - 4{,}5 = 0$.

Формула бинома Ньютона

2511. Последовательно дифференцируя каждую часть тождества

$$(a+x)^4=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4$$

и сравнивая числовые значения полученных выражений при $x=0$, найти коэффициенты C_0, C_1, C_2, C_3, C_4.

2512. Пользуясь указанием к задаче 2511, найти разложение биномов: 1) $(x-1)^4$; 2) $(x+2)^5$; 3) $(b+x)^6$; 4) $(a-x)^6$; 5) $(a+x)^n$, где n — натуральное число.

2513. Найти:

1) шестой член разложения $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^{11}$;

2) четвертый член разложения $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^9$;

3) средний член разложения $(x-y)^{14}$;

4) коэффициент при x^3 в разложении $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$;

5) коэффициент при x^1 в разложении $\left(x^2+\frac{a^3}{x}\right)^5$.

2514. Найти:

1) член разложения $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$, не зависящий от x;

2) член разложения $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{10}$, содержащий x^{11}.

2515. Коэффициент при a в третьем члене разложения $\left(a-\frac{1}{3}\right)^n$ равен 5. Найти средний член этого разложения.

2516. Найти x, если пятый член разложения $\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-1}\right)^6$ равен $\frac{5}{9}$.

2517. Найти все рациональные члены разложения бинома

$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}.$$

2518. Найти наибольший член разложения бинома $(1+\sqrt{2})^{50}$.

2519. Доказать, что наибольший коэффициент разложения $(a+b)^{2n}$ есть число четное.

2520. Доказать, что: 1) $11^{10}-1$ делится на 100;

2) $6^{2n}-1$ делится на 35.

2521. Пользуясь формулой бинома Ньютона, вывести признаки делимости чисел на 9 и 11.

2522. Зная, что формула бинома Ньютона верна для любых действительных значений показателя n бинома, написать разложение бинома $(1+x)^n$ для следующих значений n:

1) -1; -2; -3; 2) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{2}{3}$.

2523. Доказать справедливость приближенных равенств при достаточно малом x:

1) $(1+x)^n \approx 1+nx$; 2) $(1+x)^{-1} \approx 1-x$;

3) $(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{2}x$; 4) $(1+x)^{\frac{1}{3}} \approx 1+\frac{1}{3}x$;

5) $(1+x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1-\frac{1}{2}x$; 6) $(1+x)^{\frac{1}{n}} \approx 1+\frac{1}{n}x$.

В каждом случае найти абсолютную погрешность, допускаемую при пользовании формулами.

2524. Вычислить по формулам приближения и найти абсолютную погрешность вычислений:

1) $(1{,}003)^4$; $(0{,}998)^6$; $(1{,}07)^7$; $(2{,}98)^9$;

2) $\sqrt{78}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{130}}$; $\sqrt[3]{0{,}991}$; $\sqrt[3]{39}$; $\sqrt[5]{200}$;

3) $\sqrt[5]{30}+\sqrt[4]{84}$; $12\cdot 138^{-\frac{1}{2}}-2\cdot 38^{-\frac{1}{5}}$.

Задачи для контрольных работ

2525. 1) Угол φ поворота шкива вокруг оси изменяется в зависимости от времени t по закону $\varphi=t^2+3t-5$ (единица времени — секунда, единица угла — радиан). Вывести формулу для вычисления угловой скорости шкива в любой момент времени t и вычислить ее при $t=2$ *сек*. В какой момент времени t угловая скорость вращения шкива будет равна 9 *рад/сек*?

2) В какой точке кривой $y=0{,}5x^2+2x$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом в 45°?

2526. 1) Количество электричества q, протекающее через проводник начиная с момента $t=0$, выражается формулой $q=2t^2-3t+1$ кулонов. Вывести формулу для вычисления силы тока i в любой момент времени и найти силу тока в конце седьмой секунды.

2) Определить углы наклона касательных, проведенных к кривой $y=x^2-3x+2$ в точках пересечения этой кривой с осью абсцисс.

2527. 1) Дано: $f(x)=(2x-1)\cdot(x^2+x+1)$. Найти $f'(-1)$; $f''(0)$.

2) Тело массой в 5 *кг* движется прямолинейно по закону $s=t^2-2t+1$ (s — путь в сантиметрах, t — время в секундах). Определить: а) действующую силу; б) кинетическую энергию тела $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ через 3 *сек* после начала движения.

3) Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=\sin^2 x$ в точке, абсцисса которой равна $\frac{\pi}{12}$.

2528. 1) Дано: $\varphi(x)=\cos^2 x$. Найти $\varphi'\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $\varphi''\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

2) Одна точка движется по закону $s_1=t^3-t^2+3t-1$, другая — по закону $s_2=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+5t-10$, где t — время в секундах, а s_1 и s_2 — пути в метрах. Определить ускорение движущихся точек в момент, когда скорости их равны.

3) Написать уравнение касательной к кривой $y=2x^3+x-1$ в точке пересечения ее с осью ординат.

2529. 1) Из круглого бревна, диаметр которого равен 30 *см*, требуется вырезать балку прямоугольного сечения так, чтобы площадь сечения была наибольшей. Каковы должны быть измерения этого сечения?

2) Исследовать функцию $y=\frac{1}{3}x^3-3x$ и построить ее график.

2530. 1) Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр фигуры равен 6 *м*. Каковы должны быть размеры прямоугольника для того, чтобы окно пропускало наибольшее количество света?

2) Исследовать функцию $y=x^4-2x^2-8$ и построить ее график.

12 ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 45. РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА

2531. Назовите несколько элементов следующих множеств: 1) множества натуральных чисел; 2) множества положительных чисел; 3) множества отрицательных чисел; 4) множества рациональных чисел; 5) множества корней биквадратного уравнения $x^4-5x^2+4=0$; 6) множества решений неравенства $3x-5<0$. Какие из указанных множеств являются конечными, какие бесконечными?

2532. Назовите несколько общих элементов: 1) множества всех отрицательных и множества всех рациональных чисел; 2) множества всех рациональных чисел и множества всех действительных чисел.

2533. 1) Какие арифметические действия выполнимы во множестве натуральных чисел?

2) Всегда ли во множестве натуральных чисел разрешимо уравнение $x+a=b$, где a и b — натуральные числа? Какие числа необходимо добавить к множеству натуральных чисел, чтобы это уравнение было разрешимо всегда?

2534. Какими числами надо пополнить множество целых чисел, чтобы уравнение $ax+b=0$ было разрешимо для любых целых значений a и b?

2535. Какие числа необходимо добавить к множеству рациональных чисел, чтобы всякой точке числовой оси соответствовало определенное число?

2536. В каком смысле говорят, что между множеством всех точек числовой оси и множеством всех действительных чисел установлено взаимно однозначное соответствие?

2537. Почему соответствие между множеством всех рациональных чисел и всех точек числовой оси нельзя назвать взаимно однозначным?

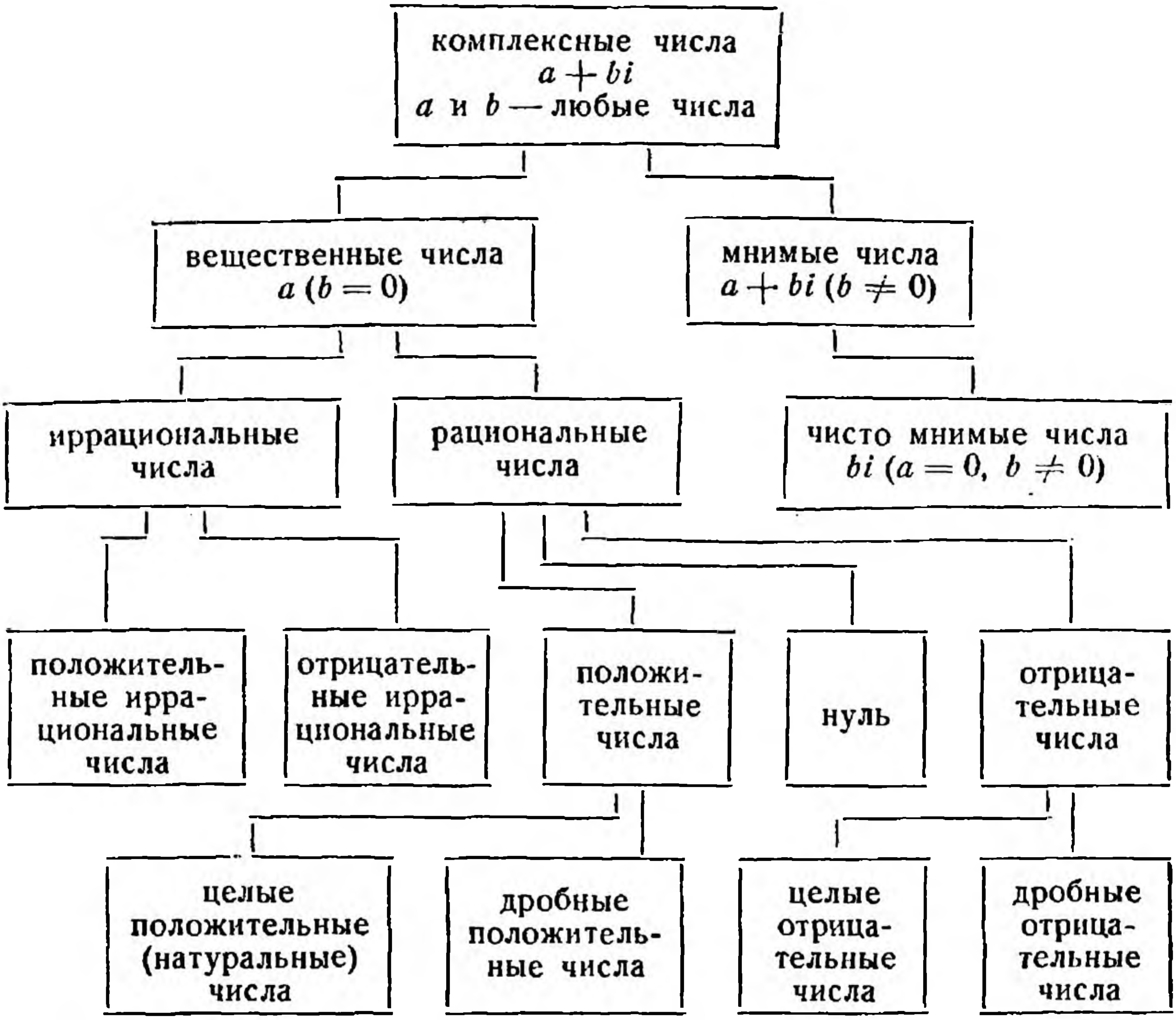
2538. Какие из шести действий: сложение, вычитание, умножение, деление (кроме деления на нуль), возвышение в степень и извлечение корня — выполнимы в множестве всех положительных чисел;

в множестве всех рациональных чисел; в множестве всех действительных чисел?

2539. Если a и b — натуральные числа, то в множестве каких чисел разрешимо каждое из следующих уравнений:

1) $x - a = b$; 2) $x : a = b$;
3) $x + a = b$; 4) $ax = b$?

2540. Пользуясь схемой, дать классификацию чисел:


комплексные числа $a + bi$ a и b — любые числа
вещественные числа a ($b = 0$)
мнимые числа $a + bi$ ($b \neq 0$)
иррациональные числа
рациональные числа
чисто мнимые числа bi ($a = 0$, $b \neq 0$)
положительные иррациональные числа
отрицательные иррациональные числа
положительные числа
нуль
отрицательные числа
целые положительные (натуральные) числа
дробные положительные числа
целые отрицательные числа
дробные отрицательные числа

2541. Если a и b — любые действительные числа, причем $a \neq 0$, то всегда ли разрешимо в множестве действительных чисел уравнение $ax^2 = b$?

2542. Пользуясь методом полной математической индукции, доказать справедливость следующих равенств:

1) $1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$;

2) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$;

3) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

4) $1 + 4 + 10 + 20 + 35 + \ldots$
$$\ldots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Пользуясь методом полной математической индукции, решить следующие задачи.

2543*. 1) Вычислить сумму $s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$

$$\ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

2) Составить формулу, выражающую нечетное число u_n через его номер n.

3) Вычислить сумму первых n нечетных чисел.

4) Доказать, что $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, где n — любое натуральное число.

5) Доказать, что для любого натурального m справедливо тождество $(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n) = 2^m \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots$ $\ldots (2m-1)$.

6) Доказать, что n прямых, расположенных в одной плоскости, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, рассекают плоскость на $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ частей.

2544*. Доказать, что:

1) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

2) $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 =$

$$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2};$$

4) $1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

2545*. Доказать:

1) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

2) $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$.

2546*. 1) Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

2) Показать, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ при $n \geqslant 0$ делится на 133.

3) Доказать, что при любом натуральном n выражение $n^7 - n$ делится на 7.

4) Доказать, что $n^3 + 5n$ делится на 6, где n — любое натуральное число.

5) Доказать, что выражение $n^3 + 11n$ делится на 6 при любом натуральном n.

2547. Доказать справедливость следующих формул:

1) $a_n = a_1 + d(n-1)$, где a_n — n-й член арифметической прогрессии, a_1 — ее первый член, d — разность;

2) $a_n = a_1 q^{n-1}$, где a_n — n-й член геометрической прогрессии, a_1 — ее первый член, q — знаменатель прогрессии;

3) $$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)^2 = \\ = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots \\ \ldots + a_1a_n + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n).$$

§ 46. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

2548. Решить квадратное уравнение $x^2 - 10x + N = 0$, полагая:

1) $N = 16$; 2) $N = 18\frac{3}{4}$; 3) $N = -24$; 4) $N = 12$;

5) $N = 41$.

2549. Показать, что следующие квадратные уравнения не имеют корней в множестве вещественных чисел:

1) $x^2 + 1 = 0$; 2) $x^2 + 2x + 5 = 0$;

3) $x^2 - 6x + 18 = 0$; 4) $4x^2 - 4x + 13 = 0$.

2550. Даны следующие числа: 35; $17\frac{1}{5}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\operatorname{tg} 45^\circ$; π; $0,(6)$: -20; $\lg 20$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt{12}$; $\sin 180^\circ$; 0; $\lg 10$; $-3,225$; $3 + 2i$; $i\sqrt{2}$; $-6i$; $4 - \sqrt{-3}$. Назвать среди них числа: 1) натуральные; 2) положительные; 3) отрицательные; 4) рациональные; 5) иррациональные; 6) действительные; 7) мнимые; 8) чисто мнимые; 9) комплексные.

2551. 1) Назвать действительную часть следующих комплексных чисел:

$$3 + 2i;\ -5 + i;\ 4i;\ \sqrt{2} - i\sqrt{2};\ 8;\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i;$$
$$-25\frac{1}{2};\ \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

2) Назвать коэффициент при мнимой части следующих комплексных чисел:

$$4 - 2i;\ 12;\ 8i;\ \sqrt{3} - i\sqrt{5};\ 7,3;\ -i\sqrt{3};$$
$$-\sqrt{2} + i;\ \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ.$$

2552. Даны числа: $2 + i$; $1 - 2i$; $-5 + 3i$; $-1 - 5i$; 3; i.

Назвать числа: 1) сопряженные данным; 2) противоположные данным.

2553. Пользуясь условием равенства комплексных чисел, определить x и y из уравнений (x и y — вещественные числа):

1) $3x - y + (x + y)i = 7 + 5i$;

2) $\frac{1}{x} + 2iy = 2$;

3) $x^2 - 3(x - i) = iy - 2$.

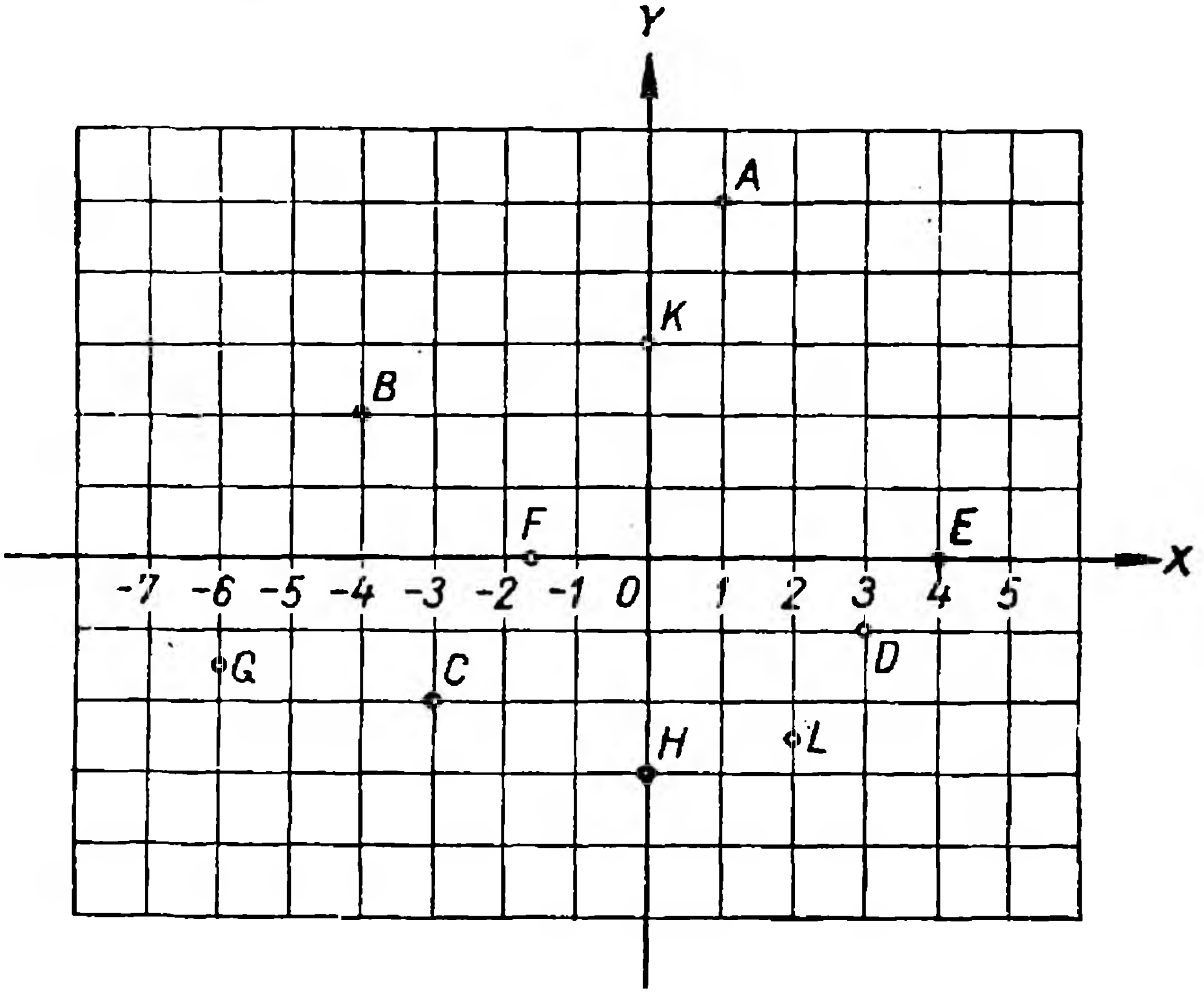


Рис. 75

2554. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы комплексное число $a + bi$ было равно своему сопряженному числу. Привести примеры.

2555. Укажите на координатной плоскости точки, изображающие числа: 0; 1; —1; 3; —5; i; $-i$; $2i$; $-4i$.

2556. В какой четверти координатной плоскости расположены точки, изображающие числа: $3 + 5i$; $-4 + i$; $2{,}5 - 6i$; $-1 - i$.

2557. Написать числа, соответствующие точкам A, B, C, D, E, F, G, H, K, L, расположенным на координатной плоскости (рис. 75).

2558. На координатной плоскости дан круг с центром в начале координат и радиусом, равным 2 (рис. 76). Какие числа соответствуют точкам A, B, C, D, E, F, лежащим в вершинах правильного шестиугольника, вписанного в этот круг?

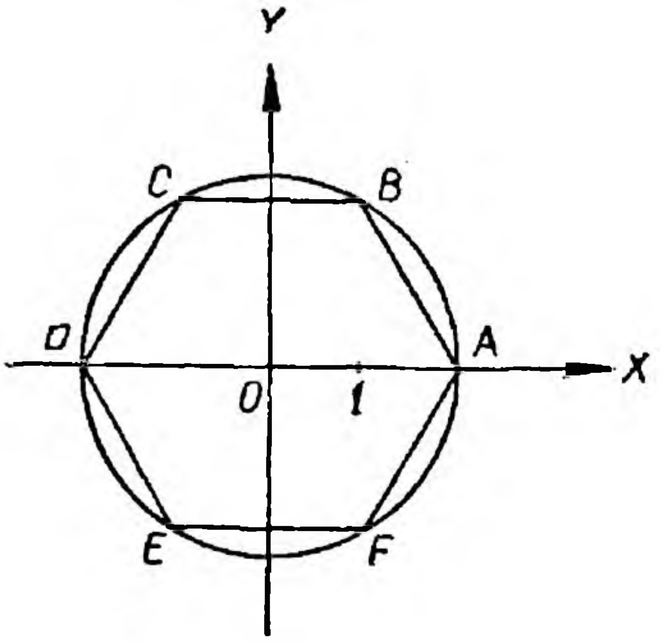


Рис. 76

2559. Дано число $-3+4i$. Как располагается на координатной плоскости точка, изображающая число: 1) сопряженное данному числу; 2) противоположное данному числу; 3) противоположное числу, сопряженному данному? Построить эти точки.

2560. Дана точка, изображающая число $5-2i$. Какие числа будут изображать точки, симметричные данной: 1) относительно действительной оси; 2) мнимой оси; 3) относительно начала координат?

2561. Где на координатной плоскости располагаются точки, изображающие все комплексные числа, у которых: 1) действительная часть равна 7; 2) коэффициенты мнимой части равны -5?

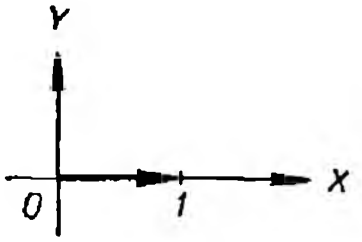
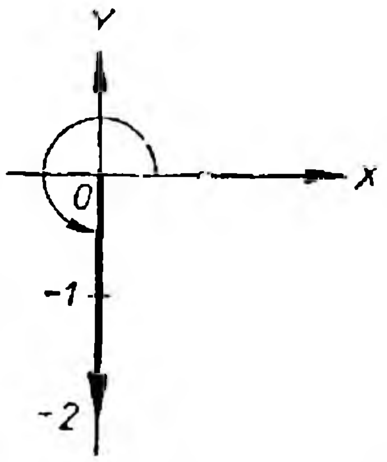
2562. Найти длину отрезка, соединяющего точки, изображающие числа $-7+3i$ и $-4-i$.

2563. Построить вектор, изображающий комплексное число:

1) 1; 2) i; 3) $-5i$; 4) 6;
5) $1+2i$; 6) $-2+3i$; 7) $-3-4{,}5i$; 8) $5{,}5-3{,}5i$;
9) $-\sqrt{2}\cdot i$; 10) $\sqrt{2}-i\sqrt{3}$.

2564. Вектор $\overrightarrow{OM}$, равный 2, подвергнут двум операциям: операции растяжения в $\frac{1}{2}$ раза и операции поворота на угол $\frac{3\pi}{2}$. Построить полученный вектор и написать соответствующее ему число.

Таблица 14

№	Данное число	Соответствующий вектор	Операции		Полученный вектор	Полученное число
			растяжение	угол поворота		
1	1	 	2	$\frac{3\pi}{2}$	 	$-2i$
2	$2i$		1,5	π		
3	$-3i$		$\frac{2}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		
4	$-4i$		0,5	$\frac{3\pi}{2}$		
5	5		0,2	π		

2565. Для каждого числа, данного в таблице 14, построить соответствующий вектор, выполнить указанные операции растяжения и поворота, построить полученный вектор и написать соответствующее ему число (заполнить таблицу).

2566. Что называется модулем комплексного числа $a+bi$ и каким символом он обозначается? Каков геометрический смысл модуля комплексного числа?

2567. Найти модуль комплексного числа:

1) $4-3i$; 2) $-1+i$;
3) $-\sqrt{5}-2i$; 4) -5;
5) i; 6) $-3i$;
7) $1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$; 8) $\sin 2x+i\cos 2x$.

2568. Что можно сказать о модулях двух сопряженных комплексных чисел; о модулях двух противоположных комплексных чисел?

2569. Дано число $5+2i$. Написать комплексное число $x+yi$ такое, чтобы $|x+yi|>|5+2i|$.

2570. Найти геометрическое место точек координатной плоскости: 1) модуль которых равен 7; 2) аргумент которых равен $\frac{\pi}{4}$.

2571. Найти геометрическое место точек координатной плоскости, удовлетворяющих условию: $2<|z|<3$.

2572. Какое множество точек плоскости соответствует комплексным числам, удовлетворяющим неравенству $|x+yi|>1$?

2573. Решить уравнение

$$|z|-z=1+2i, \text{ где } z=x+yi.$$

2574. Найти:

1) $\arg(-4)$; 2) $\arg(5i)$; 3) $\arg(-1{,}5i)$;
4) $\arg(1+i)$; 5) $\arg(-2-2i)$; 6) $\arg\left(-1+i\sqrt{3}\right)$.

2575. Следующие комплексные числа изобразить векторами и определить модуль и аргумент каждого числа:

1) 6; 2) $-4i$; 3) $1-i$;
4) $-1-i$; 5) $1+i\sqrt{3}$; 6) $-5+5i$.

2576. 1) Чему равен аргумент: а) чисто мнимого числа; б) любого отрицательного числа; в) любого положительного числа?

2) Аргумент комплексного числа $a+bi$ равен φ. Чему равен аргумент числа $a-bi$?

2577. Какое число не имеет определенного аргумента?

§ 47. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Сложение и вычитание комплексных чисел

2578. Построить на графике слагаемые и сумму следующих комплексных чисел:

1) $2+3i$ и $4+2i$; 2) $-3+i$ и $-1+3i$;
3) $-4-2i$ и $-1-4i$; 4) $3-3i$ и $4-i$;
5) $2+i$, $1+3i$ и $-1+2i$;
6) $3+i$, $-2+3i$, $-3-2i$ и $4-3i$.

2579. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы сумма двух комплексных чисел $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ была: 1) действительным числом; 2) чисто мнимым числом.

2580. Дано комплексное число $-3+2i$. Какое число надо к нему прибавить, чтобы получилось действительное число; чисто мнимое число?

2581. Построить и вычислить разность чисел:

1) $5+4i$ и $1+2i$; 2) $-2+5i$ и $-3-2i$;
3) $-6-i$ и $-1-6i$; 4) $5-2i$ и $1-3i$.

2582. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы разность двух комплексных чисел $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ была: 1) действительным числом; 2) чисто мнимым числом.

2583. Даны два комплексных числа: $1+i$ и $0{,}2-0{,}5i$. Найти: 1) модуль суммы данных чисел; 2) модуль разности данных чисел.

2584. Как располагаются векторы, изображающие два комплексных числа z_1 и z_2, если:

1) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$; 2) $|z_1-z_2|=|z_1|-|z_2|$?

Выполнить действия.

2585. 1) $(3+5i)+(4+6i)$;
2) $(-4+6i)-(-7+5i)$;
3) $(-0{,}2-1{,}1i)+(-0{,}8-1{,}9i)$;
4) $\left(1\frac{3}{4}-2\frac{1}{3}i\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i\right)$.

2586. 1) $(1+i)+(2-3i)-(3+4i)$;
2) $(0{,}4-4{,}2i)-(1{,}5+0{,}6i)+(1{,}1-0{,}2i)$;
3) $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}i\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}i\right)$;
4) $[0,(3)+1{,}1(6)i]-[0{,}1(3)-0,(2)i]$.

2587. 1) $(\sqrt{2}+i)+(\sqrt{2}-i)$;
2) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$;

3) $(2\sqrt{3}-3i\sqrt{2})-(\sqrt{27}-i\sqrt{8})+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3i}{\sqrt{2}}\right)$;

4) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{i}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{\sqrt{6}}\right)$.

2588. 1) $(a-2bi)+(-2a+3bi)-(4a-5bi)+(5a+6bi)$;

2) $(3a-4bi)-[(-2a+5bi)-(a-bi)+(a+bi)]$;

3) $(-m+ni)+(m-ni)-[(-m-ni)+(-m+ni)]$;

4) $\left(\frac{m}{n}-\frac{ni}{m}\right)-\left(\frac{n}{m}-\frac{mi}{n}\right)-\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{i}{m}\right)-\left(\frac{1}{m}-\frac{i}{n}\right)\right]$.

Умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел

2589. Показать на чертеже, что: 1) умножению числа 1,5 на 4 соответствует растяжение вектора, изображающего множимое 1,5, в 4 раза без изменения его направления; 2) умножению числа 3 на —0,5 соответствует сжатие вдвое вектора, изображающего множимое 3 и поворот его на угол 180°.

2590. Показать на чертеже, что: 1) умножению числа 2,5 на $2i$ соответствует растяжение вектора, изображающего множимое 2,5, в два раза и поворот его на угол 90°; 2) умножению числа 5 на $-0,2i$ соответствует сжатие вектора, изображающего множимое 5 в пять раз и поворот его на —90°.

Построить произведение следующих чисел:

2591. 1) $2i\cdot i$; 2) $(-3i)\cdot 2i$;
3) $(-4i)\cdot(-0,2i)$; 4) $5i\cdot(-0,3i)$.

2592. 1) $(2+4i)\cdot 0,5$; 2) $(2+3i)\cdot(-2)$;
3) $(1+2i)\cdot 3i$; 4) $(1-2i)\cdot(-4i)$.

2593. Вычислить следующие произведения и показать, что модуль произведения равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей:

1) $(1+i)\cdot(1-i)$; 2) $\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$;

3) $(-\sqrt{3}+3i)\cdot(-3-i\sqrt{3})$

Выполнить умножение.

2594. 1) $0,2i\cdot 5i$; 2) $2i\sqrt{3}\cdot(-3i\sqrt{2})$;
3) $(-ai)\cdot bi$; 4) $(m-n)i\cdot(n-m)i$.

2595. 1) $(5-6i)\cdot 0,5$; 2) $(-0,2+1,2i)\cdot(-5)$;
3) $\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}i\right)m^2n^2$; 4) $\left(-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}i\right)\cdot\frac{mn}{m+n}$.

2596. 1) $(3+2i)(-3-2i)$; 2) $\left(\frac{1}{2}-\frac{3i}{4}\right)\cdot\left(2+1\frac{1}{3}\,i\right)$;

3) $(0{,}4-1{,}2i)\cdot(-0{,}4+1{,}2i)$;

4) $[0{,}(2)+0{,}(1)\,i]\cdot[0{,}(3)+0{,}(2)\,i]$.

2597. 1) $(\sqrt{2}+i)(\sqrt{6}-i\sqrt{3})$; 2) $(\sqrt{3}-i)(-\sqrt{3}+i)$;

3) $(-2\sqrt{3}+6i)\cdot(-6-2i\sqrt{3})$;

4) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,i\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)$.

2598. 1) $(a+bi)(a-bi)$; 2) $(-m+ni)(m-ni)$;

3) $(m\sqrt{n}+ni\sqrt{m})\cdot(-m\sqrt{n}-ni\sqrt{m})$;

4) $\left(\sqrt{\frac{m}{n}}-i\sqrt{\frac{n}{m}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{n}{m}}+i\sqrt{\frac{m}{n}}\right)$.

2599. Дано комплексное число $5-3i$. Напишите другое комплексное число, такое, чтобы произведение его на данное число было действительным числом. Сколько таких чисел можно подобрать?

2600. Чему равняется среднее пропорциональное двух сопряженных комплексных чисел: $a+bi$ и $a-bi$?

2601. Число, сопряженное с z, обозначается через $\bar{z}$. Доказать, что $z\cdot\bar{z}=|z|^2$.

2602. Проверить, что:

1) $z_1+z_2+z_3=0$, 2) $z_1\cdot z_2\cdot z_3=1$,

если $z_1=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; $z_2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ и $z_3=1$.

2603. Упростить выражение

$$(x+1+i)\cdot(x-1+i)\cdot(x-1-i)\cdot(x+1-i).$$

Разложить на множители.

2604. 1) a^2+b^2; 2) a^2+1; 3) $4a^2+9$; 4) a^2+8.

2605. 1) $m+4$; 2) $m+n$; 3) m^2n+1; 4) $8+mn^2$.

2606. 1) $\sqrt{7}+9$; 2) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

2607. Сократить следующие дроби:

1) $\frac{m^2+4n^2}{m+2ni}$; 2) $\frac{a+1}{\sqrt{a}-i}$; 3) $\frac{a^2+9b^2}{a-3bi}$; 4) $\frac{m+4n}{\sqrt{m}+2i\sqrt{n}}$.

2608. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, корнями которого были бы числа:

1) i и $-i$; 2) $0{,}5i$ и $-0{,}5i$;

3) $2+i$ и $2-i$; 4) $1-i\sqrt{3}$ и $1+i\sqrt{3}$.

Выполнить деление.

2609. 1) $6i:3$; 2) $-i:0{,}2$;

3) $0{,}5i:(-10i)$; 4) $(-4{,}2i):(-2{,}4i)$.

2610. 1) $\frac{2}{i}$; 2) $\frac{0{,}3}{-i}$;

3) $\frac{-2-3i}{i}$; 4) $\frac{3-2i}{-i}$.

2611. 1) $\frac{3}{2-i}$; 2) $\frac{2}{1-2i}$;

3) $\frac{3i}{2-3i}$; 4) $\frac{2i}{-2+3i}$.

2612. 1) $\frac{1-i}{1+i}$; 2) $\frac{3-5i}{5-3i}$;

3) $\frac{1+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}}$; 4) $\frac{36-i\sqrt{2}}{2+3i\sqrt{2}}$.

2613. 1) $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-3i}$; 2) $\frac{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{-1-i\sqrt{3}}$;

3) $\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{8}+i\sqrt{27}}{-\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$.

2614. 1) $\frac{m}{m-ni}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-ai}$;

3) $\frac{m-i\sqrt{n}}{m+i\sqrt{n}}$; 4) $\frac{a\sqrt{b}+bi\sqrt{a}}{b\sqrt{a}-ai\sqrt{b}}$.

2615. Найти частное от деления двух сопряженных комплексных чисел и определить модуль полученного частного.

2616. Найти модуль и аргумент следующих чисел:

1) $\frac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}}$; 2) $\frac{1+7i}{3-4i}$;

3) $\frac{-1+3i}{1+2i}$; 4) $\frac{2}{-1+i\sqrt{3}}$.

2617. Доказать равенства:

1) $1-i+0{,}4\cdot(2-i)=\frac{5-i}{2+i}$;

2) $\frac{\sqrt{x}+i\sqrt{y}}{\sqrt{x}-i\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}+i\sqrt{x}}{\sqrt{y}-i\sqrt{x}}=\frac{2(x-y)}{x+y}$.

2618. Произвести указанные действия:

1) $$\frac{\sqrt{4{,}5}-\sqrt{-2{,}5}}{\sqrt{4{,}5}+\sqrt{-2{,}5}}\cdot\frac{1}{1-\sqrt{-11{,}25}};$$

2) $$\frac{\sqrt{2+a}+i\sqrt{2-a}}{\sqrt{2+a}-i\sqrt{2-a}}-\frac{\sqrt{2-a}+i\sqrt{2+a}}{\sqrt{2-a}-i\sqrt{2+a}}.$$

Вычислить.

2619. 1) i^{12}; 2) i^{17}; 3) i^{22}; 4) i^{33}.

2620. 1) $(-i)^{13}$; 2) $-i^{24}$; 3) $(-i)^{18}$; 4) $-i^{18}$.

2621. 1) i^{4n}; 2) i^{4n+1}; 3) i^{4n+2}; 4) i^{4n+3}.

2622. 1) i^{1007}; 2) i^{15000}; 3) $i^{500}+i^{602}$; 4) $i^{111}-i^{1111}$.

2623. Найти числовое значение многочлена

$$x^{99}-2x^{88}+3x^{77}-4x^{66}+3x^{55}-2x^{44}+x^{33} \quad \text{при} \quad x=i.$$

2624. Вычислить:

1) i^{-60}; 2) i^{-75}; 3) $\frac{1}{i^{23}}$; 4) $\frac{1}{i^{91}}$.

5) $i+i^2+i^3+\ldots+i^{100}$; 6) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{100}$;

7) $\dfrac{i+i^2+i^3+\ldots+i^{50}}{i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{50}}$; 8) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^{11}}+\dfrac{1}{i^{21}}+\dfrac{1}{i^{31}}+\dfrac{1}{i^{41}}+\dfrac{1}{i^{51}}$.

Выполнить действия.

2625. 1) $(1+i)^2$; 2) $(1+i)^4$; 3) $(1-i)^2$; 4) $(1-i)^{10}$.

2626. 1) $(2+3i)^2$; 2) $(0{,}2-5i)^2$; 3) $(2-i\sqrt{2})^2$; 4) $(\sqrt{3}-3i)^2$.

2627. 1) $(a+2bi)^2$; 2) $(2a-3bi)^2$;

3) $(a\sqrt{b}-bi\sqrt{a})^2$; 4) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}-i\sqrt{a}\right)^2$.

2628. 1) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^2$; 2) $\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt{2}-i}{2}\right)^2$; 4) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}+i}\right)^2$.

2629. Доказать, что при возведении двух сопряженных комплексных чисел в куб снова получаются сопряженные комплексные числа.

2630. Найти x из уравнения:

1) $x^2+2ix+3=0$; 2) $x^2-4ix+12=0$.

2631. Разложить на множители трехчлен:

1) $x^2-7ix-12$; 2) $x^2-5ix-6$.

2632. Вычислить значение, которое принимает многочлен

$$x^3-x^2+12x-7 \quad \text{при} \quad x=2-i\sqrt{3}.$$

2633. Определить численное значение многочлена:

1) $x^4-6x^3+15x^2-18x+10$ при $x=1+\sqrt{-1}$;

2) $x^4-2x^3+3x^2-2x+2$ при $x=1-\sqrt{-1}$.

2634. Вычислить наиболее рациональным способом значение, которое принимает выражение $(m+ni)^2-(m-ni)^2$ при $m=2i$ и $n=1-i$.

2635. 1) Вычислить $y=x^3-2x^2-x+4$ для $x=1\pm 2i$.

2) Проверить, что трехчлен $y=x^2-3x+7$ для двух сопряженных комплексных значений x дает два сопряженных значения.

Вычислить.

2636. 1) $\dfrac{(1+i)^3}{1-i}$; 2) $\dfrac{(1-i)^3}{1+i}$;

3) $(1+i)^{-2}$; 4) $(1-i)^{-3}$.

2637. 1) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^8$; 2) $\left(\dfrac{2}{1-i\sqrt{3}}\right)^6$;

3) $\left(2i+i\sqrt{2}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^2$; 4) $\left(3i-i\sqrt{3}-\dfrac{i}{\sqrt{3}}\right)^2$.

2638. 1) $\dfrac{1}{(1+i)^2}+\dfrac{1}{(1-i)^2}$; 2) $\dfrac{1}{(1+i)^4}-\dfrac{1}{(1-i)^3}$;

3) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^2$;

4) $\dfrac{(1+i)^3}{(2-2i)^2}\cdot\left(\dfrac{3-i}{2+i}-\dfrac{2-i}{3+i}\right)$.

2639. Произвести указанные действия:

1) $(1+2i)^4\cdot(-7+24i)$; 2) $(3+i)^4\cdot(28-96i)$;

3) $(7+24i)\cdot\left(\dfrac{1-2i}{1+2i}\right)^2$;

4) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}\right)^2\cdot\left[(2+i\sqrt{2})^2+5\right]$.

2640. Упростить:

1) $\dfrac{(a+bi)^2}{a-bi}-\dfrac{(a-bi)^2}{a+bi}$; 2) $\dfrac{(x+i)^3-(x-i)^3}{(x+i)^2-(x-i)^2}$.

2641. Вычислить:

1) $(1+i)^8+(1-i)^8$; 2) $(1+i)^{10}+(1-i)^{10}$;

3) $(1+i)^5\cdot(1-i)^5$; 4) $(1+i^3)^7\cdot(1-i^3)^7$;

5) $(1-i^{50}):(1+i)^{30}$; 6) $\dfrac{(1+i)^6-(1-i)^6}{(1+i)^6\cdot(1-i)^6}$.

2642. Найти $x = 0{,}5\alpha^2 + 0{,}25\beta^3$, если:

1) $\alpha = -2i$ и $\beta = 2i$;
2) $\alpha = 1 + i$ и $\beta = 1 - i$;
3) $\alpha = 2 + \sqrt{-3}$ и $\beta = 2 - \sqrt{-3}$.

2643*. Доказать, что если $A = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, $B = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, то:

1) $A^3 = B^3 = 1$; 2) $A^2 = B$;
3) $B^2 = A$; 4) $A^{3n} = B^{3n} = 1$;
5) $A^{3n+1} = B^{3n+2} = A$; 6) $B^{3n+1} = A^{3n+2} = B$.

2644. Выполнить действия:

1) $\sqrt{i}$; 2) $\sqrt{-2i}$;
3) $\sqrt{3 + 4i}$; 4) $\sqrt{-3 - 4i}$;
5) $\sqrt{5 - 12i}$; 6) $\sqrt{-5 + 12i}$;
7) $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$; 8) $\sqrt{3 + i\sqrt{7}}$;
9) $\sqrt{7 - 4\sqrt{-2}}$; 10) $\sqrt{28 + 4\sqrt{-15}}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа

2645. Построить точки, изображающие числа:

1) $4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$;
3) $\cos\pi + i\sin\pi$; 4) $2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

Представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа и построить их геометрическое изображение:

2646. 1) 3; 2) -5; 3) $2i$; 4) $-4i$.
2647. 1) $1 + i$; 2) $-2 + 2i$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$; 4) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
2648. 1) $\sqrt{3} - i$; 2) $-3 + 4i$; 3) $-2 - 3i$; 4) $0,(3) + 0,1(6)\,i$.

2649. Выразить в алгебраической форме числа:

1) $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;
3) $6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$;
4) $8\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$.

2650. Выполнить умножение комплексных чисел в тригонометрической форме:

1) $3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;
2) $4\,[\cos(-30^\circ)+i\sin(-30^\circ)]\cdot 0{,}5\,(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$;
3) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}[\cos(-120^\circ)+i\sin(-120^\circ)]$;
4) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

2651. Выполнить деление:

1) $6(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ):3(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)$;
2) $(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ):(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)$;
3) $7\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]:2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$;
4) $\sqrt{2}\cdot(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ):0{,}5(\cos 110^\circ+i\sin 110^\circ)$.

2652. Вычислить с помощью формулы Муавра:

1) $\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^6$; 2) $[2(\cos 18^\circ+i\sin 18^\circ)]^{10}$;
3) $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-3}$; 4) $\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]^{-6}$.

2653. Пользуясь формулой Муавра, доказать справедливость тождеств:

1) $\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi$;
2) $\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cdot\cos\varphi$;
3) $\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi$;
4) $\sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi$.

2654. Упростить выражение и результат записать в тригонометрической форме:

1) $\frac{-2i}{1+i}$; 2) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-i}\right)^6$;
3) $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$; 4) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$.

2655. В следующих примерах найти все значения корня, представив предварительно подкоренное выражение в тригонометрической форме:

1) $\sqrt{4}$; 2) $\sqrt{i}$; 3) $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}$;
4) $\sqrt{-8(1+i\sqrt{3})}$; 5) $\sqrt[3]{1}$; 6) $\sqrt[3]{-8}$.

2656. Найти все значения корня и изобразить их в виде векторов:

1) $\sqrt[4]{1}$; 2) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

§ 48. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ К РЕШЕНИЮ ДВУЧЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Решить следующие двучленные уравнения:

2657. 1) $x^3-8=0$; 2) $8x^3-27=0$;
3) $2x^3-5=0$; 4) $ax^3-b=0$, $a>0$, $b>0$.

2658. 1) $x^3+125=0$; 2) $27x^3+1=0$;
3) $3x^3+7=0$; 4) $ax^3+b=0$, $a>0$, $b>0$.

2659. 1) $x^4-16=0$; 2) $16x^4=9$;
3) $5x^4-7=0$; 4) $ax^4-b=0$, $a>0$, $b>0$.

2660. 1) $x^4+81=0$; 2) $625x^4+4=0$;
3) $2x^4+3=0$; 4) $ax^4+b=0$, $a>0$, $b>0$.

2661. 1) $x^6-64=0$; 2) $ax^6-b=0$, $a>0$, $b>0$;
3) $x^6+729=0$; 4) $ax^6+b=0$, $a>0$, $b>0$.

2662. Найти все значения корня $\sqrt[6]{1}$ и изобразить их в виде векторов на координатной плоскости.

2663. Решить уравнение $x^6-9x^3+8=0$, полагая $x^3=z$. Корни уравнения изобразить в виде векторов на координатной плоскости.

Решить уравнения.

2664. 1) $x^6-28x^3+27=0$; 2) $8x^6-65x^3+8=0$;
3) $x^8-3x^4-208=0$; 4) $x^8-17x^4+16=0$.

2665. 1) $(2x-5)^2+3(2x-5)-4=0$;
2) $(x-\sqrt{2})^4-11(x-\sqrt{2})^2+18=0$;
3) $(2x-5{,}5)^4-1{,}5(2x-5{,}5)^2-1=0$;
4) $(2x+3)^6-9(2x+3)^3+8=0$.

2666. 1) $x^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}=6$; 2) $2\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}=9$;
3) $2x\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x^2}=20$; 4) $6x-5x^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}+2=0$.

2667. Имеют ли корни следующие уравнения:

1) $3x-5=0$ в области натуральных чисел;
2) $2x+6=0$ в области положительных чисел;
3) $x^2-3=0$ в области рациональных чисел;
4) $x^2+4=0$ в области действительных чисел?

2668. Имеют ли корни в области действительных чисел следующие функции:

1) x^2+x+1; 2) $x^2-4x+13$?

Разложить на множители следующие целые рациональные функции:

2669. 1) x^3-2x^2-5x+6; 2) $8x^3-14x^2-7x+6$;
3) $x^3-(a+b+1)x^2+(a+b+ab)x-ab$.

2670. 1) $x^4+2x^3-5x^2-5x$; 2) $x^4+x^3-13x^2-x+12$;
3) $x^4-8x+63$; 4) $x^4-5x^2+4x+30$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

2671. Написать два комплексных числа, обладающих тем свойством, что их сумма и произведение — действительные числа.

2672. Доказать, что произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма квадратов двух целых чисел, есть опять сумма квадратов двух целых чисел.

2673. Найти наименьшее целое положительное число n, для которого

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=1.$$

2674. Выполнить указанные действия:

1) $\dfrac{1+ai}{1-ai}-\dfrac{1-ai}{1+ai}$;

2) $\dfrac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-i\sqrt{1-a}}-\dfrac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}$;

3) $\sqrt{\dfrac{a-x}{x}}:\left(\dfrac{\sqrt{a}-i\sqrt{x-a}}{\sqrt{a}+i\sqrt{x-a}}-\dfrac{\sqrt{a}+i\sqrt{x-a}}{\sqrt{a}-i\sqrt{x-a}}\right)$;

4) $\left[\dfrac{(m-n)^{\frac{1}{2}}-in^{\frac{1}{2}}}{(m-n)^{\frac{1}{2}}+in^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(m-n)^{\frac{1}{2}}+in^{\frac{1}{2}}}{(m-n)^{\frac{1}{2}}-in^{\frac{1}{2}}}\right]:\dfrac{2(n-m)^{\frac{1}{2}}}{m}$.

2675. Найти модуль комплексного числа:

1) $\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; 2) $\left(\dfrac{2}{1-i\sqrt{3}}\right)^{24}$

3) $(1+i)^6+6$; 4) $\dfrac{(1+i)^7}{2(1-i)}+3i$.

2676. Найти значения следующих выражений:

1) z^4 при $z=\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; 2) $\dfrac{z^2+1}{z+i}$ при $z=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$;

3) $\dfrac{z^4+z^2+1}{z^2+z+1}$ при $z=1-i$;

4) $(z^2-z\sqrt{2}+1)(z^2+z\sqrt{2}+1)$ при $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

2677. Вычислить:

1) $\dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^4}+\dfrac{i-2}{24-7i}\cdot(1+2i)^3$;

2) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3+i^6-1}{(1+i)^6}$;

3) $\left(\dfrac{4+3i}{1+3i}+\dfrac{3-4i}{3-i}\right)\cdot(3+4i)\cdot 0{,}1$;

4) $\left(\dfrac{1-\sqrt{-1}}{2+\sqrt{-1}}-\dfrac{4+\sqrt{-4}}{2-\sqrt{-4}}+\dfrac{9-\sqrt{-9}}{3+\sqrt{-9}}\right)$. $(1{,}4+8{,}2i)$.

2678. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее одним из корней выражение:

1) $\dfrac{1}{2+i\sqrt{5}}$; 2) $\dfrac{5+i\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}}$.

2679. Составить биквадратное уравнение с рациональными коэффициентами по двум его корням: $\sqrt{2}$ и $3i$.

2680. Проверить, что:

1) $x_1=3+4i$ и $x_2=3-4i$ есть корни уравнения $x^2-6x+25=0$;

2) $x_1=3-\dfrac{i}{2}$ и $x_2=3+\dfrac{i}{2}$ есть корни уравнения $4x^2-24x+37=0$.

2681. Решить следующие уравнения:

1) $x^2-2xi-5=0$; 2) $3x^2+(i-5)x+4=0$;

3) $2x^2-(5-i)x+3+i=0$;

4) $(1-i)x^2+(2-i)x+2+i=0$.

2682. Найти x и y из уравнения:

1) $\dfrac{8i}{x}+iy-2=7i-\dfrac{10}{x}+y$;

2) $(4x-3yi)\cdot(x+2yi)=42-15i$.

2683. Даны комплексные числа:

$z_1=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$; $z_2=3\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$;

$z_3=\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}$; $z_4=2\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

Выполнить следующие действия:

1) $z_1\cdot z_2$; 2) $z_2\cdot z_3$; 3) $z_3:z_4$; 4) $z_2:z_3$.

2684. Найти модуль комплексного числа $(1+i)^5$.

2685. Определить седьмой член разложения $\left(i^3+i\sqrt{2}\right)^m$, если сумма биномиальных коэффициентов третьего и предпоследнего членов разложения равна 66.

2686. Найти сумму тех членов разложения $(x+i)^7$, которые не содержат i.

2687. Изобразить в координатной плоскости вектором скорость движения точки, если числовое значение скорости $v=1$ *м/сек* и направлена она по лучу, составляющему с положительным направлением оси x угол $\varphi=\frac{2}{3}\pi$. Каким комплексным числом определяется вектор скорости.

2688. Скорость самолета относительно неподвижного воздуха определяется комплексным числом $100\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, а скорость ветра — $10\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Найти графически и алгебраически скорость движения самолета во время ветра.

2689. Доказать, что если три точки плоскости, которым соответствуют комплексные числа z_1, z_2, z_3, лежат на одной прямой, то отношение $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_2}$ есть действительное число.

Задачи для контрольных работ

2690. 1) Произвести указанные действия:

$$\left(\frac{5i}{1+2i}-\frac{i}{2-4i}+\frac{1}{i}\right)\cdot\frac{11{,}1-1{,}7i}{5-i}.$$

2) Найти модуль комплексного числа

$$\frac{10-\sqrt{-5}}{10+\sqrt{-5}}.$$

3) Решить уравнение $(3-2i)x+(4+3i)y=14+2i$, полагая, что x и y — вещественные числа.

2691. 1) Произвести указанные действия:

$$\left(\frac{3i}{2+2i}-\frac{2i}{1-i}-\frac{1}{i}\right)\cdot\frac{152-32i}{5+i}.$$

2) Составить квадратное уравнение, корни которого

$$x_1=3+2i \quad \text{и} \quad x_2=3i.$$

3) Найти геометрическое место точек координатной плоскости, модуль которых равен 2.

92. 1) Вычислить

$$\frac{16{,}9\,(1+i)^5}{(1-i)^5}\cdot\left(\frac{5-i}{2+3i}-\frac{1-5i}{3+2i}\right).$$

2) Доказать, что квадраты двух сопряженных комплексных чисел являются комплексными сопряженными числами.

3) Записать в тригонометрической форме комплексное число $1-i\sqrt{3}$ и построить его геометрическое изображение.

4) Решить уравнение $x^3-64=0$.

2693. 1) Вычислить

$$\frac{(2+i)^3+5i^5-2}{(1-i)^6-(1+i)^6}.$$

2) Какое число надо возвести в квадрат, чтобы получить $2i$?

3) Дано комплексное число $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. Записать в алгебраической форме число, сопряженное данному, и построить его геометрическое изображение.

4) Найти все значения корня $\sqrt[4]{625}$ и изобразить их в виде векторов.

13

ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ КУРСА «АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ»

2694. Измерили комнату трехметровой рулеткой, которая от употребления растянулась и стала длиннее на 3 *см*. Длина комнаты получилась равной 5 *м*. Какова действительная длина комнаты?

2695. Двое путников идут один за другим вдоль железнодорожного полотна. Поезд нагоняет человека, идущего сзади, и проходит мимо него за 10 *сек*. Двадцать минут спустя поезд догоняет второго путника и проходит мимо него за 9 *сек*. Через сколько времени после того, как поезд перегнал второго путника, первый пешеход догонит второго? (Все скорости считать постоянными.)

2696. Пассажир едет в поезде, который идет со скоростью 40 *км/ч*, и видит, что мимо окна в противоположном направлении в течение 3 *сек* проходит встречный поезд, имеющий длину 75 *м*. Какова скорость встречного поезда?

2697. Ученик купил 4 книги. Все книги без первой стоят 42 коп., без второй — 40 коп., без третьей — 38 коп., без четвертой — 36 коп. Сколько стоят все книги?

2698. На участке трамвайного пути длиной 1 *км* пешеход, проходящий его за 12 *мин*, ежедневно подсчитывал число трамваев, обгонявших его и идущих навстречу. В течение месяца первых оказалось 45, а вторых 120. Определить скорость трамваев.

2699. Для углубления фарватера при входе в гавань работали три разных землечерпалки. Если бы действовала только первая из них, то на работу потребовалось бы на 10 дней больше времени; если бы работала только вторая, то работа затянулась бы на 20 лишних дней. Работа одной лишь третьей землечерпалки продолжалась бы в 6 раз больше, чем при одновременном действии всех трех машин. Сколько времени потребуется для выполнения всей работы каждой землечерпалкой в отдельности?

2700. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу — первый из A, второй из B — и встретились через 3 *ч*. За сколько времени прошел расстояние AB каждый из них, если первый пришел в B на $2\frac{1}{2}$ *г* позже, чем второй пришел в A?

701. Три парохода совершают рейс между пристанями A и B. Первый пароход проходит в час на 3 *км* больше, чем второй, и весь рейс совершает на 2 *ч* быстрее второго. Второй пароход проходит в час на 3 *км* больше, чем третий, и весь рейс совершает на 3 *ч* быстрее третьего. Определить скорость третьего парохода и расстояние между A и B.

702*. Три положительных числа составляют геометрическую прогрессию. Если ко второму числу прибавить 4, эти числа составят арифметическую прогрессию. Если после этого к третьему числу прибавить 32, полученные числа вновь составят геометрическую прогрессию. Найти эти три числа.

703*. Логарифмы четырех чисел при основании 2 образуют арифметическую прогрессию, у которой произведение крайних членов равно —8, а произведение средних равно 0. Найти эти числа.

2704*. Найти все двузначные числа, каждое из которых на 9 больше суммы квадратов его цифр.

2705. 1) Решить уравнение в целых числах:

$$xy-10(x+y)=1.$$

2) Ста абитуриентам роздали 480 листов бумаги, причем каждой девушке дали на два листа больше, чем юноше. Сколько было на приемных экзаменах юношей и девушек?

706. Доказать, что при любом n число $5^{2n}-1$ делится на 6.

707. Доказать, что при любом целом значении x числовая величина выражения $x^4+2x^3-x^2-2x$ кратна 24.

2708. На столе лежат книги, которые нужно упаковать. Если их связывать по 4, по 5 или по 6 в пачку, то каждый раз остается одна лишняя книга, а если связывать по 7 книг в пачку, то лишних книг не останется. Сколько книг могло быть на столе?

2709*. Если $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ и $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Доказать.

2710. Решить уравнения:

1) $(x^2-5x)^2+11x^2-5(11x-6)=0$;

2) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=24$;

3) $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$;

4) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=4\frac{4}{9}$.

2711. Доказать неравенство $3^{\frac{1}{1966}}+3^{-\frac{1}{1966}}>2$.

2712. Найти точки пересечения линий:

1) прямой $2x-y-4=0$ и параболы $y=\frac{2}{3}x^2-2x+2$;

2) прямой $2x-3y-3=0$ и гиперболы $xy=3$;

3) параболы $y=2x^2-3x-2$ с параболой $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-4\frac{1}{2}$.

2713. Решить графически систему уравнений:

$$\begin{cases} y=x^4-2x^2+1, \\ 2x-y=-1. \end{cases}$$

2714. Показать графически, что система

$$\begin{cases} x^4-y+2=0, \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

не имеет ни одного действительного решения.

2715. Решить системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases} |x-3|+|y-4|=1, \\ y-|x-3|=4; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 2|x|+3y-12=0, \\ 3x-|y|+11=0; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x^2+xy+xz+yz=3, \\ y^2+xy+xz+yz=8, \\ z^2+xy+xz+yz=24; \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} 1-x_1\cdot x_2=0, \\ 1-x_2\cdot x_3=0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 1-x_{14}\cdot x_{15}=0, \\ 1-x_{15}\cdot x_1=0. \end{cases}$$

2716. Вычислить с точностью до 0,01 корни уравнения

$$x^2-(\sqrt{2}+3)x+3\sqrt{2}=0.$$

2717. При каком значении m сумма квадратов корней уравнения $x^2+(m-2)x-(m+3)=0$ будет наименьшей?

2718. Из всех трапеций, вписанных в полуокружность радиуса R и имеющих большим основанием диаметр, найти ту, у которой периметр наибольший.

2719. Даны два уравнения:

$$x^2+ax+1=0 \text{ и } x^2+x+a=0.$$

Найти значение a, при котором эти уравнения имеют хотя бы один общий корень.

2720*. Решить уравнение $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{3x}{x^2-8x+15}$.

2721. Исключить x и y из уравнений:

$$x+y=a, \quad x^2+y^2=b, \quad x^3+y^3=c.$$

2722. При каких значениях a система

$$\begin{cases} 3ax-(a-2)y=24, \\ 2x+5y=3 \end{cases}$$

имеет $x=4$? Чему равен в этом случае y? Построить соответствующие этому случаю графики уравнений.

2723. Решить следующие уравнения, где x — неизвестное, a — действительное число:

1) $(x^2-a)^2-6x^2+4x+2a=0$;

2) $a^2+(24-2x^2)a+x^4-25x^2+144=0$;

3) $a^2+2x(1-x)a+x^4-2x^3-8x^2=0$.

2724. Упростить следующие выражения:

1) $$\frac{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}+\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}}{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}-\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}};$$

2) $$\left[\frac{a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}{a^{-1}-b^{-1}}-\frac{1}{a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}}\right]:\frac{a^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}.$$

Решить уравнения.

2725. 1) $\frac{1-\sqrt{x}}{2}-\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}=4$;

2) $\frac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}+\frac{3}{x}=\frac{4}{x+\sqrt{x^2-x}}$.

2726. 1) $9\cdot 5^{x+1}-5^x-5500=0$; 2) $5\cdot 49^{3x}-2\cdot 7^{3x}-3=0$;

3) $4^x-3^{x-0,5}=3^{x+0,5}-2^{2x-1}$.

2727. 1) $\frac{2}{1+\lg x}-1=-\frac{1}{5-\lg x}$; 2) $\lg^2(10x)+\frac{1}{\log_x 10}=5$;

3) $\log_2\left(9^{x-1}+7\right)=2+\log_2\left(3^{x-1}+1\right)$.

2728. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\log_x y+\log_y x=2{,}5,\\ \log_6(x^2+y^2)=1.\end{cases}$$

2729. Вычислить $16^{1-\frac{1}{2}\log_4 7}$.

2730. Доказать, что наибольшие значения функций $(\log_2 3)^{\sin x}$ и $(\log_3 2)^{\cos x}$ равны.

2731*. Дано: $\log_{14}7=a$, $\log_{14}5=b$. Найти $\log_{35}28$.

2732. Вычислить:

1) $\sqrt{1+\sqrt[5]{\lg 25}}$; 2) $17{,}24+\sqrt[3]{\lg\sin\frac{\pi}{4}-\sqrt[3]{\lg\sin\frac{\pi}{6}}}$;

3) $\lg\cos\frac{\pi}{6}+\sqrt{1+\lg\left(\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\right)}$;

4) $\left(1+\sqrt[3]{\lg\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}$.

2733*. Решить уравнения:

1) $\lg^2(ax)+\lg^2(bx)+\lg^2(cx)=\lg^2 a+\lg^2 b+\lg^2 c;$
$$a>0,\ b>0,\ c>0;$$

2) $2^{0,5\cos x}=\sqrt{2}^{\frac{\sin 31^\circ}{\sin x}};$ 3) $5^{\lg\sin x}=0,2^{-\sin x}.$

2734. Проверить, что:

1) $x_1=1+i$ и $x_2=2+i$ есть корни уравнения
$$x^2-(3+2i)x+(1+3i)=0;$$

2) $x_1=\dfrac{3-i}{1+i}$ и $x_2=1+i$ есть корни уравнения
$$(1+i)x^2-(3+i)x+4+2i=0.$$

2735. Если $z=a+bi$, то где лежат точки, для которых:

1) а) $|z|<1;$ б) $|z|>1;$ в) $1<|z|<2;$ г) $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right|\leqslant 1;$

2) а) $a<1;$ б) $a=1;$ в) $a>1;$

3) а) $b<1;$ б) $b=1;$ в) $b>1;$

4) а) $\arg z=-\dfrac{\pi}{4};$ б) $\arg z=\dfrac{\pi}{2};$ в) $\arg z=\pi.$

2736. Точка $x+yi$ движется по окружности, у которой радиус 1, а центр в начале координат. По какому пути движется точка, изображающая сопряженное число?

2737. Решить графически следующие неравенства:

1) $\dfrac{1}{x}<|x|;$ 2) $|x-3|<4.$

2738. Построить графики функций:

1) $y=2^{|x|};$ 2) $|y|=\sin x;$ 3) $|y|=x;$ 4) $y=\dfrac{1}{x+2}+2;$

5) $y=\dfrac{1}{(x+2)^2};$ 6) $y=|3-x^2|;$ 7) $|x|+|y|=1.$

2739. Чем отличается график функции $y=2^{\log_2(x-1)}$ от графика функции $y=x-1$?

2740. Найти наименьшее значение функции $y=\dfrac{1+x^4}{(1+x^2)^2}.$

2741. Доказать неравенство
$$\sin^6 x+\cos^6 x\geqslant\frac{1}{4}.$$

2742. Вычислить без таблиц $\cos\dfrac{\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{7}.$

2743. Показать, что:

1) если $\sin(2\alpha+\beta)=2\sin\beta$, то $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=3\operatorname{tg}\alpha$;

2) если $\sin(\alpha+\beta)=1$ и $\sin(\alpha-\beta)=0{,}5$, где α и β — углы первой четверти, то $\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)=-\sqrt{3}$.

2744. Исключить α и β из системы равенств:

$$1)\ \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=a, \\ \operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=b, \\ \alpha+\beta=x; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} a\sin^2\alpha+b\cos^2\alpha=1, \\ a\cos^2\beta+b\sin^2\beta=1, \\ a\cdot\operatorname{tg}\alpha=b\cdot\operatorname{tg}\beta, \end{cases}$$

где $0<b<1$, $a>1$.

2745. Доказать, что величина выражения $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha}$ не зависит от величины угла α.

2746. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, то:

1) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha=1$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma$.

2747. Пользуясь символами $\arcsin m$, $\arccos m$, $\operatorname{arctg} m$ и $\operatorname{arcctg} m$, выразить: 1) острые углы A и B прямоугольного треугольника ABC через его катеты a и b; 2) углы ромба $ABCD$ через его сторону a и диагонали d_1 и d_2.

2748. Для каких обратных тригонометрических функций главное значение ее совпадает с наименьшим по абсолютной величине значением функции, с наименьшим положительным значением функции?

2749. Вычислить: 1) $\sin(2\arcsin 0{,}96)$; 2) $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

2750*. Дано: $\dfrac{\cos 3\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{39}{41}$. Найти 1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$.

2751. Доказать тождества:

1) $16\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 60^\circ\cdot\sin 80^\circ=3$;

2) $\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\cos 8\alpha\cdot\cos 16\alpha=\dfrac{\sin 32\alpha}{32\sin\alpha}$.

2752. Найти наименьшее положительное значение функции:

1) $y=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$; 2) $y=\dfrac{3-\cos x}{\sin x}$, $0^\circ<x<90^\circ$.

2753. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

$$\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+\ldots+2^{n-1}\operatorname{tg}2^{n-1}\alpha+2^n\operatorname{ctg}2^n\alpha.$$

2754. Найти:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{x}$.

2755. Дана функция $f(x)=\frac{x-1}{3+2x}$. Найти $f\left(\frac{1}{x}\right)$ и $\frac{1}{f(x)}$.

2756. Найти $f'(2)$, если $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x$.

2757. Найти $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если $f(x)=5\sin x+3\cos x$.

2758. Дана функция $y=x^2-4x+3$.

1) Построить график данной функции.

2) Найти угол, образуемый касательной к кривой в точке, абсцисса которой равна: а) 1,5; б) 2; в) 2,5.

3) Под каким углом данная кривая пересекает ось абсцисс?

2759. Определить угол наклона синусоиды $y=\sin x$ к оси абсцисс в начале координат.

2760. Найти уравнение касательной к кривой $y=\sqrt{25-x^2}$ в точке $M(-3;\ 4)$.

2761. На параболе $y=x^2+4x+2$ найти такую точку, в которой ордината возрастает вдвое быстрее, чем абсцисса.

2762. Точка движется по прямой по закону $s=f(t)=\frac{1}{3}t^3-t^2-t+1$, где s — путь в метрах, t — время в секундах.

Определить скорость и ускорение движения точки в конце четвертой секунды.

2763. Тело, падающее свободно из состояния покоя в пустоте, проходит путь $s=\frac{gt^2}{2}$, где g — ускорение силы тяжести, t — время движения. Вывести закон изменения скорости при свободном падении, зная, что к моменту падения тело находилось в начале отсчета.

2764. Количество тепла Q, необходимое для нагревания 1 *кг* железа от 0 до $t°$ C, определяется по формуле

$$Q=f(t)=0{,}1053\,t+0{,}000071\,t^2.$$

Найти теплоемкость железа при 20° C.

2765. Из орудия вертикально вверх со скоростью 245 *м/сек* выпущен снаряд. Найти время подъема снаряда на наибольшую высоту.

2766. Определить наибольшую площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 10 *см*.

2767. Найти наибольшую длину бревна MN, которое можно сплавить из канала шириной a в канал шириной b (рис. 77). Стенки канала прямолинейны и отходят друг от друга под прямым углом.

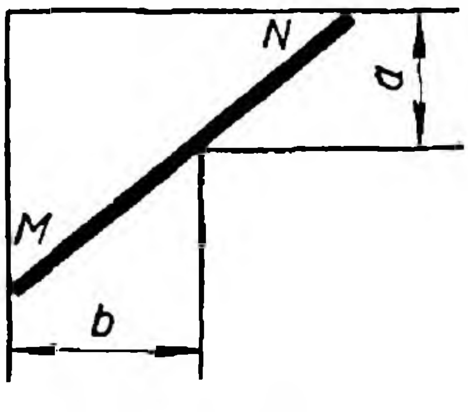


Рис. 77

2768. Даны две параллельные прямые и точка A между ними, лежащая на расстоянии a от одной прямой и на расстоянии b от другой. Точка A служит вершиной прямоугольного треугольника, две другие вершины которого лежат на параллельных прямых. В каком случае треугольник имеет наименьшую площадь?

2769. Из 8 шаров, на вид совершенно одинаковых, один весит чуть меньше остальных. Как двумя взвешиваниями без гирь определить более легкий шар?

2770. За границу выехала группа туристов из 100 человек. 10 из них не знали ни немецкого, ни французского языков. 75 человек знали немецкий язык, а 83 — французский. Сколько туристов владело обоими языками?

2771. В одной семье четверо детей: 5, 8, 13 и 15 лет. Зовут их Аня, Боря, Вера, Галя. Узнать, сколько лет каждому из них, если известно, что: 1) одна из девочек ходит в детский сад; 2) Аня старше Бори; 3) сумма лет Ани и Веры делится на 3.

2772. В 500 ящиках лежат яблоки. Известно, что ящик может вместить не более 240 яблок. Доказать, что по крайней мере три ящика содержат по одинаковому числу яблок.

2773. Показать, что функция

$$(1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{99}+x^{100})\times$$
$$\times(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{99}+x^{100})$$

является четной.

2774*. Замечено, что среднее арифметическое k первых цифр числа π стремится при возрастании числа k к числу 4,5. Доказать, что при этом число десять минус π также обладает этим свойством.

2775. Сколькими нулями оканчивается число, равное произведению $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot100$?

2776. Найти a, b и c, если $\overline{abc}_{(5)}=\overline{cba}_{(8)}$.

2777*. Доказать, что если сумма синусов углов треугольника превышает сумму косинусов его углов на 1, то этот треугольник прямоугольный.

2778. Найти остаток от деления числа $69\,133^{1966}$ на 7.

2779. При каких действительных x три числа $\lg 2$, $\lg(2^x-1)$, $\lg(2^x+3)$, взятые в указанном порядке, составляют арифметическую прогрессию?

2780. Доказать, что если $p\geqslant5$ — простое число, то p^2-1 делится на 24.

2781. Доказать, что число n^4+4 при любом целом n является составным.

2782. В шестизначном числе первая цифра совпадает с четвертой, вторая — с пятой, третья — с шестой. Показать, что это число делится на 7, 11 и 13.

2783. Решить в целых числах уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$, где p — простое число.

2784. Найти α и m, если числа $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ являются корнями уравнения $x^2+mx-0{,}18=0$.

2785. Показать, что выражение $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+10$ положительно при всех значениях x. Найти наименьшее значение этого многочлена.

2786. Доказать, что если между цифрами числа 1331 написать по равному количеству нулей, то получится точный куб.

2787. Доказать, что разность двух чисел $\underbrace{111\ldots1}_{2n}-\underbrace{222\ldots2}_{n}$ есть полный квадрат.

2788. Некоторые из 15 листов бумаги разрезали на 10 частей, затем некоторые из полученных листов разрезали еще на 10 частей и т. д. Когда подсчитали общее число получившихся листов бумаги, то оказалось их 1965. Доказать, что подсчет произведен неправильно.

Задачи для контрольных работ

2789. 1) Через электрическую плитку мощностью 436 *вт*, включенную в сеть, проходит ток на 1 *а* меньший, чем через утюг мощностью 375 *вт*, включенный в другую сеть, где напряжение на 93 *в* ниже. Определить ток, проходящий через каждый электрический прибор.

2) Доказать тождество

$$\left[\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right]\times$$

$$\times\left[\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{1}{x}\right]=-1 \text{ при } 0<x<1.$$

3) Решить уравнение

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x}=(\operatorname{ctg} x)^{\cos x}.$$

4) Найти предел

$$\lim_{\alpha\to\pi}\frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

2790. 1) Производительность станка A в m раз меньше производительности станков B и C вместе. Производительность станка B в n раз меньше суммарной производительности станков A и C. Узнать, во сколько раз производительность станка C меньше производительности станков A и B вместе.

2) Вычислить без таблиц выражение

$$\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}+\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{12}+\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{12}.$$

3) Найти функцию, обратную данной $y=2^x+1$, и указать область ее существования.

4) Найти предел

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}.$$

2791. 1) Стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию, разность которой равна 2 *см*. Площадь треугольника 6 *см*^{2}. Найти стороны треугольника.

2) Решить уравнение

$$\log_3(3^x-1)\cdot\log_3(3^{x+1}-3)=6.$$

3) Доказать, что при любых положительных a и b и любом натуральном n справедливо неравенство

$$(a+b)^n<2^n(a^n+b^n).$$

4) Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-8x}{2x+1}.$$

2792. 1) Найти четыре целых числа так, чтобы они составляли арифметическую прогрессию и чтобы наибольшее из них равнялось сумме квадратов остальных.

2) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2,\\ xy+yz+xz=47,\\ (z-x)(z-y)=2.\end{cases}$$

3) Доказать, что $\operatorname{tg}142^\circ30'=2+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

4) Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+1}}{3n-1}.$$

2793. 1) Из полного бака, содержащего 729 *л* кислоты, отлили a *л* и долили бак водой. После полного перемешивания (до получения однородного раствора) из бака опять отлили a *л* раствора, снова долили бак водой и тщательно перемешали. После того как такая операция была повторена шесть раз, раствор содержал 64 *л* кислоты. Определить величину a.

2) Доказать, что если $\frac{1-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ac}=0$, то $a=b=c$.

3) Показать, что выражение $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}$, в котором $x=\cos\alpha+i\sin\alpha$, равно

$$\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{n-1}{2}\alpha+i\sin\frac{n-1}{2}\alpha\right).$$

4) Дано: $f(x)=\frac{1}{2x^2}-x^3$. Вычислить $f'(1)-f'(-1)$.

2794. 1) Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B. Каждый идет с постоянной скоростью без остановок и, придя в конечный пункт, немедленно поворачивает обратно. Когда они встретились во второй раз, то оказалось, что первый пешеход прошел на 4 *км* больше, чем второй. Продолжая идти дальше, первый пешеход прибыл в A через 1 *ч* после второй встречи, а второй — в B через 2,5 *ч* после этой встречи. Определить скорость первого пешехода.

2) Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)} < 1.$$

3) Найти сумму x^3+x^{-3}, если $x+x^{-1}=P$.

4) Дано: $f(x)=(1+\sqrt{x})^2$. Вычислить $100\,f'(100)$.

2795. 1) Имеются два сплава золота и серебра: в первом количество этих металлов находится в отношении 2 : 3, во втором — в отношении 3 : 7. Сколько необходимо взять каждого сплава, чтобы получить 8 *кг* нового сплава, в котором количество золота и серебра были бы в отношении 5 : 11?

2) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_x 3-\frac{5}{2}$.

3) Доказать, что $\frac{n^5-5n^3+4n}{n+2}$ делится на 24, где n — натуральное число.

4) Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса, равного 9 *см*.

2796. 1) Часы A и B идут быстрее нормальных, однако в данный момент часы A и B показывают меньше времени, чем нормальные часы: A — на 2 *мин*, а B — на 3 *мин*. Определить, на сколько минут в сутки спешат часы A, если известно, что часы B уходят за сутки на 0,5 *мин* больше, чем часы A, а верное время покажут на сутки раньше их.

2) Вычислить сумму

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}.$$

3) Число $\overline{aabb}$, где a и b — цифры, есть точный квадрат. Найти это число.

4) В прямоугольный треугольник с углом в 30° и гипотенузой 10 *см* вписан прямоугольник, основание которого расположено на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

ОТВЕТЫ

I. Задачи и упражнения для повторения курса V—VIII классов

1. 1) Уменьшить на 80; 2) уменьшить на 126. **2.** Нельзя. **3.** 1) Нечетным; 2) четным. **4.** 1) Увеличить на 37; 2) увеличить на 18. **5.** 1) Увеличится в 5 раз; 2) увеличится на число, равное утроенному второму сомножителю; 3) уменьшится на число, равное второму сомножителю. **6.** Частное увеличится на 1, остаток не изменится. **8.** 2) 43; 4) 0,14; 6) $\frac{11}{252}$; 8) 9,9. **9.** 523 152 и 523 656. **10.** Да. **11.** $\frac{1}{4}$. **14.** 1) 3; 2) $10\frac{3}{5}$; 3) 10 000; 4) $3\frac{5}{7}$. **15.** 225 *м*; 54 *км/ч*. **16.** 300 *км*. **17.** 630 вагонов. **18.** 21 эшелон. **19.** 47,48 руб.; 0,49 %. **20.** 0,2 *Г/см*^{3}; 2,6%. **21.** 1) 17,8; 2) 11,80; 3) 0,4; 4) 18,28; 5) 3,95; 6) 1,6; 7) 1,9; 8) 0,39; 9) 0,0264; 10) 4,8. **22.** ~ 79,1 *кв. м*; ~ 475 *кв. м*; ~ 237 *кв. м*. **23.** 1) 3,49; 9,31; 3,35; 14,29; 2,30; 1,40; 0,0000260; 2) 1,35; 1,59; 2,71; 4,30; 224; 0,0640; 2,71; 3) 3,36; 5,13; 16,3; 6,28; 4) 127; 0,297; 0,0419; 1,60; 1,96; 40,5. **24.** 1) 73,8 *см*; 2) 12,7 *см*; 3) 0,402 *м*; 4) 0,654 *м*. **25.** 40,7 *кГ*. **26.** 1) 1,70; 2) 18,3; 3) 0,164; 4) 1,15; 5) 11,0; 6) 0,056. **27.** $x_1 = 6{,}57$; $x_3 = 0{,}90$. **28.** 3) 4,88; 0,537; 0,942; 0,524. **29.** 1) 4,16 *см*^{2}; 2) 0,0515 *м*^{2}, 3) 3300 *см*^{2}; 4) 177 *см*^{2}. **30.** 1,131; 2,65; 0,0775; 0,245; 0,775; 1,77; 2) 1,41; 3,02; 16,0; 18,7; 1,47; 3) 0,124; 70,7; 1,67.

34. Противоположные: 1) 1; 2) —0,1; 3) $b - a$; 4) $-\frac{a}{b}$; обратные: 1) —1; 2) 10; 3) $\frac{1}{a-b}$; 4) $\frac{b}{a}$. **35.** $2(a-b)$. **36.** $-a < 0$, если $a > 0$; $-a > 0$, если $a < 0$. **37.** Нет. $x + y = 0$, если x и y — противоположные числа. **38.** 1) $a = b = 0$; a и b — противоположные числа; 2) $a = 0$ или $b = 0$; 3) $a = 0$; $b \neq 0$; 4) a и b — противоположные числа; 5) при $b = 1$ или при $a = 0$. **39.** 1) $a > -a$, если $a > 0$; $a < -a$, если $a < 0$; 2) $a > 2a$, если $a < 0$; 3) $a > \frac{1}{a}$, если $a > 1$ и $-1 < a < 0$; $a < \frac{1}{a}$, если $0 < a < 1$ и $a < -1$. **40.** 1,а) Может, если $b < 0$; б) может, если $b = 0$; 2) $-m$. **41.** 2) $-1\frac{7}{9}$; $1\frac{7}{9}$; $2\frac{10}{27}$; $2\frac{10}{27}$; 3,а) 0; б) любое число; в) 0 и 1; г) 0 и —1. **42.** 3) 1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9, 0; 4,а) 28; б) 57; в) 83; г) 62. **44.** 1) 2; 2) 0; 3) 2; 4) 16. **45.** 1) 0 при $a = 0$; 2) 0 при $a = 1$; 3) 0 при $a = -5$; 4) не существует. **46.** 1. **47.** 1) 100; 2) 6500. **48.** 1) —2; $\frac{1}{2}$; 2) —2,5; 1; 3) —1; $-\frac{1}{2}$. **49.** 1) 3; 2) —5; 3) 2,5; 4) $1\frac{2}{3}$; 5) —1; 6) 3; 4.

51. 1) Можно; 2) нельзя. 52. 2) $a \leqslant |a|$. 53. 1) 0 при $a \leqslant 0$; $2a$ при $a > 0$; 2) $2a$ при $a < 0$; 0 при $a \geqslant 0$; 3) -1 при $a < 0$; любое число при $a = 0$; 1 при $a > 0$.

56. Указание. Четырехзначное число $\overline{abab}$ представить в виде $1000a + 100b + 10a + b$. 57. 1) 3; 2) $1 - 3x$, если $x < -1$; $3 - x$, если $-1 \leqslant x < 0$; $x + 3$, если $0 \leqslant x < 2$; 3) 1, если $-2 < x < -1$; $-2x - 1$, если $-1 \leqslant x < 0$; $1 - 2x$, если $0 < x < 1$; -1, если $x \geqslant 1$. 59. 1) Да; 3) $3ab(a + b)$. 60. 1) $a = b$; 2) $a = 0$; $b = 0$; $a = b = 0$. 62. Указание. Рассмотреть квадраты натуральных чисел от 1 до 9. 64. 1,а) x^2; б) $3x^2 \pm x^3$. 65. 2) 40.

66. Указание. Представить данное выражение в виде: 1) $(a - b)^3$; 2) $a(a - 32) + 260$; 3) $(x - 1)^3 + 1$. 69. 25. 70. 2; при $a = 5$. 72. 1) $-\frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2b^2}$; 2) $(n + 1)^2$; 3) $x^4 + 4$; 4) $\frac{x - 2}{2}$; 5) $a^{2n} - a^nb^{2n} + b^{4n}$; 6) $a^2 - 3a + 3$. 73. 1) $2ab^2(3a + b)(3a - b)$; 2) $(2a + 2b - 1)(2a - 2b - 1)$. 74. 1) $(3a + b - 1)(3a - b + 1)$; 2) $(a - b)(a - b + 2)$. 75. 1) $(a + 1) \times \times (a + b)(1 - b)$; 2) $2ab(a + b)(a - b)$. 76. 1) $(x + 1)(x - 1)(x + a)(x - a)$; 2) $(x + 1)(x^2 - x + a)$. 77. 1) $(a + 1)(a - 1)(a^2 + 1)$; 2) $(2 - x^2) \times \times (4 + 2x^2 + x^4)$; 3) $(a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1)$; 4) $(a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$. 78. 1) Указание. $(x^2z + 2xyz + y^2z) + (x^2y + xy^2) + (xz^2 + yz^2) = (x + y)(x + z)(y + z)$; 2) $(x + y + z)(xy + xz + yz)$. 79. 1) Указание. $a^4 + a^2 + 1 = a^4 + 2a^2 + 1 - a^2 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$; 2) $(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$. 82. Указание. Найти значение c из условия $a + b + c = 0$ и подставить его в выражение $a^3 + b^3 + c^3$. 83. 1) $\frac{x - 3}{x + 4}$; 2) $\frac{a + 3}{a - 2}$; 3) $\frac{m - 5}{m + 5}$; 4) $\frac{2a + 3}{a - 2}$; 5) $\frac{a^{n-2} \cdot (a - 1)}{a + 2}$; 6) $a - 1$. 84. 1) $x + \frac{1}{x} = -4\frac{1}{60}$; 2) $1 - \frac{1}{a} = 101$. 85. 1) $-\frac{1}{2a}$; 2) $\frac{1}{a + b}$; 3) 2; 4) $\frac{x + 2}{2}$. 86. 1) $2a$; 2) 0. 87. 1) 1; 2) $\frac{1}{abc}$. 88. 1) $\frac{16a^{15}}{a^{16} - b^{16}}$. Указание. Сначала найти сумму первого и второго слагаемых; 2) $\frac{4}{x(x + 4)}$. 89. 1) 1; 2) $a + b + c$. Указание. Числитель и знаменатель умножить на abc. 90. Указание. Привести условие к виду $abc + a^2c + a^2b + b^2c + abc + ab^2 + bc^2 + ac^2 = 0$ и показать, что левая часть этого выражения тождественно равна произведению $(a + b)(a + c)(b + c)$. 91. Указание. Возвести в квадрат обе части равенства, данного в условии и применить свойство ряда равных отношений. 92. 1) $A = 1$; $B = 2$; 2) $A = 2$; $B = 1$.

93. -2. 94. $101\frac{2}{3}$; $\frac{3}{29}$. 95. 1) $4x^2 + 3x = 0$; 2) $x - 0{,}3 = 0$; 3) $6x^2 - 13x + 6 = 0$. 96. 1) $0x^2 = a$, $a \neq 0$; 2) $0x^2 = 0$. 97. Равносильны 1); неравносильны 2), 3), 4), 5). 99. Неравносильны.

101. 1) 5; 2) нет корней; 3) удовлетворяется произвольными значениями x; 4) 2; 5) нет корней. 106. 224 *м*. 107. 150 *км*. 108. 30 *км*. 109. 35 *км/ч*; 45 *км/ч*. 110. 150 *т*; 200 *т*. 111. ~ 39°,3 С. 112. ~ 890 *м*. 113. 2*л*. 114. $\frac{am}{m + n}$; $\frac{an}{m + n}$.

115. 1) 6; $\frac{2}{3}$; 2) 1,5; 2; 3) -2; 3; 4) 11; 6. 116. 1) -2; 2; 2) 1; 2. 119. 38 ваг.; 42 ваг. 120. 42. 121. 2 *км*; 15 *км*. 122. 3,3 *га*. 123. 18 *км/ч*; 2 *км/ч*.

124. 1) 0; $-2{,}5$; 2) $\pm 3{,}5$; 3) 0; 2,25. 125. 1) $-\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2}$; 2) 0; 2; 3) 0; 21; 4) -6; 1. 126. 1) $-1\frac{1}{8}$; 3; 2) 3. 127. 1) 32; 2) 8; 3) 3; 4) 1. 128. 1) $\sim -15{,}51$;

$\sim 14{,}51$; 2) $\sim -3{,}85$; $\sim -0{,}65$; 3) $\sim 0{,}30$; $\sim 0{,}61$; 4) $\sim -1{,}11$; $\sim 0{,}39$.
129. 6 *ч*; 14 *ч*. 130. 150 *км*; 50 *км*. 131. 20 *км/ч*. 132. 25 *км/ч*; 27,5 *км/ч*. 133. 150 *м*.

134. 3,а) $b = 0$; $a > 0$ (рис. 78); $b = 0$; $a < 0$ (рис. 79);

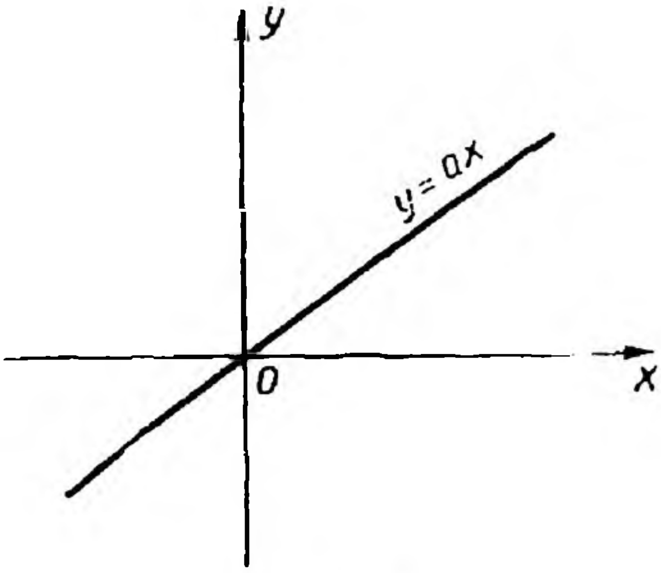


Рис. 78

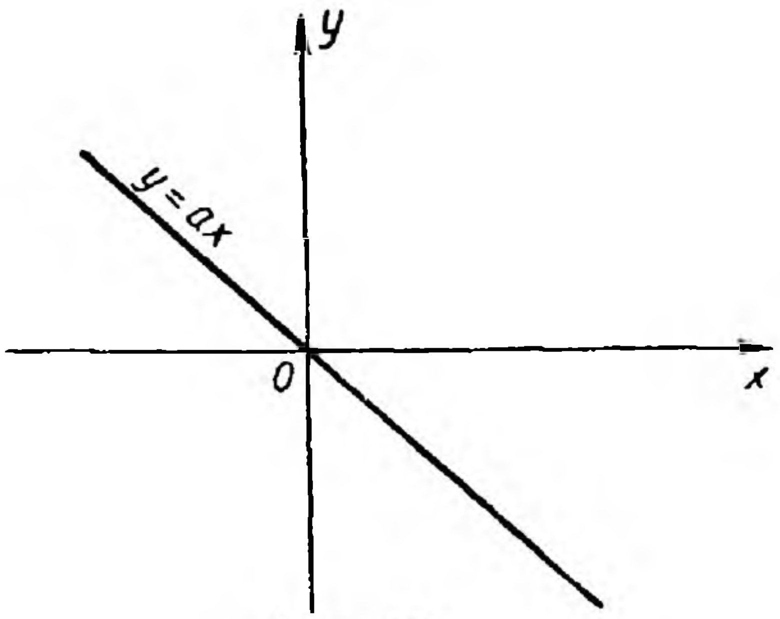


Рис. 79

б) $a = 0$; $b > 0$ (рис. 80); $a = 0$; $b < 0$ (рис. 81).

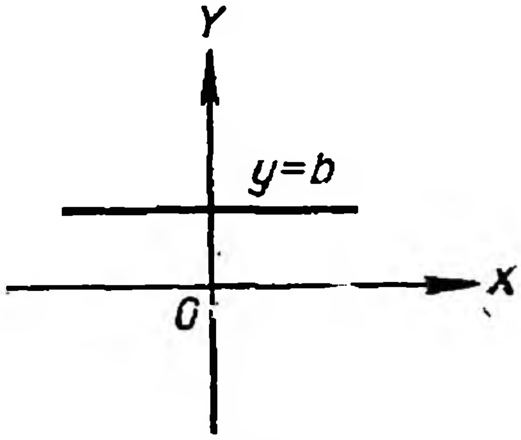


Рис. 80

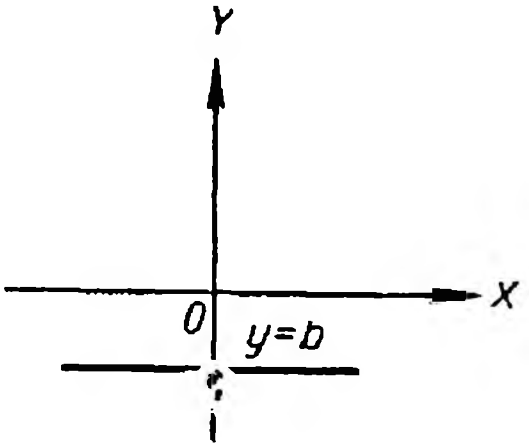


Рис. 81

136. 1) $y = -\frac{2}{5}x - 2$; 2) $y = -2x + 3$. 137. 3 кв. ед. 138. 1) $-\infty < x < +\infty$; $0 \leqslant y < +\infty$; 2) $y_{\text{наим}} = 0$ при $x = 0$. 4) График функции симметричен относительно оси ординат. 140. 1,а) $y = (x-3)^2-4$; б) $y = 2\times(x+1)^2-2$; в) $y = -\frac{1}{3}\left(x - 2\frac{1}{2}\right)^2 + 4\frac{1}{2}$. 142. 1) -1; 2; 2) -2; 1; 3) -1; 1; 4) $\sim -0{,}7$; 2.

150. 1. 156. 13,4 *см*. 157. 10,8 *см*.

II. Уравнения и неравенства первой степени

159. 2) Не имеет. 160. 1), 2), 3) и 4) нет корней; 5) $\frac{1}{2}$; 6) 0. 161. 1) -1; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) нет корней. 163. 1) $a \neq 1$; 2) $a = 1$. 164. 1) 1 и -2; 2) 2. 165. 1) 2,5; 2) 2. 166. 1) $a = m$, $b \neq n$; 2) $a = m$, $b = n$. 167. 1) $\frac{b - an}{n - 1}$; 2) нет корней; 3) удовлетворяется произвольными значениями x. 168. 1) $a + b$, если $a \neq b$; любое число, если $a = b$; 2) нет корней, если $a \neq 1$; любое число, кроме 1, если $a = 1$; 3) $2a - 3$, если $a \neq 1$; любое число, кроме ± 1, если $a = 1$; 0, если $a = 1{,}5$; 4) любое число, кроме ± 1, если $a = 2$. 169. 1) В шестеричной; 2) в двенадцатеричной. 170. 1) В пятеричной; 2) в шестеричной. 171. 21 *км*. 174. 4 *кГ*.

175. 3) $a \geqslant b$. **177.** 4) $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, a > 0, b > 0$; 5) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

181. 1) 217 *см* $< l <$ 218 *см*. **182.** 26,35 *кГ* $< P <$ 26,45 *кГ*. **184.** 1) 1; 2; 3; 2) -3; -2; -1; 0; 1; 3) 1; 2; 3; 4; 5; 4) -1; 0; 1; 2. **185.** 144. **186.** Второе. **188.** 3 книги; 1 книга; 2 книги. **189.** 5; 4; 3. **190.** Нельзя. **193.** Можно. **194.** 3) $x^2 > 2x$; 4) $a^2 > -a$; 5) $-b^2 < 3b$; 6) $x^2 - 2x > x$. **195.** 1) $(x-1) \times (x-2) > 0$; 2) $abc(ab+ac+bc) < 0$; 3) $x^2 - 1 > 0$. **196.** 1) Возрастают; 2) убывают. **197.** 1) Убывают; 2) возрастают. **199.** 3) $1 > -2a$; 4) $1 > a$; 5) $a^2 > a$. **204.** Решение. По условию $a > 0$, число x может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Если $x = 0$, то $-a < x < a$. Если $x > 0$, то $|x| = x$ и $x < a$, но тогда $-a < x$, т. е. $-a < x < a$. Если же $x < 0$, то $x < a$ и $x > -a$, т. е. опять $-a < x < a$. **205.** 1) $-1 < m < 1$; 2) $0 < x < 4$. **207.** Указание. Заметив, что $a > 0$, рассмотреть случаи: $x = 0$, $x > 0$ и $x < 0$. **208.** 1) $|a| \leqslant 2$; 2) $|n| \leqslant \frac{1}{2}$; 3) $|x - 2| < 1$. **209.** 24,07 *мм* $< l <$ 24,09 *мм*. **210.** 21,58 ($\pm$ 0,02) *м*; 0,1%. Указание. В качестве границ абсолютной погрешности взять среднее уклонение (равное среднему арифметическому уклонений отдельных измерений от среднего арифметического результата всех измерений). **211.** 16,63 *кГ* $< P <$ 16,77 *кГ*. **212.** 0,09; 16,4 ($\pm$ 0,09). **213.** 1) 0,03%; 2) 0,003%. **214.** 615 ($\pm$ 5) *км*. **215.** 0,08; 1,5%. **216.** 4) $-ab > 4$. **219.** $(0,1)^{10} > (0,3)^{20}$. Указание. $(0,3)^{20} = (0,09)^{10}$. **221.** 70 800 ($\pm$ 800) $м^2$.

225. 1) Указание. $\frac{7}{\sqrt{195}} > \frac{7}{\sqrt{196}}$. 2) Указание. Заметив, что $\sqrt{5} + \sqrt{6} > 0$ и $\sqrt{21} > 0$, сравнить числа $(\sqrt{5} + \sqrt{6})^2$ и $(\sqrt{21})^2$. **227.** 2) Указание. $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{a^2+1} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$. 3) Указание. $\frac{a^2}{a^4+1} = \frac{1}{a^2 + \frac{1}{a^2}}$. **232.** 1) Увеличится; 2) уменьшится. **234.** В безветренную погоду. С увеличением скорости ветра время полета возрастает. **235.** 2) Уменьшится. **238.** Пришел раньше срока. **240.** Решение. Из условия следует, что $a > b$ и $a > c$ или $ab^2 > b^3$ и $ac^2 > c^3$. Отсюда $ab^2 + ac^2 > b^3 + c^3$, $a(b^2 + c^2) > b^3 + c^3$, $a(b^2 + c^2) > a^3$, $b^2 + c^2 > a^2$. Значит, $A < 90°$.

241. 1) 5; 2) -2; 0; $1\frac{1}{4}$; 2. **242.** 3), 6), 7) неравносильны. **245.** Нет. **248.** 1) $x < 3$; 2) $x > -2$; 3), 4) любое число. **249.** 1) $x \geqslant 1\frac{4}{7}$; 2) любое число; 3) нет решений; 4) любое число, кроме 2. **250.** 1) $x > 2$; 2) $x < 0,5$. **251.** 1) $x < -2$ и $x > 2$ (рис. 82); 2) $-1 < x < 3$ (рис. 83);

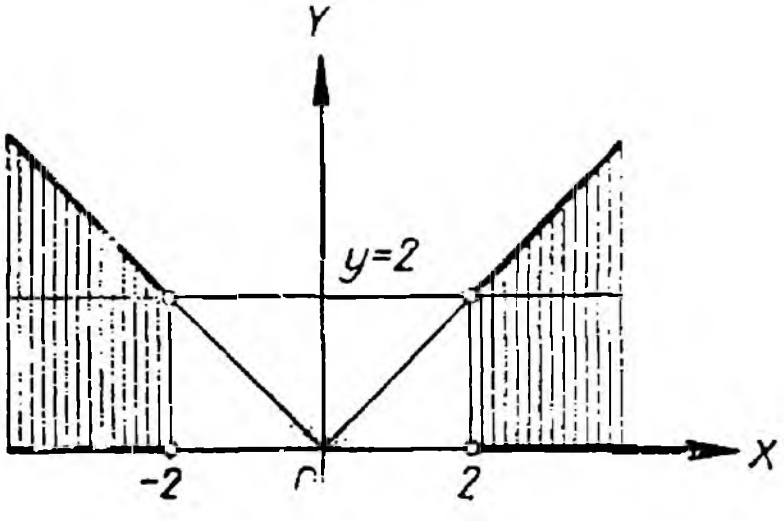


Рис. 82.

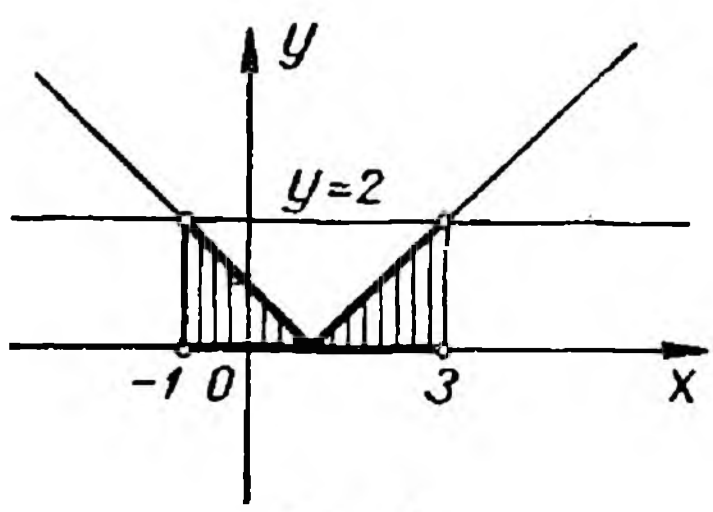


Рис. 83.

3) $-5 < x < 1$ (рис. 84); 4) $x < -11$ и $x > -1$ (рис. 85).

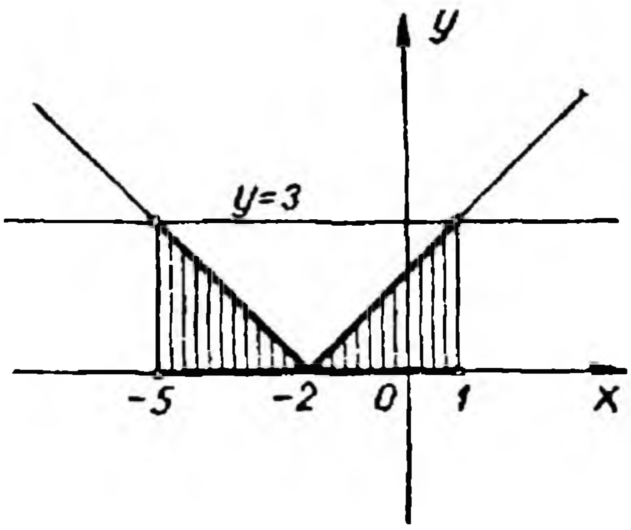


Рис. 84.

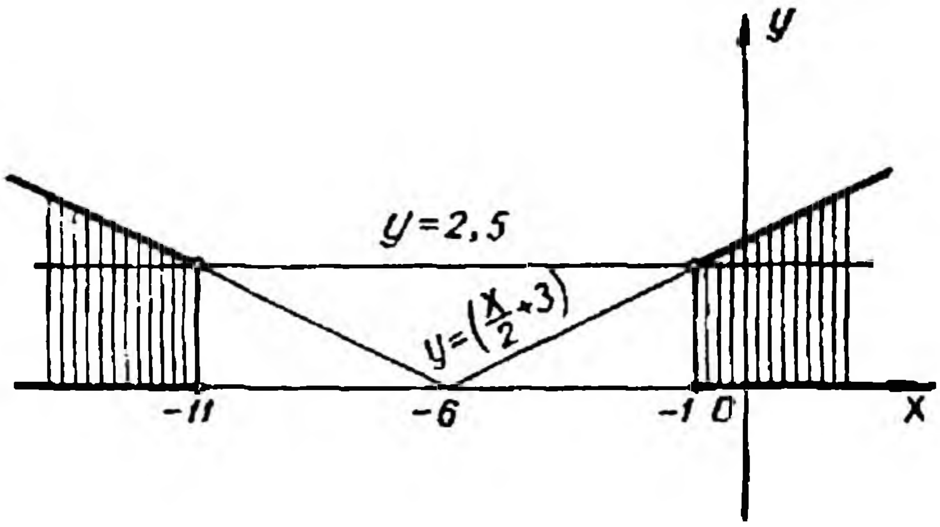


Рис. 85.

253. 1) $x > 4$; 2) $x \leqslant -6$; 3) $1 \leqslant x < 3$; 4) и 5) нет решений. **254.** 1) 0; —1; —2; 2) 2; 3; 4; 3) —1; 0; 1; 2; 3; 4) 7; 8; 9; 10. **256.** 1) $x < -1$ и $x > 2$; 2) $0 < x < 3$; 3) $x < \frac{1}{3}$ и $x > 4$; 4) $1 < x < 6$. **257.** 1) $|x| > 2$; 2) $-6 < x < 2$; 3) $-1\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$; 4) $1\frac{3}{5} < x < 8$, $x \neq 2$. **258.** 1) $x < 1$ и $2 < x < 3$. Указание. Заметив, что $x \neq 1; 2; 3$, найти знак каждого множителя левой части неравенства в каждом из промежутков: $x < 1$, $1 < x < 2$, $2 < x < 3$ и $x > 3$; 2) $-5 < x < -4$ и $x > 6$; 3) $x < 10$ и $11 < x < 12$; 4) $x < -4$; $-2 < x < 3$; $x > 5$. **259.** 1) $x < 2$ и $x > 2{,}5$; 2) $x < -3$ и $x > 7$; 3) удовлетворяется произвольным значением $x \neq 6$; 4) $-1 < x < -\frac{4}{7}$. **260.** 1) $-2{,}5 < x < -2$; 2) $1 < x < 1{,}5$; 3) $x < -10$ и $x > 8$; 4) $x < 5{,}4$ и $x > 6$. **261.** 1) $\frac{1}{3} < x < 2$; 2) $x < \frac{1}{2}$ и $x > 3$. **262.** 1) $0{,}5 < x < 2{,}5$; 2) $x < -5$; $x > 1$; 3) решений нет; 4) $x > 0{,}5$. **263.** 35. **264.** $43\frac{1}{3} < x < 61\frac{2}{3}$. **265.** 1) $\frac{n-1}{n+1}$, если $|n| > 1$; 2) $\frac{a+2}{a-2}$, если $|a| > 2$; 3) $\frac{11b-7}{b+6}$, если $b < -6$ или $b > \frac{7}{11}$; 4) $\frac{4+m}{2(m+1)}$, где $m < -4$ и $m > -1$, но $m \neq 2$. **266.** 1) $\frac{a}{a-1}$, если $0 < a < 1$; 2) $\frac{s-2}{s(s+2)}$, если $s < -2$ или $0 < s < 2$; 3) $\frac{3k+20}{5k+6}$, если $-6\frac{2}{3} < k < -1\frac{1}{5}$, кроме $k = -2\sqrt{2}$; 4) $\frac{15}{5-a}$, если $a > 5$. **267.** $a = 2$; $x = 1$. **268.** $a = -4$; $x = -1$. **269.** $1 < a < 1{,}5$. **270.** $a > 3$.

271. 1, а) $a < 0$, $b < 6$; $0 < a < 2$, $b > 6$; $a > 2$, $b < 6$; б) $a < 0$, $b > 6$; $0 < a < 2$, $b < 6$; $a > 2$, $b > 6$; в) $a = 2$, $b = 6$; г) $a = 2$, $b \neq 6$. 2, а) $a > 2$, $b > 1$; $a < 2$, $0 < b < 1$; $a > 2$, $b < 0$; б) $a < 2$, $b > 1$; $a > 2$, $0 < b < 1$; $a < 2$, $b < 0$; в) $a = 2$, $b = 1$; г) $a \neq 2$, $b = 1$.

272. 14 деталей; 9 деталей. **273.** $\frac{n+15}{8}$ задач, где $n = -15$; —7; 1; 9; 17; 25. **274.** $\frac{ab}{a-b}$ *м*. **275.** $\frac{pd}{d-1}$ *кГ*. **276.** $v_1 > 1{,}4v_2$; $v_1 = 1{,}4v_2$. **277.** $\frac{24-4v}{v-4}$ *км*, если $4 < v < 6$. **278.** $\frac{t}{k-1}$ *ч*, если $k > 1$. **279.** $\frac{2ab}{a+b}$ *сек* и $\frac{2ab}{a-b}$ *сек*, если $a > b$. 281. 1), 3) единственное решение; 2), 5) бесконечное множество решений; 4), 6) решений нет. 283. Нет. 284. 1) −3; и −2 (рис. 86); 2) решений нет (рис. 87); 3) бесчисленное множество

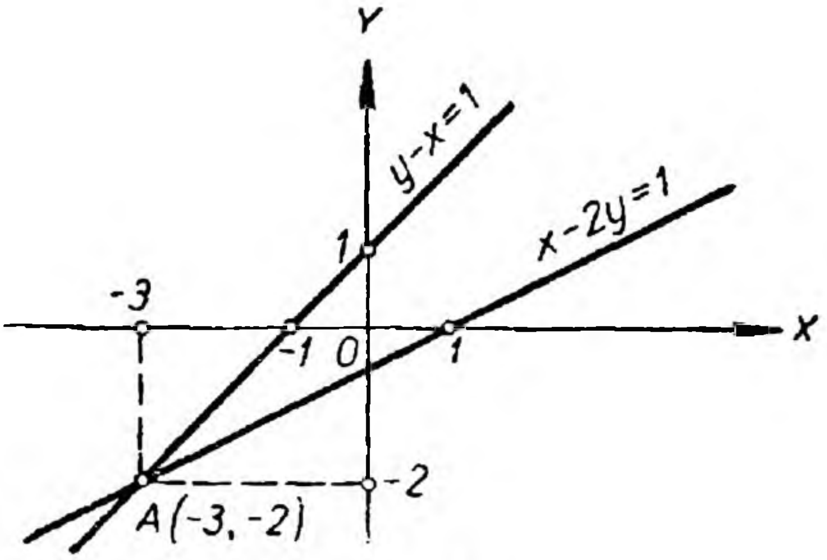


Рис. 86

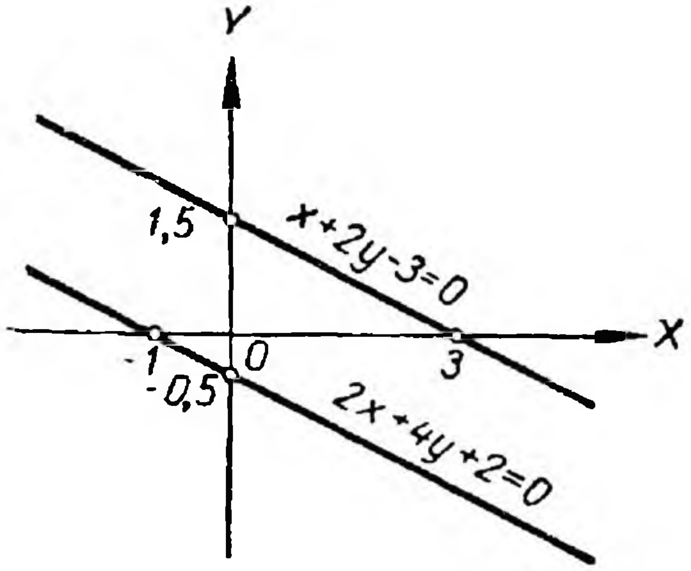


Рис. 87

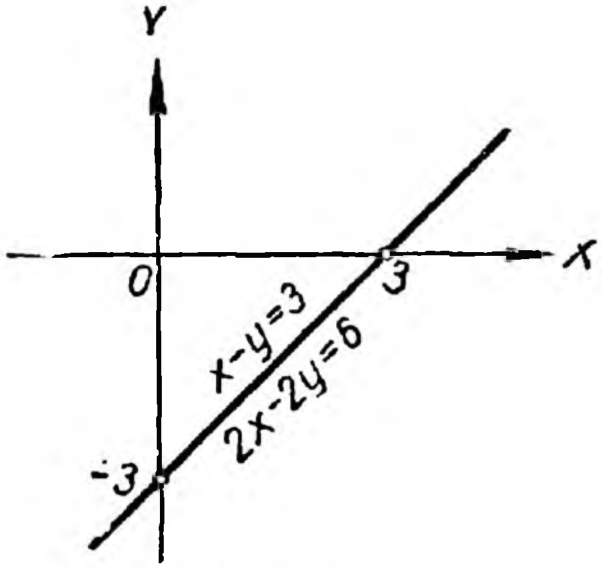


Рис. 88

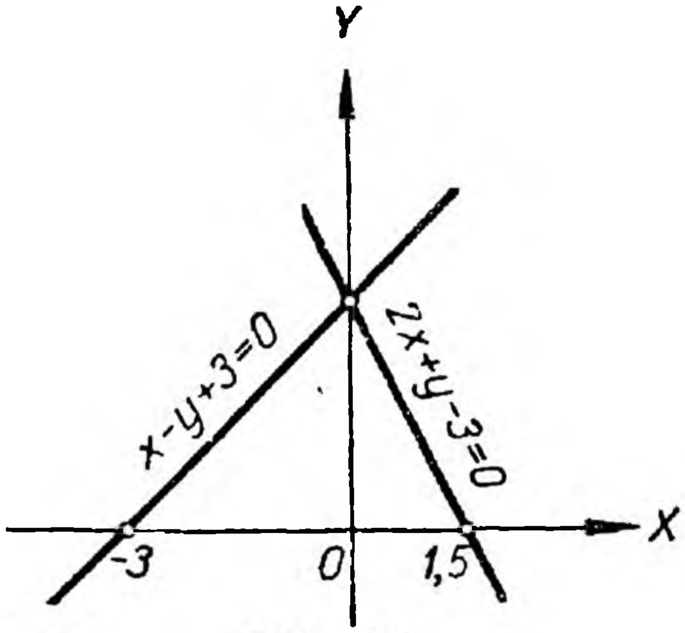


Рис. 89

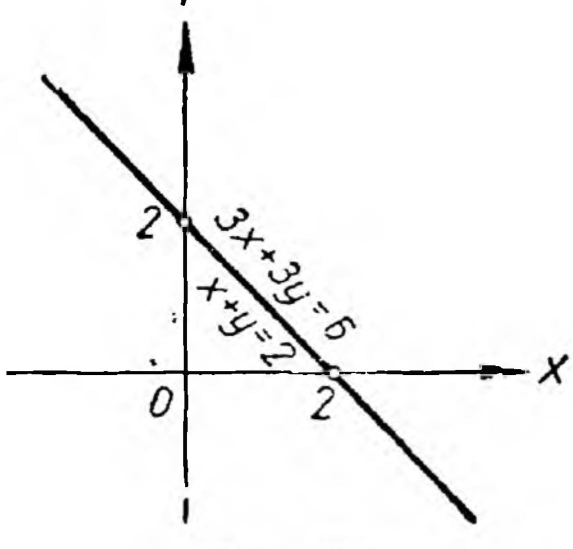


Рис. 90

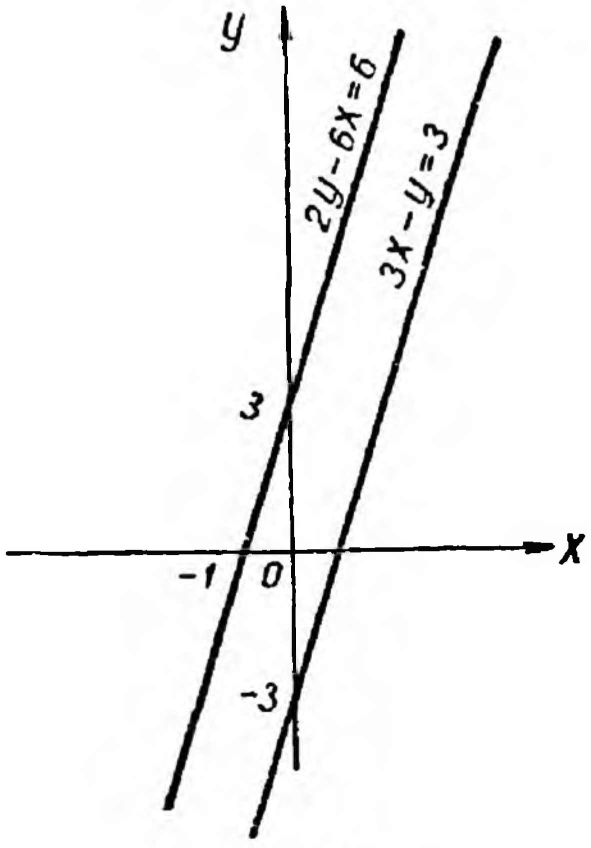


Рис. 91

(рис. 88); 4) 0; 3 (рис. 89); 5) бесчисленное множество (рис. 90); 6) решений нет (рис. 91). **285.** 1) $a=4$; $b=-7$; 2) $a=6$, $b\neq-5$; 3) $a=6$, $b=-5$. **286.** 1) $m>15$; 2) $m<4$; 3) $4<m<15$; 4) не существует. **287.** 1) $n>-6$; 2) $-12<n<-6$; 3) $n<-12$; 4) не существует. **288.** 1, а) $a=-9$; $b=5$; б) $a=-9$; $b\neq5$; 2, а) $a=5$; $b=24$ и $a=-1$; $b=0$; б) $a=5$; $b\neq24$ и $a=-1$; $b\neq0$. **289.** 1, а) $k=2$; б) $k=-11$; 2, а) $k=2$; б) $k=1$. **290.** 1) Единственное решение, если $m\neq-1\frac{2}{3}$; нет решений, если $m=-1\frac{2}{3}$; 2) единственное решение, если $m\neq1$ и $m\neq2$; бесконечное множество решений, если $m=1$; нет решений, если $m=2$. **291.** 75. **292.** 4 *км*. **293.** 60 *км*; 40 *км*; 25 *км*. **294.** 4 лошади и 21 корова или 8 лошадей и 15 коров. **295.** $10\frac{10}{11}$ *км/ч*; $5\frac{5}{11}$ *км/ч*. **296.** $\frac{d(n-b)}{an-bm}$ руб. и $\frac{d(a-m)}{an-bm}$ руб., если $n>b>0$, $a>m>0$ или $b>n>0$, $m>a>0$. **297.** $\frac{252-c}{22}$ *ч* и $\frac{6c-1050}{110}$ *ч*, где $175<c<252$. **298.** $\frac{p(c-a)}{c-b}$ *кГ* и $\frac{p(a-b)}{c-b}$ *кГ*, если $c>a>b>0$ или $0<c<a<b$. **299.** $\sqrt{\frac{abc}{a-b+c}}$ *км*, $b<a+c$.

III. Действительные числа. Квадратные уравнения

300. 1,а) 9; 5; 1,8; 5,25; б) 1,5; $\frac{5}{6}$; 0,3; $\frac{7}{8}$; в) 4; $2\frac{2}{9}$; 0,8; $2\frac{1}{3}$. **301.** 1) 2,175; 1,(90); 3,5(3); 0,8(3); 4,(285714); 2) $\frac{3}{8}$; $5\frac{4}{25}$; $1\frac{5}{9}$; $\frac{7}{30}$; $2\frac{9}{22}$.

307. Иррациональные в примерах 2); 3); 7); 9); 12); 14). **314.** Соизмеримы в примерах 1), 3), 4), 5). **315.** 1) Нет; 2) да. **317.** Да. **318.** 1) Соизмеримы; 2) несоизмеримы. **319.** 1) Иррациональным; 2) рациональным. **320.** Нет.

329. $\sim3{,}1463$. **330.** 1) $\sim3{,}414$; 2) $\sim3{,}650$; 3) $\sim3{,}968$; 4) $\sim5{,}382$; 5) $\sim0{,}822$; 6) $\sim-0{,}504$; 7) $\sim0{,}910$; 8) $\sim0{,}475$; 9) $\sim-1{,}327$. **331.** Да. **333.** Нет. **334.** $\sqrt{7}+\sqrt{10}<\sqrt{3}+\sqrt{19}$. **335.** $\sim2{,}449$. **336.** 1) $\sim0{,}823$; 2) $\sim11{,}314$; 3) $\sim3{,}873$. **337.** Если $x=0$.

339. 7 *сек*. **340.** 0; 3. **342.** Равносильны. **347.** 1) 0; $-5\frac{1}{3}$; 2) 0; $\frac{6}{11}$; 3) $\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$; 4) ±3; 5) ±6; 6) -1; 0; 2; 7) 0 и $x\geqslant1$. **348.** 1) $\pm2a$; 2) $\pm5a$; 3) $\pm(a+2b)$; 4) 0; $\frac{b-a}{2}$. **349.** 1) 0; $m+n$; 2) $\pm\frac{a-4}{a}$; 3) $\pm(a+c)$; 4) любое действительное число, если $|n|=1$; $\pm n$, если $|n|\neq1$. **350.** 1) ±1, если $ab\neq1$; любое действительное число, не равное b, если $ab=1$; 2) 0; $\frac{a+2b+a^2}{1-a}$, если $a\neq1$; 3) $-a$; 4) 0; $\frac{2ab}{a+b}$. **351.** 1) $1\frac{2}{3}$; 2) 0,05; 3) ±2; 4) 0; 1. **352.** 1) ±1; 2) 0; 3) 1; 4) -4; 5) таких значений нет. **353.** 1) 0; 8; 2) ±2. **355.** 1) В шестеричной; 2) в двенадцатеричной. **356.** 1) В двенадцатеричной, 2) в восьмеричной; 3) в шестеричной.

357. 16 *см* × 32 *см*. **359.** 1) -3; $\frac{1}{2}$; 2) 2; $-0{,}4$; 3) -1; 5; 4) $-\frac{\sqrt{5}+1}{3}$; $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$. **360.** 1) -4; -2; 2) 1; 9; 3) $-0{,}5$; 3,5; 4) -2; 1; 5) $-\frac{p}{2}\pm\sqrt{m}$; 6) $-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. **361.** 1) -2; 4; 2) -3; 5; 3) действительных значений x нет; 4) -3; 4. **362.** 1) $-6\frac{5}{7}$; 7; 2) $-2\frac{5}{6}$; 3; 3) 0,5; 0,7; 4) $\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$; 5) 2; 5. **363.** 1) $\sim -2{,}79$; $\sim 1{,}79$; 2) $\sim 0{,}57$; $\sim 7{,}93$; 3) $\sim -2{,}07$; $\sim 0{,}21$; 4) $\sim -0{,}56$; $\sim 1{,}47$. **364.** 1) $\sim -1{,}3$; $\sim 2{,}0$; 2) $\sim -8{,}7$; $\sim 1{,}3$; 3) $\sim 0{,}749$; $\sim 2{,}726$; 4) $\sim -0{,}7919$; $\sim -0{,}4841$. **365.** 1) и 3) равносильны. **366.** 1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) 8. **367.** 1) Нет корней; 2) $1\frac{3}{7}$; 3) -1; 4) 1.

369. 1) $a-b$; $a+b$; 2) $2a$; $2b$; 3) a; $2a$; 4) $-a$; $2a$. **370.** 1) 1; $\frac{1}{a}$; 2) $\frac{a}{b}$; $\frac{b}{a}$; 3) $\frac{a-b}{b}$; $\frac{a-b}{a}$. Указание. В формуле корней уравнения выражение под знаком корня представить в виде $(a-b)^4$; 4) -1; $\frac{a+1}{a-1}$. **371.** 1) $a-1$; $a-2$; 2) a; b; 3) 1; 1; 4) 1; $-\frac{a^2+a+1}{a}$. **372.** 1) a; $-\frac{1}{a}$; 2) m; $\frac{1}{m}$; 3) $-b$; 4) $a+b$; $\frac{a+b}{2}$. **373.** 1) a; $3-a$; 2) a; $\frac{4a-15}{a-4}$. Указание. В формуле корней уравнения выражение под знаком корня представить в виде $(a^2-8a+15)^2$. **374.** 1) $\frac{a+b}{2}$, если $a\neq b$; нет корней, если $a=b$; 2) $-2a$; $3a$, если $a\neq 0$; нет корней, если $a=0$; 3) $\frac{a^2+b^2}{2a}$ и $\frac{a^2+b^2}{2b}$, если $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq b$; $\frac{b}{2}$, если $a=0$, $b\neq 0$; $\frac{a}{2}$, если $b=a$, $a\neq 0$; нет корней, если $a=b$; 4) a; b. **375.** 1) 0; $\frac{2ab}{a+b}$; 2) если $a+b=0$, $ab\neq 0$, то уравнению удовлетворяет любое действительное значение $x\neq 0$; если $a+b\neq 0$, $ab\neq 0$, то уравнение имеет два корня: $-a$ и $-b$; если $ab=0$, то уравнение не имеет корней; 3) если $a^2\neq b^2$, то уравнение имеет два корня: $-\frac{ab}{a+b}$ и $-\frac{a^2+b^2}{a+b}$; если $a=b$, то уравнение имеет один корень: $-\frac{a}{2}$; если $a=-b$, то уравнение не имеет корней; 4) если $a^2\neq b^2$, то уравнение имеет два корня: $a+b$ и $\frac{2ab}{a+b}$; если $a=b$, то $x=2a$; если $a=-b$, то $x=0$.

376. 2) -2; -80; 4) $-6{,}5$; 10,5. **378.** 2) $30x^2-x-1=0$. **379.** 2) $x^2-9{,}9x-1=0$; 4) $9x^2+12x+4=0$. **380.** 2) $x^2-(\sqrt{15}-\sqrt{5})x-5\sqrt{3}=0$; 3) $x^2+\sqrt{6}x=0$. **381.** 2) $x^2-2x-2=0$; 4) $x^2-2\sqrt{2}x+1=0$. **382.** 2) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$; 4) $(a^2-b^2)x^2-2ax+1=0$. **383.** 1, а) и б) нет; в) может. **384.** 1) $\sqrt{2}+1$; 2) нельзя. **385.** $x^2+4x+1=0$. **386.** Нет. **387.** 1) -1; -2; 2) -1; -4. **388.** а) $-mp$; m^2q; б) $2n-p$; n^2-np+q. **389.** $q=p-1$. **390.** 0. **391.** 1) $34x^2+7x-5=0$; 2) $cx^2+bx+a=0$. **392.** $x^2-px+q=0$. **393.** 1) $x^2-x-56=0$; 2) $x^2+7x-8=0$. **394.** $a=c$; $|b|>2a$. **395.** $-2{,}5$; 1,5. **396.** 1) $9\frac{1}{4}$ и $\pm 8\frac{3}{4}$; 2) $26\frac{7}{8}$ и $\pm 27\frac{1}{8}$. **397.** 1) p^2-2q; $\mp p\sqrt{p^2-4q}$; 2) $3pq-p^3$;

$\pm(p^2-q)\sqrt{p^2-4q}$. **398.** -45. **402.** 2) $(x-4+\sqrt{3})(x-4-\sqrt{3})$; 4) $(5x+2)(6x+5)$. **403.** 2) $(z-2ab)(z-c)$; 3) $(x-\sqrt{b})(x+a+\sqrt{b})$; 4) $(x-ax-a-1)(x+ax-a+1)$, где $|a| \neq 1$. **404.** 1) $\frac{x-3}{x+4}$; 2) $\frac{2m+3}{m-2}$; 3) $\frac{a^{n-2}(a-1)}{a+2}$; 4) $a-1$.

405. 1) $b^2-4ac>0$; 2) $b^2-4ac=0$; 3) $b^2-4ac<0$. **406.** $ax^2+bx-c^2=0$, $a>0$. **407.** 0; $-\frac{b}{a}$. **408.** 1) $b^2-4ac \neq k^2$; 2) рациональные: в), д), е). **409.** 1) 9; 2) ±10; 3) 4; 4) ±2. **410.** 1) $k<4$; 2) $|k|>6$; 3) k — любое действительное число, кроме 4; 4) $k<1$. **411.** 1) $n>8$; 2) $|n|<8$; 3) $|n|>\frac{1}{4}$; 4) $|n|>\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **415.** 1) $0<a<3$; 2) $0<a<3$. **416.** а) 1) -5; 2) 49; б) 1) 5; 2) 1. **417.** 1) Нет; 2) $a=1$ и $a>5$; 3) $2<a<3$; 4) $3<a<5$. **418.** $2<a<4$. **423.** 1) При $a<0$ $x_1<0$, $x_2>0$, $|x_1|<x_2$; при $0<a<\frac{1}{16}$ $x_1>0$, $x_2>0$; при $a>\frac{1}{16}$ действительных корней нет; 4) при $a<0$ $x_1<0$, $x_2>0$, $|x_1|>x_2$; при $0<a<6\frac{1}{8}$ $x_1<0, x_2<0$; при $a>6\frac{1}{8}$ действительных корней нет; 5) при $a<-4$ оба корня отрицательные, при $-4<a<4$ действительных корней нет, при $a>4$ оба корня положительные.

424. 1) 24 и 25; 2) 22 и 24 или -24 и -22; 3) 25 и 27 или -27 и -25. **425.** 1) и 2) возможен; 3) нет. **426.** 1) Нет; 2) в пятиугольнике. **427.** 12. **428.** 1) 6; 2) 6. **429.** 48 и 38. **430.** 80 *см* и 50 *см*. **431.** 20 автомашин. **432.** 3 *км/ч*. **433.** 55 *км/ч*. **434.** 10 *км/ч*; 12 *км/ч*. **435.** 75 *км/ч*. **436.** 7 дней и 12 дней. **437.** $\frac{7}{5}$. **438.** 5 *мин*. **439.** 60 *км/ч*. **440.** 4 *м/сек*; 3 *м/сек*. **441.** 25%. **442.** 4 *ч*. **443.** 7,5 *ч* и 5 *ч*. **444.** 10 *ч*; 15 *ч*. **445.** Играли 12 чел. **446.** $\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2}$ чел.; $a=\frac{n(n-1)}{2}$, где $n=2, 3, 4, \ldots$. **447.** $\frac{-5+\sqrt{25+20n}}{10}$ авт., где $n=5k(k+1)$, $k \geqslant 1$, целое. **448.** $\frac{-m+\sqrt{m^2-288m+16ms}}{2}$ *км/ч*. **449.** $\frac{-m+\sqrt{m^2+2am}}{2}$ *км/ч*; $\frac{m+\sqrt{m^2+2am}}{2}$ *км/ч*. **450.** $\frac{m+\sqrt{m^2+576}}{8}$ *км/ч*.

451. $(\sqrt{400p+2500}-p-50)$ *г*. **452.** $\frac{3+\sqrt{9+8d}}{2}$ углов, $d=\frac{k}{2}(k-3)$, где $k \geqslant 4$, натуральное. **453.** $\frac{5+\sqrt{25+8a}}{2}$ сторон, где $a=\frac{n}{2}(n-5)$; 6 сторон при $a=3$. **454.** $3b$ *кГ*; $4b$ *кГ*. **455.** $(10\pm\sqrt{100-20a})$ *см*, где $0<a<5$. **456.** $\frac{a+b-\sqrt{(a-b)^2+4S}}{4}$ *см*. **457.** $\frac{-bk+\sqrt{b^2k^2+400bkS}}{2b}$ *Т*.

458. 1) ±1; 2) ±2; 3) $\pm\frac{1}{3}$; 4) $\pm\frac{1}{2}$. **459.** 1) ±1; ±5; 2) ±2; ±6; 3) $\pm\frac{1}{2}$; ±1; 4) $\pm\frac{1}{2}$; ±2. **460.** 1) ±3; ±3; 2) $\pm\frac{1}{4}$; $\pm\frac{1}{4}$; 3), 4) действительных корней нет. **461.** 1) 0; ±3; 2) 0; $\pm\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) 0.

464. 1) ± 1; $\pm a$; 2) ± 4; $\pm m$; 3) $\pm a$; $\pm b$; 4) $\pm \frac{m}{n}$; $\pm \frac{n}{m}$; 5) ± 1; $\pm\sqrt{mn}$, $mn > 0$; 6) $\pm\sqrt{m}$, $\pm\sqrt{n}$, $m > 0$, $n > 0$. **466.** $x^4 - 12x^2 + 32 = 0$. **467.** $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. **468.** 1) $(x-2)(x+2)(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})$; 2) $(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})$; 3) $\frac{1}{6}(2x-\sqrt{2})\times$ $\times(2x+\sqrt{2})(3x-\sqrt{3})(3x+\sqrt{3})$; 4) $(x-a)(x+a)(x-a+1)\times$ $\times(x+a-1)$. **469.** 1) $\frac{a^2-3}{a^2-9}$; 2) $\frac{x^2-2b^2}{x^2-b^2}$; 3) $\frac{x^2-a^2}{x^2-1}$; 4) $\frac{4x^2-a^2}{x^2-a^2}$. **470.** 1) $\pm\sqrt{3}$; ± 3; 2) -3; -3; -3; $\pm\sqrt{10}$; 3) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; $2\pm\sqrt{5}$; 4) $-1\pm 2\sqrt{2}$; -4; 2. Указание. Воспользоваться подстановкой: $x^2+2x-3=z$. **471.** 1) ± 2; ± 4; 2) ± 2; ± 3; 3) $\pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$; 4) ± 1; ± 1. **472.** $x^4-(p^2-2q)x^2+q^2=0$. **473.** 1) $\pm\sqrt{3}$; 2) $\pm 2\sqrt{3}$; 3) $-\frac{5}{3}$; 5; $-\frac{5}{4}$; $\frac{5}{2}$. Указание. Положив $x+5=a$, решить относительно x полученное уравнение; 4) $\pm\frac{1}{2}$. Указание. Прибавить к обеим частям уравнения по $\frac{2x^2}{x^2-1}$ и решить полученное уравнение относительно $\frac{2x^2}{x^2-1}$. **474.** В троичной. **475.** 4 или $\frac{1}{4}$. **476.** $\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a^2}}$; R; $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

478. 1) $x \neq 0$; 3) убывает; 4) две: $y = x$; $y = -x$.

484. 1) $(2; 5)$; $\left(11\frac{2}{3}; -4\frac{2}{3}\right)$; 2) $(-3; -4)$; $\left(\frac{8}{17}; -\frac{9}{17}\right)$; 3) $(0; 1)$; $(3; -2)$; 4) $(-3; 4)$; $(2; -6)$. **485.** 1) $(-2; -3)$; $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; 2) $(3; 2)$; $(12; -7)$; 3) $(3; 2)$; $\left(-1\frac{1}{5}; -\frac{4}{5}\right)$; 4) $(-1; 1)$; $\left(-3\frac{87}{302}; -\frac{238}{453}\right)$. **486.** 1) $(1; -1)$; $\left(\frac{9}{14}; 2\frac{4}{7}\right)$; 2) $(3; 1)$; $(1; 3)$; 3) $(3; 2)$; $(-2; -3)$; 4) $(2; 3)$; $\left(-\frac{1}{3}; -1\frac{2}{3}\right)$. **487.** 1) $(3; 2)$; $(-10; 15)$; 2) $(2\pm\sqrt{6}; -2\pm\sqrt{6})$; $\left(\frac{-5\pm\sqrt{15}}{2}; \frac{5\pm\sqrt{15}}{2}\right)$; 3) $(2; 3)$; $(3; 2)$; $(-2; -3)$; $(-3; -2)$; 4) $(2; 3)$; $(3; 2)$. **488.** 1) $(m; 2m)$; $(2m; m)$; 2) $(a; -a)$; 3) $(a; -2a)$; 4) $(-2a; -a)$; $(-a; -2a)$. **489.** 1) $(a+1; a-1)$; $(-a-1; 1-a)$; 2) $(3a-4; a-3)$; $(a; 1-a)$; 3) $(a+b; a-b)$; $(b-a; -a-b)$; 4) $\left(\frac{a-b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$; $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a-b}{2}\right)$. **490.** 1) $(2; 3)$; $(3; 2)$; 2) $(4; -2)$; $(-2; 4)$; 3) $(3; 2)$; $(2; 3)$; 4) $(8; 8)$. **491.** 1) $(-2; -10)$; $(10; 2)$; 2) $(3; -5)$; $(5; -3)$; 3) $(-2; -5)$; $(5; 2)$; 4) $(2; -1)$; $(1; -2)$. **492.** 1) $(a; -2a)$; $(-2a; a)$; 2) $(a; a+b)$; $(a+b; a)$; 3) $(1-a; -a-1)$; $(a+1; a-1)$; 4) $(a; a-1)$; $(1-a; -a)$.

497. $(\sim -1{,}8; \sim \pm 0{,}8)$; $(\sim 1{,}4; \sim \pm 1{,}5)$. **498.** $(1; 2)$; $\left(-4; -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}; -4\right)$. **499.** 1) $(2; 3)$; $(-3; -2)$; 2) $(1; 3)$; $(-3; -1)$; 3) $(-3; 2)$;

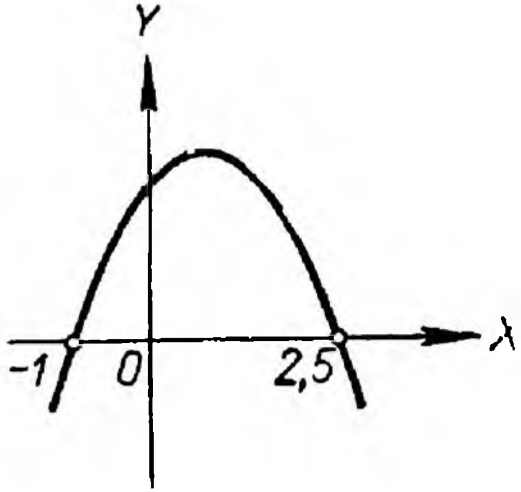
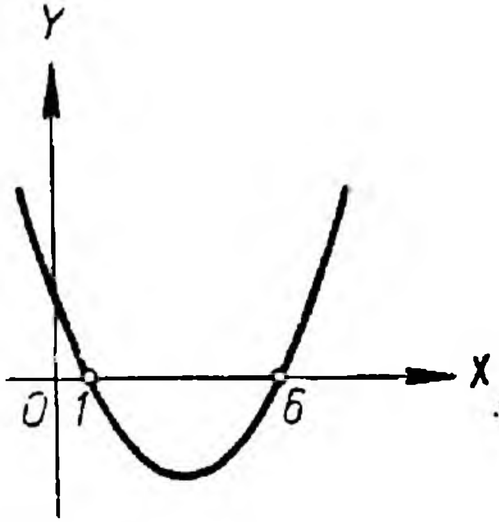
$(-2;\ 3)$; 4) $(-3;\ -4)$; $\left(2\frac{8}{13};\ 10\frac{3}{5}\right)$. **500.** 1) $(18;\ 13)$; $(2;\ -3)$; $(-18;\ -13)$; $(-2;\ 3)$; 2) $\left(1\frac{2}{3};\ 3\frac{1}{3}\right)$; $(2;\ 3)$; 3) $(0;\ 0)$; $(1;\ 2)$; $(2;\ 1)$; 4) $(\pm 2;\ \pm 3)$; $\left(\pm 9;\ \pm\frac{2}{3}\right)$. **501.** 1) $\left(1;\ \frac{3}{4}\right)$; $(3;\ 3)$; $(-2;\ 3)$; 2) $\left(1;\ \pm\frac{\sqrt{33}}{3}\right)$; $(-7;\ -5)$; $(-1;\ 1)$; 3) $\left(-1\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$; $(1;\ -2)$; $(-1;\ 0)$; $\left(\frac{1}{2};\ -2\frac{1}{2}\right)$; 4) $(\pm 3,\ \pm 1)$. **502.** 1) $(1;\ 2)$; $(2;\ 1)$. Указание. Применить теорему Виета. 2) $(2;\ \pm 3)$; $(9;\ \pm\sqrt{2})$; 3) $(\pm 3;\ 4)$; 4) $(\pm 3,\ \pm 2)$. **503.** 1) $(\pm 3;\ \pm 4)$; $(\pm 4;\ \pm 3)$; 2) $(\pm 5;\ \pm 3)$; 3) $(\pm 9;\ \pm 3)$; 4) $(\pm 4;\ \pm 2)$; $\left(\pm\frac{2\sqrt{13}}{13};\ \pm\frac{16\sqrt{13}}{13}\right)$. **504.** 1) $\left(\mp\frac{m\sqrt{m+n}}{m+n};\ \pm\frac{n\sqrt{m+n}}{m+n}\right)$; 2) $(\pm 2a;\ \pm a)$; $\left(\mp\frac{a\sqrt{2}}{2};\ \pm\frac{3a\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $(2a;\ -a)$; $\left(-3a;\ -\frac{a}{6}\right)$; 4) $(-a;\ 2a)$; $\left(\frac{a}{2};\ -a\right)$. **505.** 1) $(\mp 0{,}2;\ \pm 1)$; $(\mp 0{,}8;\ \pm 0{,}25)$; 2) $(\mp 1;\ \pm 2)$; $\left(\pm\frac{3\sqrt{2}}{2};\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $(\pm 4,\ \pm 5)$; 4) $(\pm 5;\ \pm 3)$; $\left(\pm 1\frac{1}{2};\ \pm 10\right)$. **506.** 1) $\left(\pm\frac{1}{2};\ \mp 1\right)$; $\left(\pm\frac{5}{6};\ \mp\frac{1}{3}\right)$; 2) $\left(\mp 3;\ \pm\frac{1}{2}\right)$; $\left(\pm\sqrt{\frac{10}{37}};\ \pm 3\sqrt{\frac{10}{37}}\right)$; 3) $(\pm 3;\ \pm 1)$; $\left(\pm 12;\ \mp 3\frac{1}{2}\right)$; 4) $(\pm 3\sqrt{3};\ \pm\sqrt{3})$; $(\pm 4;\ \pm 5)$. **508.** 1) $(1;\ 2;\ 3)$; $(3;\ 4;\ 1)$; 2) $(-1;\ -2;\ -3)$; $(-3;\ 0;\ -1)$; 3) $(2;\ 3;\ 4)$; $(-2;\ -3;\ -4)$; 4) $(2;\ -4;\ 5)$; $(-2;\ 4;\ -5)$. **509.** 1) $(3;\ -4;\ 2)$; $(-3;\ 4;\ -2)$; 2) $(-1;\ 3;\ -5)$; $(5;\ -3;\ 1)$; 3) $(3;\ 4;\ 5)$; $(4;\ 3;\ 5)$.

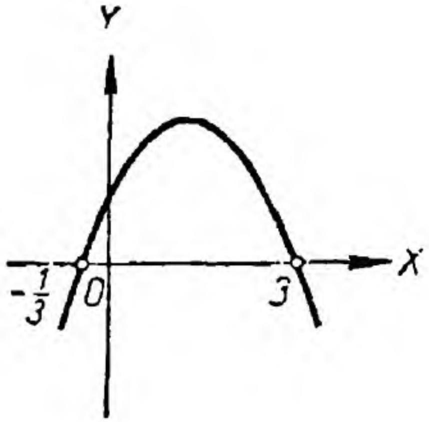
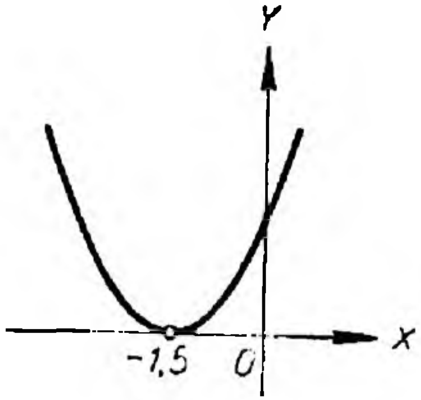
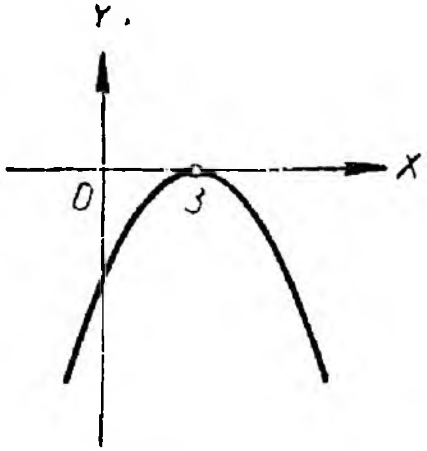
510. 11; 7 и —7; —11. **511.** 11; 5. **512.** 12; 16 и 20. **513.** 6 *см*; 8 *см* и 10 *см*. **514.** 7 *дм*; 8 *дм*. **515.** 7 *см*; 4 *см*; 7 *см*; 9 *см*. **516.** 10 *см*; 24 *см*. **517.** 12 *см*; 6 *см*. **518.** 25 *см*. **519.** 40 *см*; 15 *см*. **520.** 3 *дм*; 4 *дм*; 5 *дм*. **521.** 8 *кГ*; 6 *кГ*. **522.** 3 *кГ*; 5 *кГ*. **523.** $\sim 0{,}17$ *м/сек*²; 2 *мин*. **524.** 2 *ч* 12 *мин*; 1 *ч* 50 *мин*. **525.** 12 *ч*; 12 *ч* или 10 *ч*; 15 *ч*. **526.** 8 *м/сек*; 7,2 *м/сек*. **527.** 48 *км/ч*; 40 *км/ч*. **528.** 4 *км/ч*; 6 *км/ч*.

529. $\frac{a}{\sqrt{2a-d}}$ *м/сек*; $\frac{d-a}{\sqrt{2a-d}}$ *м/сек*, где $\frac{d}{2} < a < d$.

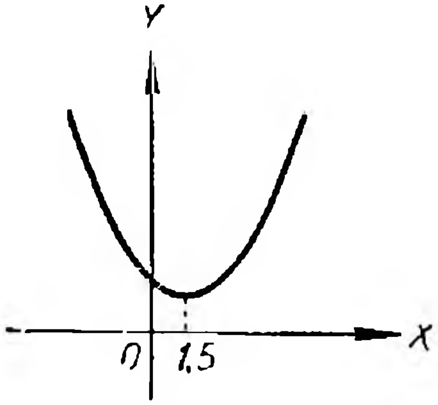
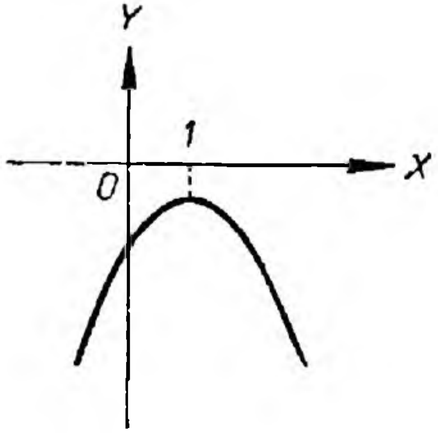
530. 1) 0; 6; 2) —1; 7; 3) $3 \pm \sqrt{7}$; 4) нет; 5) $3 \pm 2\sqrt{3}$.

532. 1) —21 и 22; 2) $\frac{1}{3}$ и 7; 3) —2,5 и —0,4; 4) действительных корней нет. **535.** 1) $(x-3)(x+5)$; 2) $2(x-1{,}2)(x+2{,}7)$; 3) $(x-2a)(x+3a)$; 4) $(2x+3a)(3x-2a)$; 5) $(ab-3)(ab+4)$; 6) $(x-1)(x+2)(x^2+x+6)$. **536.** 1) $p^2 = 4q$; 2) $b^2 = 4ac$. **537.** 1) ± 12; 2) ± 10; 3) $\pm 12\sqrt{6}$; 4) 36; 5) 0; 1; 6) —3; $-\frac{1}{3}$; 7) 3; $\frac{1}{3}$. **539.** 1) —3; 7; 2) $\frac{1}{2}$; $-110\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 4) $-2\frac{1}{2}$; $-10\frac{1}{4}$. **541.** 1) $x = -\frac{2}{3}$; $y_{\text{наим}} = -\frac{1}{3}$; 2) $x = -\frac{1}{2}$; $y_{\text{наим}} = -4$; 3) $x = 1\frac{1}{12}$; $y_{\text{наим}} = -1\frac{1}{24}$; 4) $x = 5$; $y_{\text{наиб}} = 2$. **542.** При $a = 1$ $(x_1^2 + x_2^2)_{\text{наим}} = 1$. **544.** 1) Указание. Привести данное выражение к виду $(x-2)^2 + 1$. 2) Указание. Привести данное выражение к виду $-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}$. **546.** 1) $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$; 2) $a < 0$; $b^2 - 4ac < 0$. **547.** $m > 0{,}1$. **548.** $n < \frac{2}{3}$.

№	Координаты вершины параболы		Действительные значения аргумента x, при которых трехчлен					График
	$x_0=-\frac{b}{2a}$	$y_0=-\frac{b^2-4ac}{4a}$	возрастает	убывает	обращается в нуль	положителен	отрицателен	
549.	$\frac{3}{4}$	$y_{\text{наиб}}=6\frac{1}{8}$	$-\infty<x<\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}<x<+\infty$	$-1;\ 2\frac{1}{2}$	$-1<x<2\frac{1}{2}$	$x<-1$; $x>2\frac{1}{2}$	
550. 1)	$3\frac{1}{2}$	$y_{\text{наим}}=-6\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}<x<+\infty$	$-\infty<x<3\frac{1}{2}$	$1;\ 6$	$x<1$; $x>6$	$1<x<6$	

550. 2)	$1\frac{1}{3}$	$y_{\text{наиб}} = 8\frac{1}{3}$	$-\infty <$ $< x < 1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3} < x <$ $< +\infty$	$-\frac{1}{3}$; 3	$-\frac{1}{3} < x < 3$	$x < -\frac{1}{3}$; $x > 3$	
3)	$-1\frac{1}{2}$	$y_{\text{наим}} = 0$	$-1\frac{1}{2} <$ $< x < +\infty$	$-\infty < x <$ $< -1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	при всех x, кроме $x = -1\frac{1}{2}$	нет	
4)	3	$y_{\text{наиб}} = 0$	$-\infty <$ $< x < 3$	$3 < x < +\infty$	3	нет	при всех значениях x, кроме $x = 3$	

Продолжение

№	Координаты вершины параболы		Действительные значения аргумента x, при которых трехчлен					График
	$x_0 = -\frac{b}{2a}$	$y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$	возрастает	убывает	обращается в нуль	положителен	отрицателен	
5)	$1\frac{1}{2}$	$y_{\text{наим}} = 7\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2} < x < +\infty$	$-\infty < x < 1\frac{1}{2}$	нет	при всех x	нет	
6)	1	$y_{\text{наиб}} = -5$	$-\infty < x < 1$	$1 < x < +\infty$	нет	нет	при всех x	

552. 1), 2) x — любое действительное число; 3) нет решений; 4) $x \neq 1$. **553.** 1) $x < -2$; $x > 1$; 2) $x \leqslant 1$; $x \geqslant 4$; 3) $-5 \leqslant x \leqslant 2$; 4) $-5 \leqslant x \leqslant -3$. **554.** 1) $x \leqslant -\frac{1}{2}$; $x \geqslant \frac{2}{3}$; 2) $-6 < x < -3$; 3) x — любое действительное число; 4) $5-\sqrt{14} < x < 5+\sqrt{14}$. **555.** 1) $0 < x < 1$; $x > 2$; 2) $x < -1$; $0 < x < 3$; 3) $-2 < x < 0$; $x > 6$; 4) $x < -1$; $1 < x < 5$. **556.** 1) $-5 < x < 2$; 2) $-5 < x < 3$; 3) $-3 < x < -2$; $2 < x < 3$; 4) $x < -1$; $\frac{2}{3} < x < 1$. **557.** 1) $|x| > 1$; $0 < x < \frac{1}{2}$; 2) $x < -3$; $-2 < x < -1$; $x > 1$; 3) $x < -2$; $-1\frac{1}{4} < x < -1$; $1 < x < 5$; 4) $x < -4$; $-3 < x < -2{,}5$; $-2 < x < -1$; $x > 0$. **558.** 1) $-2 \leqslant x \leqslant 1$; 2) $x < -\frac{1}{3}$; $x > \frac{2}{3}$. **559.** 1) $k > 0{,}05$; 2) $k < -3{,}5$; $k > 5$; 3) $k < -5$; 4) $k \leqslant -1$; 5) $|k| < 2$; 6) $-1 < k < 2$. **560.** 1) $\sim -3{,}4 < x < \sim -2{,}6$; $\sim 1{,}6 < x < \sim 2{,}4$; 2) $\sim -2{,}6 < x < \sim 7{,}4$; $x < \sim 1{,}5$; $x > \sim 8{,}5$. **561.** 1) 2; 4; 2) 2; 3; 4; 5; 3) (0; 0); (2; 0); (1; 1). **562.** 1, а) -1; $-\frac{1}{5}$; б) $m < -1$; $m > -\frac{1}{5}$; в) $-1 < m < -\frac{1}{5}$; 2, а) $\frac{1}{2}$; 2; б) $\frac{1}{2} < m < 2$, $m \neq \frac{2}{3}$; в) $m < \frac{1}{2}$; $m > 2$; 3, а) $\frac{3}{7}$; 5; б) $\frac{3}{7} < m < 5$, $m \neq 4$; в) $m < \frac{3}{7}$; $m > 5$; 4, а) $\frac{2}{35}$; 2; б) $\frac{2}{35} < m < 2$, $m \neq \frac{2}{3}$; в) $m < \frac{2}{35}$; $m > 2$.

563. 4 *дм/мин*; 3 *дм/мин*. **564.** 2); 3); 5); 6). **565.** 1) $x > 1$; 2) $x > 1$; 3) x — любое действительное число; 4) $\frac{1}{2} < x < 2$; 5) нет; 6) $x > 3$.

569. 1) ± 3; 2) 2; 3) 5; 4) 9. **570.** 1) 5; 2) 0; $\frac{1}{2}$; 3) 5; 4) 8, **571.** 1) 1 и 7; 2) $-\frac{1}{3}$ и 2; 3) ± 1; 4) ± 1. **572.** 1) 9; 2) 25; 3) 2; 4) $-\frac{8}{9}$ и 8. **573.** 1) 0 и 1; 2) $\pm\sqrt{6}$ и $\pm\sqrt{11}$; 3) -1 и 5; 4) 1 и 2. **574.** 1) 4; 2) 16; 3) 10; 4) -1; 2 и $\frac{5 \pm \sqrt{134}}{10}$.

IV. Степень с рациональным показателем. Степенная функция

577. Может быть при: 1) $a = b \neq 0$; 2) $a = 0$, $b \neq 0$. **578.** 1) 1024; -81; -343; 0; 1; -1; -2; 2) 2; 0; 3) 0; 0. **579.** 23. **580.** 1, а) 341; б) 12 345; в) 7 013 002; 2, а) -8; 14; -4; 18; 0. б) 150°; 390°; 510°; 750°; 870°; в) $2\frac{3}{4}\pi$; $5\frac{1}{4}\pi$; $6\frac{3}{4}\pi$; $9\frac{1}{4}\pi$; $10\frac{3}{4}\pi$. **581.** 3) 10^{20}. **582.** 10^{21}. **583.** 1) $3\cdot 10^2 + 7\cdot 10 + 3$; 2) $2\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 4$; 3) $2\cdot 10^4 + 9\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 + 8$; 4) $5\cdot 10^5 + 10^3 + 9$; 5) $2\cdot 10^7 + 2\cdot 10$. **584.** 1) $10a + b$; 2) $10^2a + 10b + c$; 3) $10^{k-1}a + 10^{k-2}b + 10^{k-3}c + \ldots + 10i + l$. **585.** 1) $2^2 + 2$; 2) $2^4 + 2$; 3) $2^5 + 2^3 + 2$; 4) $2^2 + 2 + 2^0$; 5) $2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 2^0$. **586.** 1) 110; 2) 111; 3) 101 001; 4) 110 111; 5) 1 111 111. **587.** 1) 5; 2) 10; 3) 27; 4) 119. **588.** 1) -108; 2) 216; 3) -72. **590.** 64; 64; 729; -729; 4096; 256; 512; 1; 529; **591.** 1) нет; 2) да. **592.** 150 000 000 *км*.

593. $3{,}6 \cdot 10^{13}$ *эрг.* **594.** $3 \cdot 10^3$ раз. **596.** 1) $2{,}16a^6b^3$; 2) $-0{,}0621a^7xy^2$; 3) $9{,}025x^{k+3}y^nz^2$; 4) $2a^{m+3n}b^{m+2}c^5$. **597.** 1) $-3x^2yz$; 2) $10a^{m+1}b^5$; 3) $3a^2b^2x^2$; 4) $-\frac{4}{13}a^2b^2c^8$. **598.** 1) $\frac{2a^2}{3bx^2}$; 2) $\frac{7ab^2y^4}{x^2}$; 3) $\frac{2m^2xy}{n}$; 4) $\frac{2}{a}$. **599.** 1) $9a^4b^6$; $1\frac{32}{49}m^{14}n^2p^6$; $-0{,}008x^{15}y^6$; $\frac{16}{81}a^{12}b^4c^{20}$; 2) a^{3n}; a^{4k}; $1{,}44x^6y^{2m}$; $-\frac{1}{32}p^{5n}q^5z^{10}$; 3) $2^na^{2n}x^n$; $3^ma^mb^{3m}c^{5m}$; $x^{4k}y^{2k}$; $5^ka^{mk}b^{nk}$; 4) $\frac{16a^2b^6}{25m^6n^2}$; $\frac{8a^{3x}b^3}{27m^6p^{15}}$; $\frac{a^{4k}}{b^8c^{4n}}$; $\frac{p^{3k}q^{nk}}{a^{mk}}$. **600.** 1) $1{,}5b$; 2) $\frac{ax}{b^2y^4}$; 3) $\frac{4}{9}n^5$; 4) $\frac{2a^6b^3}{5x}$. **601.** 1) $\frac{b^7}{a^6pq}$; 2) $\frac{bm^5}{a^3c}$. **602.** 1) $a^4+2a+\frac{1}{a^2}$; 2) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-2$; 3) $4x^{10}+25y^{2m}+20x^5y^m$; 4) $\frac{m^{2x}}{4}+\frac{n^6}{9}-\frac{m^xn^3}{3}$. **603.** 1) $1+4a^2+9b^2+4a-6b-12ab$; 2) $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$; 3) $a^2-2a-1+\frac{2}{a}+\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}$; 4) $\frac{x^2}{4}-2x+2+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}$. **604.** 1) $25a^4-40a^3+46a^2-24a+9$; 2) $x^6+4ax^5+2a^2x^4(2-3a)+4a^4x^3(2a-3)+25a^6x^2-24a^8x+16a^{10}$; 3) $25a^4-30a^3+9a^2+\frac{10}{3}a-8+\frac{18}{5a}+\frac{1}{9a^2}-\frac{2}{5a^3}+\frac{9}{25a^4}$; 4) $64x^4-64x^3-16x^2+12+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}$. **605.** 1) 3; 2) $\frac{1}{8}$; 3) 135; 4) 1,5. **606.** 1) $-\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{16 \cdot 5^n}$. **607.** $2^{128}-1$. Указание. Умножить выражение на $(2-1)$.

613. 1) $\frac{1}{10}$; 1; $2\frac{1}{4}$; $\frac{81}{625}$; $11\frac{1}{9}$; 12; 1000; 2) $\frac{1}{25}$; -1; -3; $-\frac{8}{125}$; $-\frac{1}{64}$; -16; 3) 5; $\frac{1}{2}$; 8; 27; 0,08; 1000. **615.** 1) 8; 2) $\frac{1}{9}$; 3) 1,5; 4) $\frac{1}{4}$. **616.** 1) $\frac{2b}{a^2}$; 2) $\frac{3}{xy^2}$; 3) $\frac{m^2}{10a^2n}$; 4) $\frac{x^3}{a(a^2-b^2)}$. **617.** 1) a^2; 2) $2a^2bx^3$; 3) $b^2(a^2-x^2)$; 4) $10a(m-n)(m+n)^2$. **618.** 1) $\frac{2x^2y^3}{3ab^2}$; 2) $\frac{8a^2b(b-3)^3}{9(a-2)^2}$; 3) $\frac{a^3+b^3}{ab^2}$; 4) $\frac{a^2}{a^2+a+1}$. **619.** 1) 6^{-2}; 7^{-3}; 2^{-6}; 5^{-4}; 2^{-10}; 2) 10^{-1}; 10^{-3}; 10^{-6}; 10^{-10}; 3) $3 \cdot 5^{-2}$; $5 \cdot 2^{-5}$; $4 \cdot 3^{-4}$; $3 \cdot 10^{-3}$; $17 \cdot 10^{-7}$. **620.** 1) a^{-3}; $2a^{-1}$; ab^{-2}; m^3n^{-5}; ab^{-x}; m^pn^{-q}; 2) $3a^{-3}b^{-1}$; $a(a+b)^{-2}$; $3x(x-3)^{-1}$; $2^{-1}ab^5(a-b)^{-2}$; 3) $(a-b)(a+b)^{-1}$; $ab(a+b)(b-a)^{-1}$; $(b-a)(a+b)^{-1}$; $x^{-6}y^{12}(x^4+1)^2 \cdot (y^3-1)^{-3}$. **623.** 1) a^2; a^{-2}; 1; a^{-8}; 2) $6a$; $4x^3y^{-3}$; $0{,}45b^2$. **624.** 1) a^5; a^{-5}; a; 1; 2) $3a^{-3}$; $0{,}3y^3$; $\frac{16}{49}m^{10}n^{-1}s^{-1}$; $10a^2b^3x^4$. **625.** 1) $1-a^{-1}+a^{-2}-a^{-3}+a^{-4}$; 2) a^3-a^2-a-1; 3) $b^4+a^2b^2+a^4$; 4) $b^3-ab^2-a^2b+a^3$. **626.** 1) $\frac{y^2-x^2}{xy}$; 2) $x^{-3}-y^{-3}$; 3) $x^{-1}-y^{-1}$; 4) $x^{-2}-x^{-1}y^{-1}+y^{-2}$. **627.** 1) a^{-6}; a^{-6}; a^6; 2) $-x^{-6}$; 1; -1; 3) $0{,}04a^2b^{-4}c^6$; $-125m^6n^{-9}$; $0{,}16x^2y^{-8}$; 4) $\frac{25b^4}{a^2x^6}$; $-8m^3n^6$; $\frac{9x^{2m+2}}{m^{2x}}$. **628.** 1) $a^{-2}-b^{-2}$; 2) $a^{-10}-b^{-10}$; 3) $x^{-4}-2+x^4$; 4) $m^3+3+3m^{-3}+m^{-6}$. **629.** 1) $a^{-3}+b^{-3}$; 2) $a^{-6}-b^{-6}$; 3) $m^{-2}+n^{-2}$;

4) $x^2-xy^{-1}+y^{-2}$. **630.** 1) -10; 2) 2; 3) $3\frac{2}{3}$. **631.** 1) 1; 5; 2) -3; 2; 3) $-0{,}3$; 1. **632.** $\frac{4a^nb^n}{b^{2n}-a^{2n}}=\frac{25}{156}$. **633.** $\frac{2b^{2n}}{a^n(b^{2n}-a^{2n})}=55\frac{5}{9}$. **634.** -1. **635.** $x(x-a)$. **636.** $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$. **642.** 1) ± 1; 2) -2; $-\frac{1}{2}$; 2; 3) нет решений; 4) 1.

644. 1) 4 и 5; 2) 4 и 5; 3) 3 и 4; 4) 3 и 4; 5) 18 и 19. **645.** 1) $x\geqslant 0$; 2) x — любое действительное число. **647.** 1) $x\geqslant -1$; 2) $x\geqslant 2$; 3) $|x|\leqslant 1$; 4), 6), 9) — любое действительное число; 5) $x\leqslant 1$; 7) $x\geqslant\frac{1}{2}$; 8) $-4\leqslant x\leqslant 3$. **651.** 2) $-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$; $-\sqrt[7]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 3) $-\sqrt[3]{b-a}$; $-\sqrt[5]{(3-a)^3}$.

652. 9; 3; -3; -9. **653.** 1) $a\geqslant -1$; 2) $a\leqslant 2$; 3) $a>0$. **654.** 2) 4; 49; 27; -1; 3) $\sqrt{2}-1$; $2-\sqrt{3}$; $3-\sqrt{7}$; $\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$. **655.** 1) $2-a$; 2) $a-2$; 3) $a-b$; 4) $b-a$. **656.** 1) $a\leqslant 3$; 2) $a\geqslant 1$; 3) $a\geqslant 0{,}5$; 4) a — любое действительное число. **658.** 1, а) $x-1$; б) $1-x$; 2) а) $x-y$; б) $y-x$; 3) а) $b-a$; б) $a-b$. **660.** n — четное число: 1) 1; 2) -1; 3) не имеет смысла; n — нечетное число: 1) 1; 2) 1; 3) не имеет смысла.

663. 4) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}ab^2}$; $\sqrt{\frac{5x}{9m}}$; $\sqrt[3]{\frac{2a^2b}{5x^2y^3}}$; $\sqrt[4]{\frac{3m^3}{7a^2b}}$; 5) $\sqrt{2a^kb^3}$; $\sqrt[3]{xy^2}$; $\sqrt{na^3b^n}$; 6) $\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; $\sqrt{a-5}$; $\sqrt{x-a}$. **666.** Отрицательным. **667.** 5) $-\sqrt[15]{27}$; $-\sqrt[15]{32}$ и $\sqrt[15]{100}$; 7) $\sqrt[36]{x^{30}}$; $\sqrt[36]{y^{-27}}$ и $\sqrt[36]{z^{33}}$; 9) $\sqrt[6n]{a^{12}b^{-18}}$; $\sqrt[6n]{a^{-3n}b^{2n}}$ и $\sqrt[6n]{a^4b^6}$; 10) $\sqrt[2k(2k+1)]{\frac{a^{5(2k+1)}b^{2k+1}}{x^{3(2k+1)}y^{2(2k+1)}}}$ и $-\sqrt[2k(2k+1)]{\frac{a^{4k}x^{6k}}{b^{2k}y^{4k}}}$.

668. 3) $ab^{\frac{2}{3}}$; $5x^{\frac{1}{2}}$; $(a-b)^{-\frac{1}{2}}$; $(x+2)^{-\frac{1}{3}}$; $2a(a+b)^{\frac{1}{3}}$. **669.** 3) $\sqrt{a^{-1}}$; $\sqrt[4]{n^{-15}}$; $\sqrt[m]{x^{-3}}$; $\sqrt{y^{-n}}$; $\sqrt[n]{b^{-m}}$; 4) $\sqrt[3]{a+b}$; $\sqrt[4]{(m-n)^3}$; $\sqrt{(1+x)^{-1}}$; $5\sqrt[3]{a^{-2}}$; $2\sqrt[5]{(a^2-b^2)^2}$; 5) $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt{b}$; $\sqrt{\sqrt{x}-1}$; $2a\sqrt[5]{(\sqrt[3]{m^2}+\sqrt{n})^2}$.

671. 1) 18; 2) 1; 3) 10; 4) 40. **672.** 1) 4,9; 2) 1; 3) $4\frac{11}{16}$. **673.** 1) а) $V^{\frac{1}{3}}$; б) $V^{\frac{2}{3}}$; 2) 4; 16. **676.** 4) $x^{\frac{10}{5k}}$ и $y^{\frac{3k}{5k}}$; 5) $a^{\frac{15n}{3n^2}}$; $b^{\frac{3k}{3n^2}}$ и $c^{\frac{n}{3n^2}}$. **682.** 1) a^2+1, если $a\geqslant 0$; 2) $\frac{4a+3-\sqrt{8a+9}}{8}$, если $a\geqslant 0$; 3) $\frac{a(6-\sqrt{6})}{3}$, если $a>0$; $\frac{a(6+\sqrt{6})}{3}$, если $a<0$; 0, если $a=0$; 4) $\frac{m^4-16m^2+4}{4m^2}$, если $m\geqslant\sqrt{2}$; 5) $\frac{8+\sqrt{13}}{6}\cdot a$, если $a>0$; $\frac{8-\sqrt{13}}{6}\cdot a$, если $a<0$; 0, если $a=0$.

686. 1) -1; 0; 1; 2) $\sim -0{,}9$; 3) $\sim -1{,}8$; 1 (рис. 92); 4) -1; 1 (рис. 93).

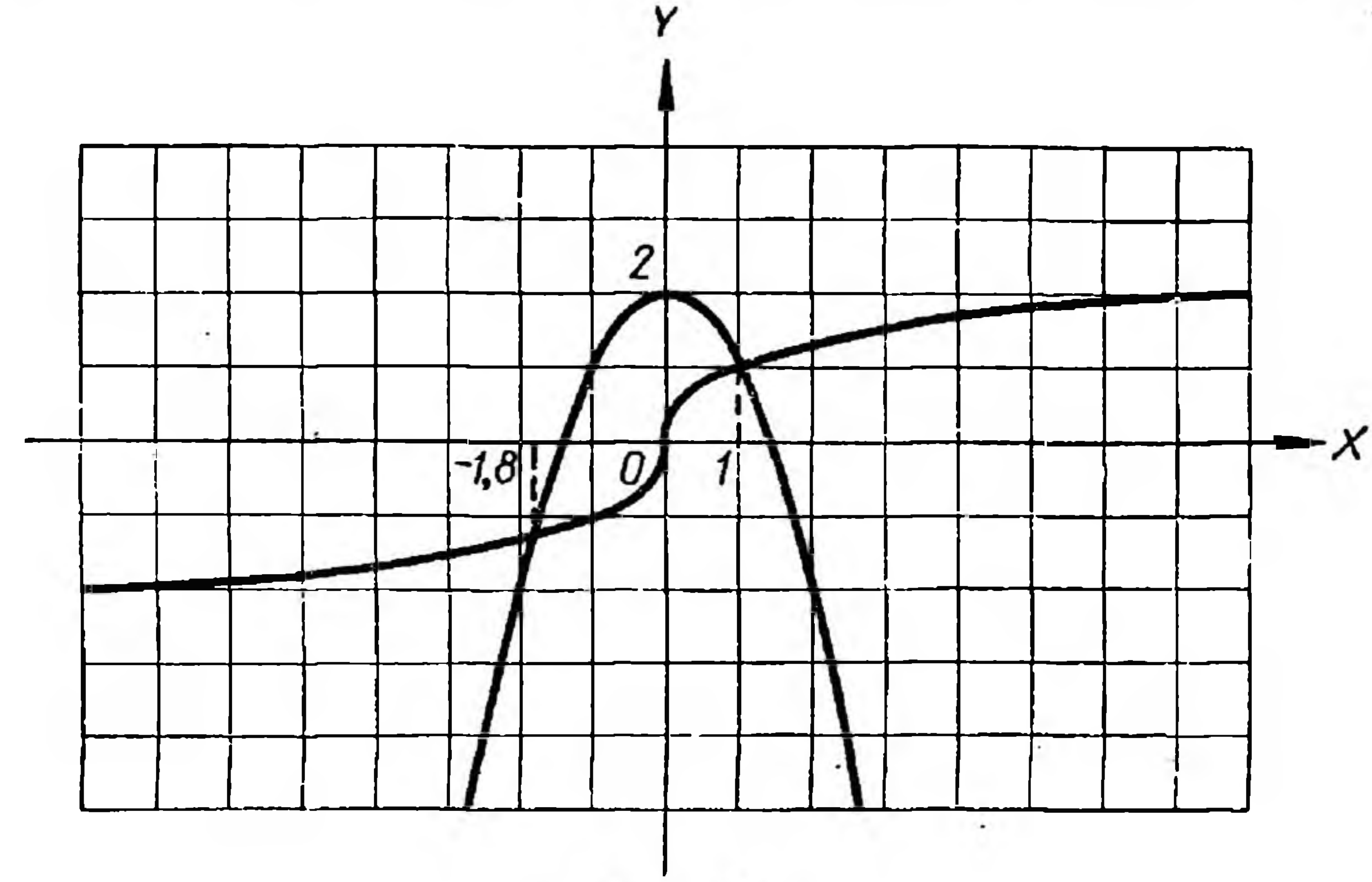


Рис. 92

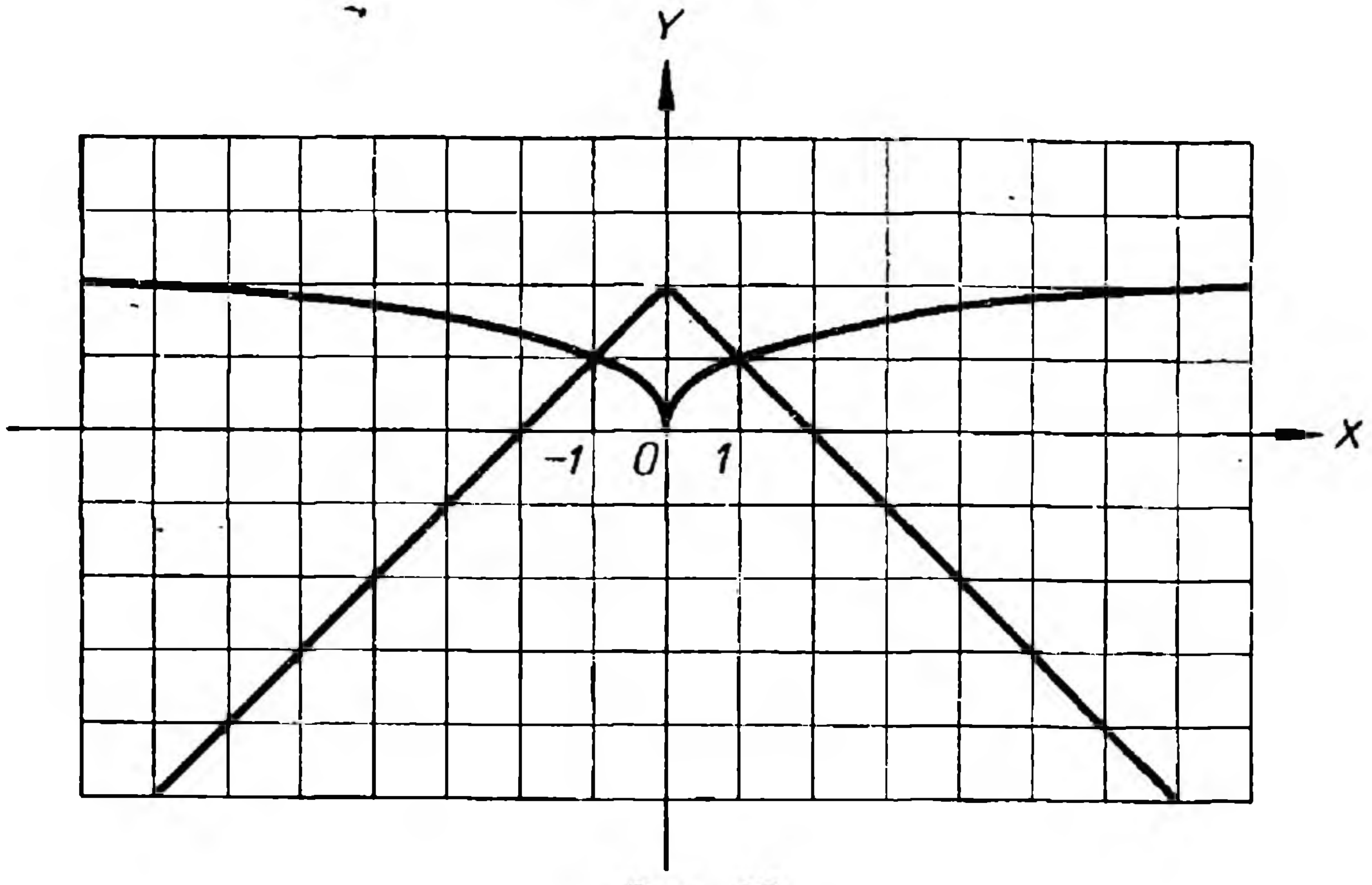


Рис. 93

688. 1) $a^{1\frac{1}{4}}$; 2) $b^{\frac{13}{20}}$; 3) $10\,x^{\frac{2}{15}}$; 4) $\frac{2}{3}am^{-\frac{1}{24}}$. 689. 1) $m^{\frac{1}{4}}$; 2) $n^{\frac{1}{5}}$; 3) $2p^{1\frac{1}{2}}$; 4) $2aq^{-1}$. 690. 1) $x^{\frac{5}{9}}$; 2) $pq^{-\frac{1}{2}}$; 3) $8a^{1\frac{1}{8}}b^{-1\frac{1}{2}}$; 4) $\left(\frac{10}{3}\right)^5 mn^{1\frac{2}{3}}$.

691. 1) $a^{\frac{2}{3}}b^{-1\frac{1}{3}}$; 2) $0{,}5m^{\frac{1}{6}}n^{-\frac{2}{15}}$; 3) $0{,}5a^{\frac{3}{5}}x^{\frac{3}{20}}y$; 4) $10^{-5}a^{-5}b^{-2\frac{1}{2}}p^2q^{-3\frac{1}{3}}$.

692. 1) $ab^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b$; 2) $m-n$; 3) $9x^{1\frac{1}{3}}-y^3$; 4) $p^{\frac{2}{3}}-4q^{-\frac{1}{2}}$.

693. 1) $a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b$; 2) $a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$; 3) $4m^{-\frac{3}{2}}+12+9m^{\frac{3}{2}}$;

4) $x^{-1}-x^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{3}}$. 694. 1) $x-3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-y$; 2) $m^{-2}-3+3m^{2}-m^{4}$; 3) $p^{\frac{3}{2}}-3p^{\frac{1}{2}}+3p^{-\frac{1}{2}}-p^{-\frac{3}{2}}$; 4) $a^{1\frac{3}{5}}-a^{-\frac{4}{5}}$. 695. 1) $a-a^{\frac{3}{2}}$; 2) $b^{2}-b^{-2}$; 3) $z^{\frac{4}{3}}-1$; 4) $x-y$. 696. 1) $a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b$; 2) $x^{0,5}-y^{0,5}$; 3) $2m^{\frac{1}{3}}-3-4m^{-\frac{1}{3}}$; 4) $p^{-\frac{1}{6}}+2p^{-\frac{1}{2}}$. 697. 1) $\frac{a^{0,5}x^{0,5}}{a^{0,5}+x^{0,5}}$; 2) $m^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}$; 3) $-\frac{a+b}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}$; 4) $2\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)$. 698. 8192. 699. $\frac{7}{12}$. 700. $\frac{17}{24}$. 702. 1) abc; 2) $a^{-\frac{1}{2}}b^{-3}$. 703. 1) $a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{1}{2}}$; 2) xyz; 3) $ab\sqrt{3}$. 704. 1) 4; 2) 5; 3) 9; 4) 25; 64. 705. 1) 5; 2) 7; 3) —1; 4) —5; $6\frac{3}{7}$. 706. 1) —1; 3; 2) —2; 3) —1; 4) нет. 707. 1) 3; 2) $-1\frac{4}{5}$; 3; 3) 12; 4) 1; 0. 708. 1) 0; 2) ±3; 3) 49; 4) $1\frac{1}{27}$. 709. 1) 1; 512; 2) $\pm\sqrt{6}$; $\pm\sqrt{11}$; 3) —1; 5; 4) 1; 2. 710. 1) a; $a+1$; 2) a; 3) $2a+b$; 4) $\frac{a^{2}(a^{2}-4)}{4(a^{2}-1)}$. 711. 1) a; 2, если $a\geqslant 2$; 2) $a+1$, если $a\geqslant -1$; 3) $a(a-2)$, если $a\neq 1$; 4) $a+4$, если $a\geqslant -4$.

713. 2) 18; 80; 280; 120. 714. 1) $\frac{11}{13}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{5}$; $2\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{2}$; 2) 0,1; 0,12; 0,2; 0,7; 0,2. 715. 1) 25; $\frac{9}{16}$; 9; 4; 0,001; 2) a^{3}; x^{4}; m^{4}; n^{4}; b^{3}; 3) x^{k}; a^{n}; b^{5}; z^{5}; a^{x}. 716. 1) ab^{3}; $x^{2}y$; $2mn^{3}$; $\frac{1}{4}p^{2}qr^{4}$; 2) $2a^{2}b^{3}$; $-4x^{2}yz^{3}$; $-7m^{4}n^{3}$; $0,3a^{3}bc^{5}$; 3) $\frac{2ab^{2}}{3x^{4}y^{3}}$; $-\frac{7m^{4}}{4n^{2}p^{5}}$; $-\frac{a^{2}b^{4}}{2x^{3}}$; $\frac{2r^{4}s^{3}}{3p^{6}q}$. 717. 1) $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b^{2}}$; $-\frac{1}{x^{2}}$; $\frac{3}{z^{3}}$; 2) $\frac{5n}{7m^{2}}$; $-\frac{5}{6a}$; $-\frac{a}{2b^{2}}$; $\frac{2ab^{3}y}{5x^{2}}$; 3) $0,1a^{n}$; $-\frac{3n^{n}}{m^{2}}$; $\frac{2a^{2n}}{b^{3k}}$.

720. 1) $2\sqrt{5}$; $7\sqrt{3}$; $6\sqrt{3}$; $7\sqrt{5}$; $11\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt[3]{3}$; $3\sqrt[3]{2}$; 8; $5\sqrt[3]{3}$; $6\sqrt[3]{5}$; 3) $2\sqrt[4]{5}$; $3\sqrt[4]{5}$; $3\sqrt{2}$; $2\sqrt[5]{5}$; $3\sqrt[5]{2}$. 721. 1) $x\sqrt{x}$; $a\sqrt[3]{a}$; $m\sqrt[5]{m^{2}}$; $n^{3}\sqrt[4]{n}$; $z^{2}\sqrt[n]{z}$; 2) $5n\sqrt{n}$; $3a^{2}\sqrt{5a}$; $2x\sqrt[3]{3}$; $2m^{2}\sqrt[5]{5n^{3}}$; $a^{n}b\sqrt[4]{ab}$; 3) $4a^{2}\sqrt{2ab}$; $a^{2}\sqrt{\frac{a}{2}}$; $\frac{2ax}{7}\sqrt{3b}$; $\frac{2}{3mn^{2}}\sqrt[4]{\frac{5x^{3}}{mn}}$. 722. 1) $xy\sqrt[k]{y}$; $a^{3}b^{3}\sqrt[n]{a}$; $3a^{x+1}b\sqrt[5]{a^{x}}$; 2) $\frac{2m^{n+1}}{a^{2}b^{n}}\sqrt[3]{\frac{5m^{2}}{b^{n}}}$; $\frac{x^{2}}{y^{x}}\sqrt[m]{x}$; $\frac{xy^{b}}{z^{a}}\sqrt[a]{x^{b}}$.
724. 1) $(\sqrt{10}-3)\sqrt{2}$; 2) $3(2-\sqrt{3})\sqrt{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$; 4) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1}$.
725. 1) $4(9-4\sqrt{5})\sqrt{2}$; 2) $4(9-4\sqrt{5})\sqrt{3}$; 3) $2(1-\sqrt{3})\sqrt[3]{5}$; 4) $\frac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt[3]{3}}$. 726. 1) $(1-x)\sqrt{1-x}$; 2) $x(x-2)^{2}\cdot\sqrt{x(x-2)}$;

3) $(2-x)(x-1)^2\cdot\sqrt{(2-x)(x-1)}$; 4) $\frac{a\,|1-a|}{2-a}\sqrt[4]{a(1-a)^2}$.
727. 1) $(a-3)\sqrt{a-3}$; 2) $(1-a)\cdot\sqrt{1-a}$; 3) $(x-1)\sqrt[3]{x-1}$; 4) $x(2-x)\sqrt[4]{x(2-x)^2}$, если $0\leqslant x\leqslant 2$, или $x(x-2)\sqrt[4]{x(x-2)^2}$, если $x>2$. **728.** 1) $(m-\sqrt{2})\sqrt{m-\sqrt{2}}$; 2) $(\sqrt{3}-x)^2x^2\sqrt{\sqrt{3}-x}$; 3) $\frac{1}{y}\sqrt[3]{x(x+y^2)}$; 4) $\sqrt[3]{a(x^2+x+1)}$.

730. 1) $2\sqrt{10}<3\sqrt{5}$; 2) $4\sqrt{3}>3\sqrt{5}$; 3) $\sqrt[3]{17}>2\sqrt[3]{2}$; 4) $4\sqrt[3]{3}<2\sqrt[3]{25}$. **732.** 2) $\sqrt[3]{24}$; $\sqrt[3]{54}$; $\sqrt[3]{240}$; $\sqrt[4]{177}$; 3) $\sqrt{\frac{4}{3}}$; $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$. **733.** 1) $\sqrt{9a}$; $\sqrt{3a^2}$; $\sqrt{50x^3}$; $\sqrt[3]{24m^5}$; 2) $\sqrt{49a^5b}$; $\sqrt[3]{27a^5b^7}$; $\sqrt[5]{32n^6p^{10}q^{17}}$; 3) $\sqrt{ax}$; $\sqrt[3]{\frac{m^2}{n^2}}$; $\sqrt[4]{\frac{2}{a^5}}$; $\sqrt{\frac{2(x-z)}{x+z}}$. **734.** 1) $\sqrt[3]{a^3+1}$; 2) $\sqrt{ab(b-a)}$; 3) $\sqrt{\frac{1}{x}}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{n(m-n)}{(m+n)^2}}$. **735.** 1) $\sqrt{\frac{2a(a+b)}{a-b}}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt[3]{x-y}$; 4) $\sqrt{\frac{m^2+mn+n^2}{m^2-mn+n^2}}$. **736.** 1) $-\sqrt{a(a-1)}$; 2) $-\sqrt[4]{2b(2-b)}$; 3) $-\sqrt[2k]{\frac{m^{2k-1}}{n-m}}$.

738. 1) $\sim 2{,}42$; 2) $\sim 3{,}07$. **739.** 2) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{6}$; $\frac{1}{2}\sqrt[3]{20}$; $\frac{2}{3}\sqrt[3]{9}$; $\frac{3}{2}\sqrt[3]{10}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{10}$; $\sqrt[4]{9}$; $2\sqrt[5]{18}$; $3\sqrt[6]{66}$. **740.** 1) $\frac{1}{5b}\sqrt{5ab}$; $5\sqrt[3]{3ax}$; $2ab\sqrt[4]{4ab^2}$; 2) $\frac{1}{b^2}\sqrt[3]{ab}$; $\frac{1}{3mn}\sqrt[3]{90mn}$; $\frac{3x}{ay}\sqrt[5]{6a^2x^2y^4}$. **741.** 1) $\sqrt[3]{a-b}$; 2) $(a-b)\sqrt{ab(a+b)}$; 3) $\sqrt{ab(b-a)}$; 4) $\frac{a+b}{a^2b^2}\sqrt[3]{ab(a^2+b^2)}$. **742.** 1) $\sqrt[n]{nx}$; 2) $\frac{1}{p+q}\sqrt[2k+1]{p^2-q^2}$; 3) $ab\sqrt[n]{a^nb^2+a^2b^n}$; 4) $\sqrt[2k]{m^kn^{3k}-m^{3k}n^k}$. **743.** 1) $\sim 0{,}816$; 2) $\sim 1{,}225$; 3) $\sim 0{,}612$. **744.** 1) $10\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{10}$; 3) $\sqrt[3]{6}$; 4) $\sqrt[3]{3}$. **745.** 1) $\sqrt[4]{18ab}$; 2) $\frac{a}{b}\sqrt[3]{5ab}$; 3) $\sqrt{mn(m-n)}$; 4) $\frac{a-b}{ab}\sqrt[3]{(a^2+b^2)^2}$. **746.** 1) $a\sqrt[n]{ab}$; 2) $y\sqrt[2k]{x^ky^k(x-y)}$; 3) $\sqrt[m]{p^2q^2}$.

747. 1) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$; 2) $5\sqrt[4]{x}+5\sqrt{xy}$.

753. $\sim 25{,}8$. **754.** 1) $\sim 12{,}7$; 2) $\sim 1{,}7$. **755.** 1) $\sim 1{,}74$; 2) $\sim 1{,}41$; 3) $\sim -0{,}22$; 4) $\sim 23{,}40$. **756.** 1) 20; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{3}$. **757.** 1) $-16\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt{7}$; 3) $3\sqrt{26}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+10\sqrt{3}$; 4) $5\sqrt[3]{2}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{4}$. **758.** 1) $17\sqrt{m}$; 2) $4a^{\frac{1}{3}}$; 3) $3a\sqrt[3]{2a}+\sqrt{2a}$; 4) $6x^{\frac{1}{4}}$. **759.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **760.** 1) $\sqrt{a}$; 2) $\frac{2\sqrt{m-2}}{m-2}$.

761. 1) $2a\sqrt{a-1}$; 2) $\frac{(3b-2a)\sqrt{a-b}}{a-b}$. **762.** 1) $(m+n)\sqrt{m-n}$; 2) $2\sqrt{xy}$. **763.** 1) $\sqrt[3]{a^2-b^2}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2-1}$.

764. 1) $\sim 4{,}58$; 2) $\sim 23{,}24$. **765.** 1) 6; 15; 30; 2) $3\sqrt{5}$; $12\sqrt{3}$; $60\sqrt{2}$; 3) 2; $\sqrt{2}$; $30\sqrt{3}$; 4) $y\sqrt{x}$; 6; $\frac{1}{2a}\sqrt{5}$. **766.** 1) 2; 6; 50; 2) $x\sqrt[4]{x}$; $2a\sqrt[5]{a}$; $n\sqrt[3]{18}$; 3) $\frac{2}{3}am\sqrt[3]{5a^2}$. **767.** 1) x^2-1; 2) a^2-b. **768.** 1) x^ny^n; 2) $a^{2m+1}b^{n+1}$; 3) $\frac{1}{2}a^{m-1}b^{n+1}$; 4) $3x^{m-1}y^{2n+1{,}5}$. **769.** 1) 14; 2) $3{,}5\sqrt{30}+3\sqrt{2}$; 3) $15\sqrt{6}-6\sqrt{10}+20$; 4) $-3{,}15+4{,}75\sqrt{6}$. **770.** 1) $z+\sqrt{yz}-1$; 2) $(a+b)^2$; 3) $6xy-1+3y\sqrt[3]{x^2y}$; 4) $(a-b)^3$. **771.** 1) 1; 2) $2\sqrt{35}-12$; 3) $29\sqrt{6}-12$; 4) $6+4\sqrt{11}$. **772.** 1) $\sqrt{xy}$; 2) $4a+7\sqrt{3ax}-6x$; 3) $\frac{m-1}{n}(5\sqrt{m}+m)$; 4) $9-\frac{1}{9}x^3y$. **773.** 1) $1-x$; 2) $y(4-9y)$; 3) 2; 4) $2b-a^2$. **774.** Взаимно обратные пары: 1); 3); 4). **775.** 1) $\frac{5}{6}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})$; 2) $\frac{1}{36}(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})$; 3) $\frac{4}{15}\left(\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a^2}-4\sqrt[4]{a^3}\right)$; 4) $\frac{4a\sqrt{2}-b\sqrt{2}+a\sqrt{3}-4b\sqrt{3}}{a^2-b^2}$. **776.** 1) $5\sqrt{30}+14\sqrt{10}-19$; 2) $\frac{1}{30}(370-90\sqrt{2}+72\sqrt{5}-15\sqrt{10})$. **777.** 1) $\frac{(y-1)(x^3+y^3)}{xy^2}$; 2) $2a^3b(2+\sqrt{3}-\sqrt{7})$. **780.** 1) $1-a$; 2) $m-n$. **781.** 1) $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}$; 2) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$. **782.** 1) $x^2-2x-11=0$; 2) $(1-a^2)x^2-2a^{\frac{1}{2}}x+a=0$; 3) $4x^2-8a^{\frac{1}{3}}x+4a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}=0$; 4) $ax^2+bx+c=0$. **783.** В три раза. **784.** 4) 3; $\frac{5}{m}\sqrt{n}$; $-\frac{x}{7y}\sqrt[3]{14}$; 5) $0{,}4ab$; $\sqrt[3]{a}$; $\frac{n^2}{m^2}\sqrt[5]{m}$. **785.** 1) $\sim 3{,}2$; $\sim 3{,}5$; 2) $\sim 19{,}0$; $\sim 0{,}4$; 3) $\sim 1{,}7$; $\sim 1{,}6$. **786.** 1) $2m-1$; 2) $x+y$; 3) $\frac{x+y}{b}$; 4) $\frac{(a^2-b^2)\sqrt{y}}{6x^2y}$. **787.** 1) a; 2) $2xy^k$; 3) x^2y; 4) $\frac{a^3}{b^3}$. **788.** 1) $2+3\sqrt{2}$; 2) $-4\frac{1}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{6}$. **789.** 1) $a+x$; 2) $a-\frac{a}{x}$; 3) $3-\sqrt{m}+\sqrt{n}$; 4) $\frac{x^2+3xy-y^2}{xy}$. **790.** 1) $\frac{m^3n^3+(m^3-n^3)\sqrt[3]{mn^2}}{m^2n^2}$; 2) $\frac{b}{3}\sqrt[3]{36a^2}-\frac{b^3}{2a^2}\sqrt[3]{18a^2}+\frac{b}{3a}\sqrt[3]{18a^2}$. **791.** 1) $a^{m-2}+a^{2-m}-a^{2m+1}$; 2) $x^2\sqrt[m]{x^3}+x^3\sqrt[m]{x^2}+x^4\sqrt[m]{x}$. **792.** 1) $\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{5})$; 2) $\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5})$; 3) $\sqrt[3]{m}(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{m})$; 4) $\sqrt[3]{3ay}(\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{3y})$. **793.** 1) $\sqrt{x+y}\cdot(\sqrt{x-y}+1)$; 2) $\sqrt{b-c}\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})$; 3) $\sqrt{m^2+mn+n^2}\cdot(\sqrt{m-n}-1)$; 4) $\sqrt{x-y}\cdot(\sqrt{x+y}+\sqrt{x^2+xy+y^2})$. **794.** 1) $\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$; 2) $\sqrt{m}(\sqrt{m}-1)$;

3) $\sqrt{x-y}\cdot(\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y})$; 4) $\sqrt{a^2+b^2}\cdot(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2})$. **795.** 1) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})$; 2) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})\cdot(a+b)$; 3) $(\sqrt{m}+2)\times\times(\sqrt{m}+3)$; 4) $(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$. **796.** 1) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$; 2) $(\sqrt{b}+1)\cdot(\sqrt{b}-1)$; 3) $(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)$; 4) $(\sqrt{ab}+\sqrt{3})\times\times(\sqrt{ab}-\sqrt{3})$; 5) $(\sqrt{x}+a\sqrt{b})\cdot(\sqrt{x}-a\sqrt{b})$; 6) $(a\sqrt{ab}+2\sqrt{2})\times\times(a\sqrt{ab}-2\sqrt{2})$. **797.** 1) $\frac{1}{5}\sqrt{10}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{ab^2x}}{ab}$; 3) $\frac{\sqrt{10}}{2}$; 4) $\sqrt{ab}-\sqrt{bc}$.

799. 1) $\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{5y}$; 2) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; 3) $\sqrt[3]{3ax}-\sqrt[3]{bx}$; 4) $\sqrt{a}-\sqrt{b}+1$.

800. 1) $a^{\frac{23}{24}}$; 2) $x^{-\frac{2}{3}}$; 3) $x^{\frac{2}{3}}$; 4) $2m^{-\frac{1}{12}}$. **801.** 1) $a^{\frac{11}{5}}b^{\frac{43}{30}}$; 2) $x^{\frac{51}{5}}y^{\frac{9}{4}}$; 3) 4; 4) $a^{\frac{1}{2n}}$. **802.** 1) 1; 2) $b^{-0,3}$.

803. 3) $27a^6$; $2500a^2$; $\frac{n^2}{m^2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; $25a\sqrt[3]{a}$; $-96a^3\sqrt[3]{9a}$. **804.** 3) $\sqrt[5]{5}$.

805. 1) $-0,001x^2y\sqrt{xy}$; 2) $-\frac{8}{81x^4}\sqrt[3]{18x^2}$; 3) $(x^2+y^2)^{mp}$; 4) $\frac{m^3}{(1+m)^4}\sqrt[3]{m(1+m)^2}$. **806.** 1) $\frac{a^6}{4b^{2(n+1)}}$; 2) $\frac{x^9}{2y^7}\sqrt[5]{2x^3y^3}$; 3) $\frac{1}{x^my^{2n-1}(x-y)}$; 4) $\frac{b^{6m}(a-b)^m}{a^{3m}}$. **807.** 1) $6-2\sqrt{5}$; 2) $5+2\sqrt{6}$; 3) $18\frac{3}{4}$; 4) $\frac{1}{9}(95-30\sqrt{2})$. **808.** 1) $x+y+2(xy)^{\frac{1}{2}}$; 2) $a^4-2a^{\frac{5}{2}}+a$; 3) $m^{\frac{2}{3}}+4(mn)^{\frac{1}{3}}+4n^{\frac{2}{3}}$; 4) $4x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{3}}-2xy^{-1}+4^{-1}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{3}}$. **809.** 1) $\sqrt[3]{25}-\\-2\sqrt[6]{675}+3$; 2) $2\left(\sqrt[3]{2}+4\sqrt[6]{2}+4\right)$; 3) $55-63\sqrt{2}$; 4) $a^{\frac{9}{2}}+3a^{\frac{11}{3}}+\\+3a^{\frac{13}{6}}+a$. **810.** 1) $6+2(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})$; 2) $17+2(\sqrt{10}-2\sqrt{5}-\\-5\sqrt{2})$; 3) $\frac{1}{2}(30-4\sqrt{2}-3\sqrt{3}+12\sqrt{6})$; 4) $a^3+a^2\sqrt{2}+\frac{a}{2}$.

811. 1) 2; 2) $4\sqrt[8]{2}$; 3) 24; 4) 8. **812.** Указание. Представить подкоренное выражение как квадрат: 1) двучлена; 2) трехчлена. **813.** 1) $(2\sqrt{2}+1)^2$; 2) $(2\sqrt{5}-1)^2$; 3) $(2\sqrt{6}-1)^2$; 4) $\frac{1}{2}(3\sqrt{3}+5)^2$. Указание. Данные выражения представить как квадраты двучленов. **814.** 1) 2; 2) 2; 3) 2; 4) 2. Указание. Подкоренное выражение представить в виде квадрата двучлена (1 и 2) и в виде куба двучлена (3 и 4). **817.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$;

2) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{3\sqrt{5}}+\sqrt[4]{5}$; 4) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. **819.** 1) 15; 2) 12; 3) 3; 4) 2. **820.** 1) $\sim 2,24$; 2) $\sim 1,90$; 3) $\sim 1,33$; 4) $\sim 1,28$. **821.** 1) $\sim 24,49$; 2) $\sim 8,41$; 3) $\sim 3,17$; 4) $\sim 0,05$. **822.** 3) $\sqrt[6]{ab}$; $\sqrt[3]{mn^2}$; $\sqrt[5]{3x^2y}$; 4) $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[14]{b^3}$; $\sqrt[15]{24}$. **823.** 1) $\sqrt[12]{x^7}$; 2) $\sqrt[15]{\frac{n^2}{m^2}}$; 3) $\sqrt[10]{8}$; 4) $\sqrt[18]{\frac{32}{243}}$.

824. 1) $\sqrt[9]{a^5}$; 2) $-\sqrt[12]{80a^{11}b^4}$; 3) $\sqrt[4]{\dfrac{m-n}{m+n}}$; 4) $-\sqrt[15]{(x-y)^2}$. 825. 1) a; 2) $x^{\frac{1}{4}}$; 3) $\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{9}}$; 4) $2^{\frac{1}{6}}$. 826. 1) $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}}$; 2) $x^{2,5}$; 3) ax; 4) a.

827. 3) $\sqrt[3]{a^2}$; $x\sqrt[5]{x}$; $m^2\sqrt[8]{m^5}$; $n^3\sqrt[7]{n^2}$; 4) $\sqrt[n]{x}$; $a\sqrt[m]{a^2}$; $\dfrac{a^3\sqrt[n]{x^3}}{x^2}$; $a^{k-1}\sqrt[k]{a}$. 828. 5) $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x+3}$; 6) $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{2(a-b)}$. 829. 5) $\dfrac{m(\sqrt{m}+1)}{m-1}$; 6) $\sqrt{x}-1$. 830. 2) $\sqrt{5}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})$; 3) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; 4) $(2+x)\times\times(\sqrt{2}+\sqrt{x})$; 5) $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a-b}$; 6) $\dfrac{(a+\sqrt{x})^2}{a^2-x}$. 831. 1) $\dfrac{\sqrt{(1-m)(1-\sqrt{m})}}{1-m}$; 2) $\dfrac{\sqrt{(4-n)(2+\sqrt{n})}}{4-n}$; 3) $\dfrac{\sqrt{7}(3+\sqrt{2})}{7}$; 4) $\dfrac{7-\sqrt{13}}{6}$.

832. 1) $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$; 2) $2(7\sqrt{2}+3\sqrt{7})$; 3) $\dfrac{4-\sqrt{6}}{10}$; 4) $\dfrac{75-\sqrt{35}}{130}$.

833. 1) $1+2a-2\sqrt{a(1+a)}$; 2) $\dfrac{2x+a-2\sqrt{x(x+a)}}{a}$; 3) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}$; 4) $\dfrac{a^2+b^2+ab-(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$. 836. 1) $2-2\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

837. $1-\sqrt{3}$; $-3-\sqrt{3}$. 838. 2) $\dfrac{2}{3-\sqrt{3}}$; $\dfrac{1}{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$; $\dfrac{4}{15(\sqrt{6}+2)}$; $\dfrac{3}{2(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})}$. 839. 1) $\dfrac{m-1}{m(\sqrt{m}-1)}$; 2) $\dfrac{25-x}{(5-\sqrt{x})^2}$; 3) $\dfrac{a-b}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$; 4) $\dfrac{m^2-m}{(m-\sqrt{m})^2}$. 840. 1) $\dfrac{1}{2x^2-2x\sqrt{x^2-1}-1}$; 2) $\dfrac{2}{a^2+1+\sqrt{a^4-1}}$; 3) $\dfrac{(m-n)^2}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^5}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$.

841. 1) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$; 2) $1,5(3\sqrt{6}-4\sqrt{3}+5\sqrt{2}-6)$; 3) $\dfrac{2+\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}$; 4) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. 842. 1) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}$; 2) $\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}$; 3) $\dfrac{\sqrt{a-b}\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$; 4) $\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{6}+1)}{5}$.

843. 1) $\dfrac{2}{2-a}$; 2) $-12x^{\frac{2}{3}}$; 3) 0; 4) 1. 844. 1) $-\dfrac{1}{287}(289+24\sqrt{2})$; 2) $\dfrac{a}{b}$; 3) $x^{-\frac{7}{8}}$. 845. 1) x^2+x+1; 2) $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$; 3) 1; 4) 0. 846. 1) $2\sqrt[4]{x}$; 2) -2; 3) $\sqrt{bx}+1$. 847. 1) $-\dfrac{n}{m}$; 2) $\dfrac{2}{2-a}$, если $1<a<2$; $\dfrac{2\sqrt{a-1}}{a-2}$, если $a>2$; 3) $\dfrac{\sqrt{ab}}{b}$, если $a>b>0$; $\dfrac{\sqrt{ab}}{a}$, если $b>a>0$. 848. 0. Указание. Убедиться, что выражение в скобках равно нулю. 850. 8. 851. 96. 852. 10. 853. 0. 854. $bx^2-2ax+a=0$.

V. Тригонометрические функции любого аргумента

858. Векторные величины: сила, скорость, ускорение. **859.** 1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{C\text{Д}}$; 2) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{\text{Д}C}$. **860.** 2) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{C\text{Д}}$; $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$; 3) $|\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{AB}|$. **861.** 2, а) В том случае, если векторы a и b имеют одинаковое или противоположное направление; б) $|a|=|b|$, причем векторы a и b не лежат на одной прямой или на параллельных прямых. **862.** 1) $\overrightarrow{AC}=m+n$; 2) $\overrightarrow{B\text{Д}}=m-n$. **865.** $|a|=|b|$, причем $a+b\neq 0$. **866.** $a+b+c=0$. **867.** В том случае, когда векторы a и b одинаково направлены. **868.** 1) $a\perp b$. 2) и 3) a и b параллельны и имеют противоположное направление. **869.** $\sim 22{,}4$ *м/мин*. **870.** 30 *кГ*. **871.** 1) и 2) разложение всегда возможно и имеет единственное решение; 3) и 4) решений может быть два, одно или ни одного в зависимости от длин слагаемых векторов. **872.** $\sim 3{,}2$ *кГ*; $\sim 1{,}1$ *кГ*. **873.** $P=Q+F$; $\sim 4{,}2$ *кГ*; $\sim 6{,}5$ *кГ*.

874. 1) Если вектор: а) перпендикулярен оси проекций; б) параллелен оси проекций; 2) нет. **876.** 1) Проекции векторов на ось равны; 2) проекции векторов на ось — противоположные числа. **877.** Ось l должна быть перпендикулярна вектору $a-b$. **879.** 7,5; —2,5. **880.** $-\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; 0. **881.** $\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$. **882.** 4. **883.** 5. **884.** $\frac{d}{2}$.

885. 1) Симметричны относительно оси ox; 2) симметричны относительно оси oy; 3) симметричны относительно начала координат. **886.** 1) $\{-2;\ 3\}$; 2) $\{5;\ -1\}$; 3) $\{-5;\ -5\}$; 4) $\{2;\ -3\}$. **887.** 1) $(2;\ -3)$; 2) $(-3;\ -1)$. **888.** 1) $3i$; $4j$; $-3i$; $-4j$; $3i-4j$; 2) $3i+2j$; $1{,}5i+4j$; $1{,}5i-2j$; $-1{,}5i-2j$. **889.** 2) $\{4;\ 1\}$; $\{-4;\ -5\}$; 3) $-2j$; $4i+3j$; $4i+j$; $-4i-5j$. **890.** 1) $3i+j$; 2) $-4i+5j$; 3) $-2i-7j$. **891.** 1) $-2i+2j$; 2) $-2i+j$. **893.** 1) $-2i-7{,}2j$; 2) $6i-2{,}8j$; 3) $8i-13{,}9j$. **895.** 1) 5; 2) $2i+5j$; $i-j$; $3i+4j$.

896. 2) Численно равны при различных единицах измерения; 3) единица измерения (градус) соизмерима с полным оборотом. **898.** 0°; 180°; 270°; 90°. **900.** 2, а) 0°; б) 180°; в) 90°; г) 270°; д) 270°; е) 90°. **902.** 60°; 120°; 60°; 300°; 240° и 300°. **905.** 1) —30°; 2) —120°; 3) —360°; 4) —780°; 5) 1872°. **906.** 1) 60°; 2) 432°; 3) 960°. **907.** —108°. **908.** 1) —1350°; 2) 1125°. **909.** —900°. **910.** 1, а) 480°; б) 840°; в) $120°+360°\cdot k$; 2, а) —240°; б) —600°; в) $120°-360°\cdot k$. **911.** 1) $30°+360°\cdot k$. **912.** 1) $150°+360°\cdot k$; 2) $-30°+360°\cdot k$. **913.** 1) $120°+360°\cdot k$; 2) $-120°+360°\cdot k$. **914.** 1) 15°; 135°; 255°; 2) 15°; 75°; 135°; 195°; 255°; 315°; 3) 150°; 330°; 4) 120°; 240°. **915.** 1) 150°; 2) —30°. **916.** 6) $40°-360°\cdot 5$. **917.** k-е совпадение произойдет через $(15+30\cdot k)$ *мин*. **918.** k-е совпадение произойдет через $(6+8\cdot k)$ *мин*.

920. В левой части равенства опущено наименование „радиан". **921.** 1) $\frac{\pi}{180}$; $\frac{\pi}{36}$; $\frac{\pi}{10}$; $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{10}$; 2) 0,873; 0,742, 0,387; 1,23. **922.** 1) 90°; —135°; 60°; 18°; —24°; 150°; —105°; 2) 57° 17′ 45″; 114° 35′ 30″; —171° 53′ 14″; 143° 14′ 22″; 5° 43′ 46″; 34′ 23″; —120° 19′ 16″; —31° 30′ 45″. **924.** 30° 56′ 23″; 219° 26′ 34″; 120° 39′ 54″; 201° 13′ 22″; 709° 12′ 26″. **925.** $\frac{15}{13}\pi$. **926.** 1) $60°=\frac{\pi}{3}$ *рад* $\approx 1{,}05$ *рад*; 2) $90°=\frac{\pi}{2}$ *рад* $\approx 1{,}57$ *рад* и $45°=\frac{\pi}{4}$ *рад* $\approx 0{,}79$ *рад*; 3) $120°=\frac{2\pi}{3}$ *рад* $\approx 2{,}09$ *рад*; 4) $150°=\frac{5\pi}{6}$ *рад* $\approx 2{,}62$ *рад*. **927.** 0,6283; 1,0472 и 1,4661. **928.** $30°=\frac{\pi}{6}$ *рад*; $75°=\frac{5\pi}{12}$ *рад*.

929. $\frac{\pi}{3} \approx 1{,}0472$; $\frac{4\pi}{9} \approx 1{,}3963$; $\frac{7\pi}{18} \approx 1{,}2217$ и $\frac{5\pi}{6} \approx 2{,}6280$. 930. $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708$. 931. 1) $11^\circ 15'$; 2) $\frac{\pi}{16} \approx 0{,}196$. 932. 0,85. 933. 1) 31,25 *см*; 2) 62,83 *см*. 934. 100 *см*. 935. 1) 1; 2) 2. 936. 2 *дм*^{2}. 937. 4. 938. 1) 720 000 *град/сек*; 2) 4000π *рад/сек*. 939. 225 *м/сек*; $\approx 477{,}6$ *об/мин*. 940. 6π *см/сек*; 270π *см*.

941. 1) $\frac{2}{9}d$; $\frac{2}{3}d$; $\frac{10}{9}d$; 2) 20°; 60°; 100°; 3) 0,3491 *рад*; 1,0472 *рад*. 942. 1) $3',6$; 2) 10; 50; 100; 200; 600; 800. 943. 1) $\frac{1000l}{n}$. 944. 800 *м*. 945. 15°; 15′; 15″.

948. Длина дуги единичной окружности численно равна ее радианной мере. 949. Не могут, так как единица измерения — радиан — несоизмерима с длиной окружности. 953. Каждая точка числовой оси изображает единственное число, а каждая точка единичной окружности изображает бесконечное множество действительных чисел (отличающихся друг от друга на число, кратное 2π). 955. 1) $a + 2\pi k$; 2) а) $-a + 2\pi k$; б) $-a + \pi(2k+1)$; в) $a + \pi(2k+1)$. 956. 1) $2\pi k \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}(4k+1)$; 2) $\frac{\pi}{2}(4k+1) \leqslant a \leqslant \pi(2k+1)$; 3) $\pi(2k-1) \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}(4k-1)$; 4) $\frac{\pi}{2}(4k-1) \leqslant a \leqslant 2\pi k$. 957. 1) $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $C(0;\ 1)$; $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $E(-1;\ 0)$; $F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $K(0;\ -1)$; $L\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) а) $\frac{\pi k}{2}$; б) $\frac{\pi}{4}(2k+1)$; в) $\frac{\pi k}{4}$. 962. 1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; $(0;\ 1)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$; $(0;\ -1)$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$; 2) $(1;\ 0)$; $\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(-1;\ 0)$; $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 963. 1) $90^\circ \cdot k + 30^\circ$; 2) $\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{6}$; 3) $45^\circ \cdot k$; 4) $\frac{\pi k}{3}$; 5) $30^\circ \cdot k + 15$; 6) $\frac{\pi k}{3}$; 7) $60^\circ \cdot k + 20^\circ$; 8) $180^\circ \cdot k \pm 60^\circ$. 964. 1) $\alpha_1 = 180^\circ \cdot k$ и $\alpha_2 = 60^\circ \cdot k + 30^\circ$; 2) $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ и $\alpha_2 = \frac{\pi k}{5}$; 3) $\alpha = \frac{\pi k}{4}$; 4) $\alpha = \frac{2\pi k}{5} + \frac{\pi}{30}$; 5) $\alpha_1 = 72^\circ \cdot k + 36^\circ$ и $\alpha_2 = 360^\circ \cdot k \pm 60^\circ$.

966. 2) $\alpha = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. 967. 1) 0,8 и 0,6; 2) $-\frac{8}{17}$ и $\frac{15}{17}$; 3) $\frac{56}{65}$ и $-\frac{33}{65}$; 4) $-\frac{11}{61}$ и $-\frac{60}{61}$; 5) 1 и 0; 6) 0 и 1. 968. Не может, так как проекция вектора на ось не может превосходить по абсолютной величине длину самого вектора. 969. 1) $\sin 20^\circ > \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ$; 2) $\sin 50^\circ > (\sin 50^\circ)^2$; 3) $\cos 115^\circ < \cos 115^\circ \cdot \cos 20^\circ$. 970. 1) Невозможно, так как $\sqrt[4]{1{,}7} > 1$; 2) невозможно; 3), 4) и 5) возможны. 971. 2) а) $\alpha = \frac{\pi}{2}(2k+1)$; б) $\alpha = \pi k$. 972. Нельзя, так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$ и $|\cos\alpha| \leqslant 1$. 973. Не может, так как $|\mathrm{tg}\,\alpha| = \frac{|\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}$ и $|\cos\alpha| \leqslant 1$. 974. 1) $\sin 25^\circ < \mathrm{tg}\,25^\circ$; 2) $\sin 320^\circ > \mathrm{tg}\,320^\circ$. 976. 1) $\cos 75^\circ < \mathrm{ctg}\,75^\circ$; 2) $\cos 160^\circ > \mathrm{ctg}\,160^\circ$. 977. Возможно, если $\alpha = \frac{\pi}{4}(4k+1)$. 978. 1) Квадрат числа, равного значению $\sin\alpha$; 5) синус

угла (дуги) в 1 *рад*. **980.** Минус. **981.** 1) $a > \sin a$; 2) $\operatorname{tg} a > a$. **982.** 1) 0,8415; 2) 0,5403; 3) 1,5574; 4) 0,6421; 5) 0,1987; 6) 0,7317; 7) 10,983; 8) 5,671; 9) 0,9511; 10) 0,2588. **983.** 1) 0,00; 2) 0,00; 3) 0,02; 4) 0,06; 5) 0,21. **984.** 1) 0,5143; 2) 0,6664; 3) 0,7076; 4) 0,5198; 5) 0,5988; 6) 0,7750.

986. Может, например, $\sin(-240^\circ)$. **987.** Косинус, тангенс и котангенс, если угол тупой. **988.** Нет. **989.** Положительное в примерах 1), 4), 6), 7) и 10). **990.** Плюс в примерах 1), 3), 6), 8), 10) и 11).

992. 3) Любой угол в интервалах $(360^\circ \cdot k + 90^\circ;\ 360^\circ \cdot k + 180^\circ)$ и $(360^\circ \cdot k - 90^\circ;\ 360^\circ \cdot k)$. **993.** 3) $\sqrt{3}$. $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}^2\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$; $\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha$, если $\alpha = \frac{\pi}{3}$; $\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}^2\alpha$, если $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. **994.** 1) 5; 2) -7; 3) $-b$; 4) $n - p$; 5) -6. **995.** 1) 1,5; 2) 2; 3) 1; 4) 0. **996.** 1) $(m + n)^2$; 2) $(a + b)^3$; 3) $(1 - p)^3$. **997.** 1) а) 1; б) 1; в) -1; г) -1; 2) а) -1; б) 2; 3) а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $1 + \sqrt{2}$; в) $1{,}5 + \sqrt{3}$. **998.** 1) 3; 2) 1; 3) 0; 4) $-0{,}6$. **999.** 1) 2; 2) 0,5; 3) 5; 4) 14. **1001.** $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$. **1004.** 1) 0; π; 2π; 2) $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$; 3) π. **1005.** 1) $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 2) $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$; 3) $\alpha = \frac{\pi}{6}$. **1006.** 1) $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$; 2) $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$; 3) $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$. **1007.** 1) $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$; 2) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$; 3) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. **1008.** $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{6}$. **1009.** 1) Минус; 2) плюс. **1010.** 1) 0,4794; 2) $-0{,}4161$; 3) 0,5463; 4) 0,3894.

1013. 1) $[0;\ 2]$; 2) $[0;\ 2]$; 3) $[-1;\ 1]$; 4) $[0;\ 1]$. **1014.** Значения 1), 2), 3), 4), 8), 10), 12) могут принимать синус, косинус, тангенс и котангенс; значения 5), 6), 7), 9) — тангенс и котангенс; значение 11) — тангенс, котангенс и синус и косинус, если $a = b$; значение 13) — тангенс и котангенс. **1015.** 2) а) πk; б) $\frac{\pi}{2}(4k + 1)$; в) $\frac{\pi}{2}(4k - 1)$. **1017.** 1) Во второй четверти; 2) в четвертой четверти. **1018.** 2) а) πk; б) $\frac{\pi}{4}(4k + 1)$; в) $\frac{\pi}{4}(4k - 1)$; г) $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$. **1020.** 1) $\sin 1 > \sin 10^\circ$; 2) $\cos 1 < \cos 1^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 0{,}1 > 1$; 4) $\sin 1 < \operatorname{tg}(\cos 0)$. **1021.** Минус в примерах 7) и 8). **1022.** 1) $200^\circ < \alpha < 340^\circ$; 2) $150^\circ < \alpha < 210^\circ$; 3) $0^\circ < \alpha < 45^\circ$; $90^\circ < \alpha < 225^\circ$ и $270^\circ < \alpha < 360^\circ$; 4) 45°; 135°; 225° и 315°. **1023.** 1) а) $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$; б) $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}\right)$; в) $\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{4};\ 2\pi\right)$. **1024.** 1) 5 и 1; 2) 5 и -3; 3) 1 и 0; 4) 1 и 0; 5) 2,25 и 0,25; 6) 10 и 1. **1025.** 1) $\frac{1}{2}$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$; 2) $\frac{1}{2}$ при $\alpha = \pi(2k + 1)$. **1026.** 1) $y_{\text{наиб}} = \sin 1 \approx 0{,}8416$ при $x = \frac{\pi}{2}$; $y_{\text{наим}} = \sin(-1) \approx -0{,}8416$ при $x = \frac{3\pi}{2}$. **1027.** 1) $[0;\ 2]$; 2) $[0;\ 1]$; 3) $[-1;\ 1]$; 4) $\left[\frac{1}{3};\ 1\right]$; 5) $[-1;\ 1]$; 6) $[-\operatorname{tg} 1;\ \operatorname{tg} 1]$. **1030.** 1) В 1-й четверти; 2) во 2-й четверти. **1033.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 5) π; 6) $\frac{5\pi}{6}$. **1034.** 1) 40° (0,6981 *рад*); 2) 30° 42′ (0,5353 *рад*); 3) 75° (1,3090 *рад*); 4) 116° (2,0246 *рад*); 5) 105° (1,8326 *рад*); 6) 153° (2,6704 *рад*). **1035.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 0,45; 3) $-\frac{5}{4}$; 4) m; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) 0;

7) $\frac{\pi}{2}$; 8) π. **1036.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\sim -0{,}4636$; 3) $-\sqrt{2} \approx 1{,}4142$; 4) 1. **1038.** $\pm \arccos m + 2\pi k$. **1039.** 1) $\pm \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}$; 2) $\frac{\pi}{4}(2k+1)$; 3) $70° + 720° \cdot k$ и $-110° + 720° \cdot k$; 4) $20° + 360° \cdot k$; 5) $\pm 35° + 120° \cdot k$; 6) $\pm 320° + 720° \cdot k$. **1041.** 2) а) В 1-й четверти; б) в 4-й четверти. **1044.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $-\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $-\frac{\pi}{2}$; 5) 0; 6) $-\frac{\pi}{4}$. **1045.** 1) $43°$ (0,7505 *рад*); 2) $62°$ (1,0821 *рад*); 3) $25°$ (0,4363 *рад*); 4) $-20°$ ($-0{,}3491$ *рад*); 5) $-57° 18'$ ($-1{,}0001$ *рад*); 6) $-50°$ ($-0{,}8727$ *рад*). **1046.** 1) $\frac{2}{9}$; 2) $-0{,}68$; 3) m; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) 0; 6) 0; 7) $-\frac{\pi}{4}$. **1047.** 1) $\sim 0{,}3420$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) $\sim -1{,}4628$; 4) 1. **1049.** $(-1)^k \cdot \arcsin m + \pi k$. **1050.** 1) $\frac{\pi}{6} + \pi k$; 2) $\frac{2\pi k}{3} - \frac{\pi}{6}$ и $\frac{2\pi k}{3} + \frac{\pi}{2}$; 3) $4\pi k + \frac{\pi}{3}$ и $\pi(4k+1)$; 4) $\frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$; 5) $90° \cdot k - (-1)^k \cdot 24° 24'$; 6) $360° \cdot k + 30°$ и $360° \cdot k + 114°$. **1053.** 1) В первой четверти; 2) в четвертой четверти. **1056.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{4}$; 3) 0; 4) $-\frac{\pi}{3}$; 5) $\frac{\pi}{6}$; 6) 0. **1057.** 1) $74° 42'$ (1,3038 *рад*); 2) $-47°$ ($-0{,}8203$ *рад*); 3) $-86°$ ($-1{,}5010$ *рад*); 4) $31°$ (0,5411 *рад*); 5) $32° 42'$ (0,5707 *рад*); 6) $-64°$ ($-1{,}1170$ *рад*). **1058.** 1) 3,1; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) m; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $\frac{\pi}{4}$; 7) $-\frac{\pi}{4}$. **1059.** 1) 1; 2) -2; 3) $\sim -0{,}410$; 4) -1. **1062.** 1) πk; 2) $\frac{\pi}{8}(4k+1)$; 3) $40°(9k-1)$; 4) πk; 5) πk; 6) $\frac{\pi}{6}(6k+1)$; 7) $\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **1065.** 1) В первой четверти; 2) во второй четверти. **1068.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) $\frac{7\pi}{4}$. **1069.** 1) $85° 12'$ (1,4870 *рад*); 2) $161° 36'$ (2,8205 *рад*); 3) $113° 30'$ (1,9810 *рад*); 4) $176°$ (3,0718 *рад*); 5) $54° 12'$ (0,9460 *рад*); 6) $177° 44'$ (3,1021 *рад*). **1070.** 1) 2,5; 2) $-0{,}2$; 3) m; 4) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) $\frac{\pi}{4}$; 7) $\frac{3\pi}{4}$. **1071.** 1) 0,1763; 2) $-1{,}4826$; 3) 1,2493; 4) 71,5. **1074.** 1) $\frac{\pi}{2}(4k+1)$; 2) $\frac{\pi}{6}(2k+1)$; 3) $90° \cdot k + 75°$; 4) $\pi k + \frac{5\pi}{12}$. **1075.** а) $\arcsin m$, если $-1 \leqslant m < 0$, и $\operatorname{arctg} m$, если $m < 0$; б) $\arccos m$, если $-1 \leqslant m < 0$, и $\operatorname{arcctg} m$, если $m < 0$. **1076.** Синус на замкнутом интервале $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а косинус на замкнутом интервале $[0; \pi]$ изменяются монотонно, принимая все допустимые для них значения, причем каждому допустимому значению тригонометрической функции соответствует единственный угол (дуга) указанного интервала. **1077.** $\operatorname{ctg} 0$ и $\operatorname{ctg} \pi$ не существуют. **1078.** Нельзя, так как значение $\frac{5\pi}{6}$ не принадлежит замкнутому интервалу $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. **1079.** 1) $x = 2 \sin y$; 2) $x = 2 \operatorname{tg} \frac{y}{2}$; 3) $x = \frac{1}{3} \cos \frac{y}{5}$; 4) $x = 2 \cos \frac{y-1}{3}$; 5) $x = 2 \operatorname{tg} \frac{2}{3} y$. **1080.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{11\pi}{18}$; 4) $-\frac{2\pi}{15}$. **1081.** 1) 0; 2) $\frac{3+\pi}{6} \approx 1{,}0236$;

3) $\dfrac{2\sqrt{2}+\pi}{4}\approx 1{,}4925$; 4) $\dfrac{3\sqrt{3}+2\pi}{6}\approx 1{,}9132$; 5) $1+\dfrac{\pi}{2}\approx 2{,}5708$.
1082. 1) 1,379; 2) 1,107; 3) 1,107; 4) 2,094; 5) 2,089; 6) 2,034.

1084. 4) Любая точка $(\pi k;\ 0)$ пересечения синусоиды с осью абсцисс может служить центром симметрии графика $y=\sin x$, а любая прямая $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ — его осью симметрии. Свойства симметрии синусоиды позволяют воспользоваться для ее построения шаблоном, изготовленным, например, на замкнутом интервале $[0;\ \pi]$. 5) а) График кривой на замкнутом интервале $[0;\ 2\pi]$ сдвинуть на 2π влево по оси абсцисс; б) график кривой, взятый на замкнутом интервале $[0;\ 2\pi]$, повторить на каждом замкнутом интервале $[2\pi k;\ 2\pi(k+1)]$. **1086.** 2, а) Ордината каждой точки графика по абсолютной величине не превосходит 1. б) Перпендикуляр, восставленный к оси абсцисс в произвольной ее точке $(x_1;\ 0)$, пересекает синусоиду в единственной точке $(x_1;\ y_1)$; ордината y_1 этой точки равна значению синуса, соответствующему выбранному значению x_1 аргумента. в) Точки синусоиды с абсциссами x и $-x$ симметричны относительно начала координат, и, следовательно, ординаты этих точек отличаются только знаками. Свойство нечетности синуса легко подтверждается на единичной окружности. Действительно, если числу x соответствует точка M единичной окружности, то числу $-x$ будет соответствовать точка M_1, симметричная точке M относительно оси абсцисс. Ординаты этих точек также противоположны. г) Часть графика, соответствующая периоду синуса (2π), неизменно повторяется. В единичной окружности свойство периодичности синуса выражается в том, что для любой точки окружности значения синуса повторяются лишь при целом числе оборотов, совершенных движущейся по окружности точкой. д) Перпендикуляры к оси абсцисс, проведенные из точек с абсциссами x и $x\pm\pi$, имеют одинаковую длину, но противоположное направление. е) Прямая $y=-0{,}5$ пересекает синусоиду бесчисленное множество раз. 3) $[2\pi k;\ 2\pi k+\pi]$ и $[-\pi+2\pi k;\ 2\pi k]$. 4) а) $\left[2\pi k-\frac{\pi}{2};\ 2\pi k+\frac{\pi}{2}\right]$; б) $\left[2\pi k+\frac{\pi}{2};\ 2\pi k+\frac{3\pi}{2}\right]$.

1089. 1) $-\infty<x<+\infty$; $-0{,}5\leqslant y\leqslant 0{,}5$; период функции 2π; 2) нечетная; 3) а) $(2\pi k;\ 2\pi k+\pi)$; б) $(-\pi+2\pi k;\ 2\pi k)$; в) при $x=\pi k$; г) наибольшее, равное 0,5, при $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$; наименьшее, равное $-0{,}5$, при $x=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. 4) Интервалы возрастания: $\left(2\pi k-\frac{\pi}{2};\ 2\pi k+\frac{\pi}{2}\right)$; интервалы убывания: $\left(2\pi k+\frac{\pi}{2};\ 2\pi k+\frac{3\pi}{2}\right)$. 6) Синусоида претерпевает сжатие к оси абсцисс в 2 раза. **1091.** 1) Синусоида, смещенная вдоль оси ординат на $|b|$ единиц масштаба: а) вверх; б) вниз; центром симметрии кривой может служить любая точка $(\pi k;\ b)$, а осью симметрии — любая прямая $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 2) Синусоида, претерпевшая растяжение от оси абсцисс в a раз, если $a>1$ (амплитуда увеличилась в a раз), или сжатие в том же направлении в a раз, если $0<a<1$ (амплитуда уменьшилась в a раз); при $a<0$ деформированная одним из указанных способов синусоида еще и симметрично отражается в оси абсцисс. 3) Синусоида, претерпевшая сжатие к оси ординат в m раз, если $m>1$; или растяжение в m раз, если $0<m<1$; период функции в обоих случаях равен $\frac{2\pi}{m}$; при $m<0$ деформированная синусоида еще и отражается симметрично в оси абсцисс. 4) Синусоида, смещенная вдоль оси абсцисс на $|n|$ единиц: влево, если $n>0$, и вправо, если $n<0$. **1092.** 1) Для всех значений x, где $\sin x\geqslant 0$, графики функций $y=|\sin x|$

и $y = \sin x$ совпадают. Для всех значений x, где $\sin x < 0$, график функции $y = |\sin x|$ симметричен графику функции $y = \sin x$ относительно оси абсцисс (рис. 94). 2) График функции $y = \sin|x|$ симметричен относительно оси ординат; при $x \geqslant 0$ графики функций $y = \sin|x|$ и $y = \sin x$ совпадают (рис. 95).

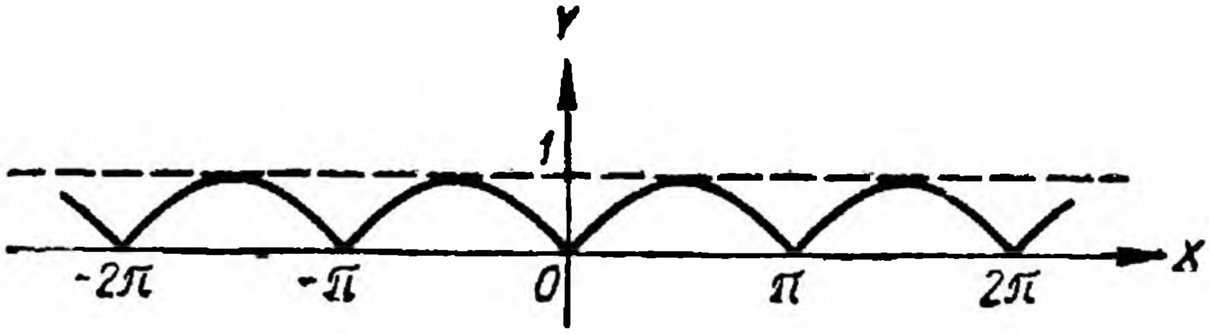


Рис. 94

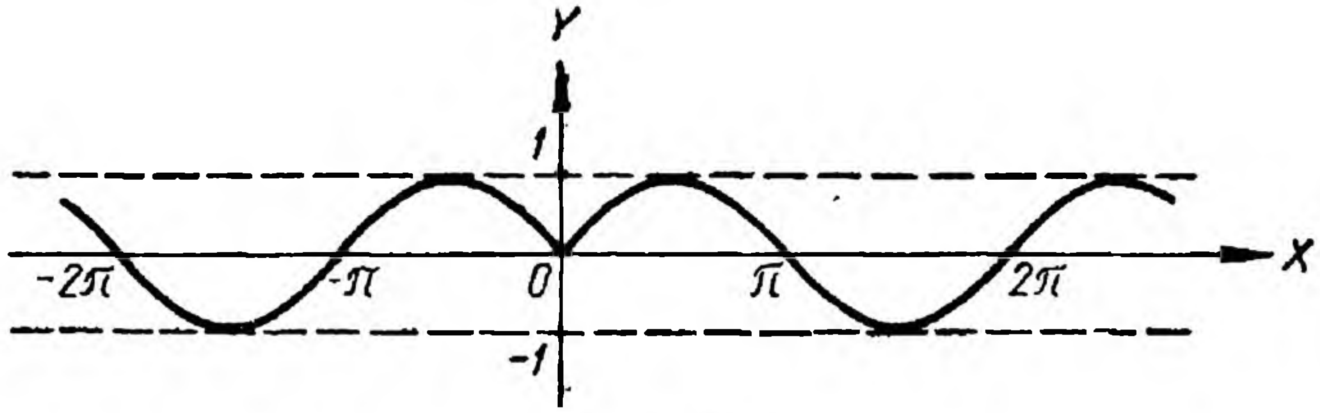


Рис. 95

1106. 1) Существует; 2) не существует; 3) не существует; 4) существует.

1107.

Искомая функция	Данная функция			
	sin α	cos α	tg α	ctg α
sin α		$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
cos α	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
tg α	$\pm\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
ctg α	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	

1108. б) 1) 0,6; $1\frac{1}{3}$; 0,75; 2) $\frac{12}{13}$; $-2\frac{2}{5}$; $-\frac{5}{12}$; 3) $-\frac{63}{65}$; $-\frac{16}{65}$; $\frac{16}{63}$; 4) $-\frac{40}{41}$; $\frac{9}{41}$; $-4\frac{4}{9}$.

1109.

№	sin α	cos α	tg α	ctg α
1	$\frac{4}{5}$	$\pm\frac{3}{5}$	$\pm\frac{4}{3}$	$\pm\frac{3}{4}$
2	$-0,6$	$\pm 0,8$	$\mp 0,75$	$\mp\frac{4}{3}$
3	$\pm\frac{28}{53}$	$\frac{45}{53}$	$\pm\frac{28}{45}$	$\pm 1\frac{17}{28}$
4	$\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\mp\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\mp\frac{2}{\sqrt{5}}$
5	$\pm\frac{9}{41}$	$\pm\frac{40}{41}$	0,225	$4\frac{4}{9}$
6	$\pm 0,96$	$\pm 0,28$	$-3\frac{3}{7}$	$-\frac{7}{24}$
7	$\pm\frac{8}{17}$	$\pm\frac{15}{17}$	$\frac{8}{15}$	$1\frac{7}{8}$
8	$\pm\frac{5}{13}$	$\pm\frac{12}{13}$	$\frac{5}{12}$	$-2,4$
9	$\frac{m}{n}$	$\pm\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{n}$	$\pm\frac{m}{\sqrt{n^2-m^2}}$	$\pm\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{m}$

1110. $\pm\frac{2\sqrt{13}}{13}$; $\pm\frac{3\sqrt{13}}{13}$. **1111.** 1) 0,96; 2) $1\frac{1}{3}$; 3) $\frac{12}{13}$; 4) $\frac{15}{17}$. **1112.** 1) 0,6; 2) $-\frac{8}{17}$; 3) $-\frac{20}{99}$; 4) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. **1113.** 1) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $-\frac{8}{17}$; 4) $-|a|$, $|a| \leqslant 1$. **1114.** 1) $-\frac{12}{13}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $-1\frac{7}{8}$; 4) 0,8. **1115.** $0 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, поэтому $-1 \leqslant a \leqslant 0$. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{-2a-a^2}$, где $-2 \leqslant a \leqslant 0$. **1116.** 1) 0,34; 2) 0,8; 3) $\frac{21}{20}$; 4) $\frac{8}{15}$. **1117.** 1) $\frac{1}{\pi}$; 2) 0,96; 3) 2,4; 4) $\frac{4}{3}$. **1118.** 1) $\sqrt{5}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $-\frac{15}{17}$; 4) $\frac{40}{41}$. **1119.** 1) π; 2) $\frac{2}{7}$;

3) $\frac{60}{61}$; 4) $-\frac{21}{29}$. **1120.** 1) $\arcsin\frac{5}{13}$; 2) $\arcsin\frac{8}{17}$; 3) $\arcsin\frac{21}{29}$. **1121.** 1) $\arccos\frac{56}{65}$; 2) $\arccos 0{,}8$; 3) $\arccos\frac{65}{97}$. **1122.** 1) $\operatorname{arctg}\frac{35}{12}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{60}{11}$; 3) $\operatorname{arctg}\frac{16}{63}$. **1123.** 1) $\operatorname{arcctg}\frac{40}{9}$; 2) $\operatorname{arcctg}\frac{5}{12}$; 3) $\operatorname{arcctg}\frac{8}{15}$. **1124.** 1) $\cos^2\alpha$, α — любое действительное число; 2) $\sin^2\alpha$, α — любое действительное число; 3) $-\cos^2\beta$, β — любое действительное число; 4) $-\sin^2 2\alpha$, α — любое действительное число. **1125.** 1) $\cos^2 x$, x — любое действительное число; 2) $\sin^2\frac{x}{2}$, x — любое действительное число. **1126.** 1) 2, φ — любое действительное число; 2) 0, α — любое действительное число. **1127.** 1) $\frac{1}{\cos^2 y}$, $y \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; 2) $\frac{1}{\sin^2 5\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi k}{5}$. **1128.** 1) $\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi k$; 2) $\frac{1}{\cos^2\gamma}$, $\gamma \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$. **1129.** 1) $\operatorname{tg}^2\alpha$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; 2) $-\operatorname{ctg}^2\beta$, $\beta \neq \pi k$. **1130.** 1) $\operatorname{ctg}^2\alpha$, $\alpha \neq \pi k$; 2) $\operatorname{tg}^2 2\alpha$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4}(2k+1)$. **1131.** 1) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}2\alpha$, $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$; 2) $\operatorname{tg}3\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \neq \frac{\pi}{6}(2k+1)$. **1132.** 1) $\sin\alpha$, $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\alpha \neq 2\pi k$. **1133.** 1) $\cos(\alpha+\beta)$, $\alpha+\beta \neq \frac{\pi k}{2}$; 2) $\sin(\alpha-\beta)$, $\alpha-\beta \neq \frac{\pi k}{2}$. **1134.** 1) $2\sin\alpha$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; 2) $2\cos\beta$, $\beta \neq \pi k$. **1135.** 1) $\cos^2\varphi$, $\varphi \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; 2) $-\sin^2 a$, $a \neq \pi k$. **1136.** 1) $\cos^2 a$, $a \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; 2) $-\sin^2 b$, $b \neq \pi k$. **1137.** 1) $1-\cos\pi a$, $a \neq 2k+1$; 2) $-\left(1+\sin\frac{\pi a}{2}\right)$, $a \neq 4k+1$. **1138.** 1) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$, $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$; $\beta \neq \frac{\pi k}{2}$; $\alpha+\beta \neq \pi k$; 2) $\frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi k}{2}$. **1139.** 1) 2, α — любое действительное число; 2) 4, $\beta \neq \frac{\pi k}{2}$. **1140.** 1) 1, $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$; 2) 1, $x \neq \frac{\pi k}{2}$. **1141.** 1) $\sin 2t - \cos 2t$, $t \neq \frac{\pi}{8}(4k-1)$; 2) $\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}$, $\varphi \neq \frac{\pi}{2}(4k+1)$. **1142.** 1) $\frac{2}{\sin\alpha}$, $\alpha \neq \pi k$; 2) $\frac{2}{\cos b}$, $b \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$. **1143.** 1) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; 2) $\frac{2}{\sin^2\beta}$, $\beta \neq \pi k$. **1144.** 1) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$, $\alpha \neq \pi k$; 2) $\operatorname{ctg}^6\alpha$, $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$. **1145.** 1) $\frac{1}{\sin x}$, $x \neq \pi k$; 2) $\frac{1}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$. **1146.** 1) $|\sin 3\alpha|$, α — любое действительное число; 2) $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$, α — любое действительное число. **1147.** 1) $\frac{2}{|\cos\alpha|}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; 2) $\frac{2}{|\sin\alpha|}$, $\alpha \neq \pi k$. **1148.** 4, если $\pi k < \alpha < \frac{\pi}{2}(2k+1)$; -4, если $\frac{\pi}{2}(2k-1) < \alpha < \pi k$. **1149.** 5. **1150.** 1) $-0{,}5$; 2) $-0{,}1$. **1151.** 1,7660. **1152.** 1,4088. **1153.** Решение. 1) Из условия $\sin\alpha+\cos\alpha = p$ получаем: $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = p^2$, или $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = p^2$, откуда $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}(p^2-1)$. 2) Из

соотношений $2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2$ и $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=p^2$ почленным вычитанием находим: $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2-p^2$, откуда $\sin\alpha-\cos\alpha=\pm\sqrt{2-p^2}$. 3) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha)=p\cdot[1-0{,}5(p^2-1)]=0{,}5p(3-p^2)$. 4) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1-2\cdot\frac{1}{4}(p^2-1)^2=1-\frac{1}{2}p^4+p^2-\frac{1}{2}=0{,}5+p^2-0{,}5p^4$.

1154. 1) m^2-2; 2) $\pm\sqrt{m^2-4}$; 3) $m(m^2-3)$. **1155.** 3. **1156.** Решение. Из условия $\operatorname{tg} y+\operatorname{ctg} y=5$ найдем: $\operatorname{tg}^2 y+\operatorname{ctg}^2 y=23$ и $\frac{1}{\sin y}\cdot\frac{1}{\cos y}=5$. Следовательно, $\operatorname{tg}^2 y+\operatorname{ctg}^2 y+\frac{1}{\sin y}\cdot\frac{1}{\cos y}=28$. **1157.** 1) Решение. Оценим разность $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)-2=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{(\operatorname{tg}\alpha-1)^2}{\operatorname{tg}\alpha}\geqslant 0$, так как $\operatorname{tg}\alpha>0$ и $(\operatorname{tg}\alpha-1)^2\geqslant 0$. Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\geqslant 2$. Знак равенства имеет место при $\alpha=\frac{\pi}{4}$. **1158.** Нельзя. **1163.** 1) $\cos^4\alpha$; 2) $\sin^4\alpha$.

1173. 1) $x^2+y^2=9$. Решение. Из данных равенств находим: $\cos\alpha=\frac{x}{3}$, $\sin\alpha=\frac{y}{3}$. Подставляя в тождество $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, получим: $x^2+y^2=9$; 2) $16x^2-25y^2=400$. Решение. Из данных равенств найдем: $\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{x}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{y}{4}$. Подстановка в тождество $\frac{1}{\sin^2\alpha}-\operatorname{ctg}^2\alpha=1$ дает: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$, или $16x^2-25y^2=400$; 3) $x^2-2y=1$; 4) $x+2=y^2$; 5) $x^2y^2(x^2+y^2-3)=1$. **1174.** 1) Решение. Разделив почленно первое и второе равенства соответственно на $\cos^2\alpha$ и $\cos^2\beta$, получим: $x\operatorname{tg}^2\alpha+y=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, $y\operatorname{tg}^2\beta+x=\frac{1}{\cos^2\beta}$, или $x\operatorname{tg}^2\alpha+y=1+\operatorname{tg}^2\alpha$, $y\operatorname{tg}^2\beta+x=1+\operatorname{tg}^2\beta$, откуда $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-y}{x-1}$, $\operatorname{tg}^2\beta=\frac{1-x}{y-1}$. Из третьего равенства найдем: $x^2\operatorname{tg}^2\alpha=y^2\operatorname{tg}^2\beta$. Подставляя сюда найденные значения для $\operatorname{tg}^2\alpha$ и $\operatorname{tg}^2\beta$, получим: $x^2(1-y)^2=y^2(1-x)^2$, откуда: а) $x(1-y)=y(1-x)$, или $x=y$; б) $x(1-y)=y(x-1)$, или $x+y=2xy$. 2) Из первых двух равенств имеем: $x^2\cos^2\alpha+y^2\sin^2\beta+2xy\cos\alpha\cdot\sin\beta=a^2$ и $x^2\sin^2\beta+y^2\cos^2\alpha-2xy\sin\beta\cdot\cos\alpha=b^2$. Складывая почленно полученные равенства, найдем: $x^2(\cos^2\alpha+\sin^2\beta)+y^2(\sin^2\beta+\cos^2\alpha)=a^2+b^2$, или $(x^2+y^2)(\sin^2\beta+\cos^2\alpha)=a^2+b^2$. Почленное сложение полученного равенства с третьим из данных равенств дает: $2(x^2+y^2)=(a+b)^2$. **1175.** 1) 3 и 2; 2) 1 и -2. **1176.** 1) $y_{\text{наиб}}=0{,}5(1+\sin^2 1)\approx 0{,}853$ при $x=0$; $y_{\text{наим}}=0{,}5$ при $x=\frac{\pi}{2}$; 2) $y_{\text{наиб}}=3\sin^2 1-2\approx 0{,}124$ при $x=\frac{\pi}{4}$; $y_{\text{наим}}=-2$ при $x=0$. **1177.** Решение. $y=a\sin^2 x+b(1-\sin^2 x)=b+(a-b)\sin^2 x$. Если $a>b$, то $y_{\text{наиб}}=b+(a-b)\cdot 1=a$ и $y_{\text{наим}}=b+(a-b)\cdot 0=b$. Если $a=b$, то $y=b$ при любых значениях x. Если $a<b$, то $y_{\text{наим}}=a$ и $y_{\text{наиб}}=b$. **1178.** Решение. Пусть $\arcsin m=\alpha$. Тогда $\sin\alpha=m$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Если $0\leqslant m\leqslant 1$, то $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. В этом случае $\cos\alpha=\sqrt{1-m^2}$, $\alpha=\arccos\sqrt{1-m^2}$. Следовательно, $\arcsin m=\arccos\sqrt{1-m^2}$. Если $-1\leqslant m\leqslant 0$, то $0\leqslant -m\leqslant 1$ и $\arcsin m=-\arcsin(-m)=-\arccos\sqrt{1-m^2}$. Геометрические пояснения даны

на рисунке 96. 1179. Пусть $\arccos m = \alpha$. Тогда $\cos\alpha = m$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Если $0 \leqslant m \leqslant 1$, то $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. В этом случае $\sin\alpha = \sqrt{1-m^2}$, $\alpha = \arcsin\sqrt{1-m^2}$. Следовательно, при $0 \leqslant m \leqslant 1$ имеем: $\arccos m = \arcsin\sqrt{1-m^2}$. Если $-1 \leqslant m \leqslant 0$, то $0 \leqslant -m \leqslant 1$ и $\operatorname{arc\,cos} m = \pi - \arccos(-m) = \pi - \arcsin\sqrt{1-m^2}$. 1181. 1) $2\pi k + \frac{\pi}{2}$; 2) $2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}$; 3) πk и $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$; 4) $\pi k + \frac{\pi}{3}$ и $\pi k + \frac{\pi}{4}$; 5) $2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$ и $2\pi k + \pi$; 6) $\pi k + \frac{\pi}{4}$ и $\pm \operatorname{arctg} 2 + \pi k$. 1182. 1) $2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$ и $\pm \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi k$; 2) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$; 3) $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$ и $\frac{\pi}{4} + \pi k$; 4) πk; 5) $2\pi k + \frac{\pi}{2}$. 1183. 1) πk и $2\pi k + \frac{\pi}{2}$; 2) $\pi k + \frac{\pi}{2}$; 3) πk и $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$; 4) $\pi k + \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4}$; 5) $2\pi k + \pi$ и $\pi k + \frac{\pi}{4}$; 6) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$ и $2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}$. 1184. 1) $\pi k + \frac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arctg} \frac{2}{5} + \pi k$; 3) $\pi k \pm \frac{\pi}{3}$; 4) $\pi k + \frac{\pi}{4}$ и $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k$; 5) πk и $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$; 6) $\pi k + \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k$. 1185. 1) $\pi k - \frac{\pi}{4}$; 2) $\pi k + \frac{\pi}{4}$; 3) $\operatorname{arctg} 5 + \pi k$ и $\pi k - \frac{\pi}{4}$; 4) $-\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k$; 5) $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$ и $\pi k + \frac{\pi}{4}$; 6) $\pi k + \frac{\pi}{3}$ и $\pi k + \frac{\pi}{4}$. 1186. 1) $2\pi k - \frac{\pi}{2}$; 2) $2\pi k + \frac{\pi}{2}$; 3) $\pi k + \frac{\pi}{2}$; 4) $2\pi k$; 5) $\frac{\pi k}{2}$.

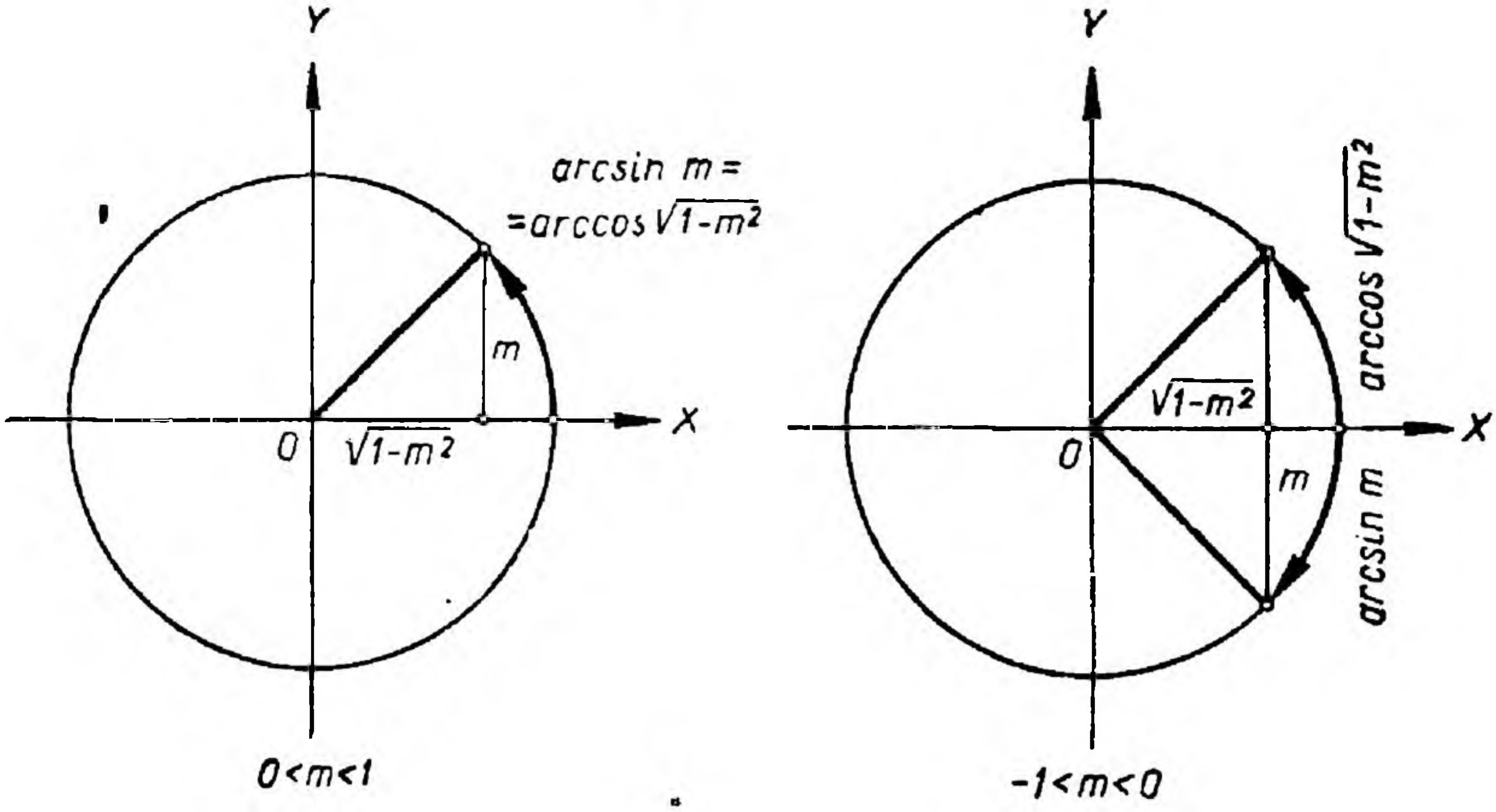


Рис. 96

1192. 1) $\sin 25^\circ$; 2) $\sin(-0{,}2\pi)$; 3) $\sin(45^\circ - \alpha)$; 4) $\sin(-2\alpha)$. 1193. 1) $\cos 12^\circ$; 2) $\cos(-0{,}1\pi)$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; 4) $\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$. 1194. 1) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{10}$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; 3) $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$; 4) $\operatorname{tg} \frac{96^\circ - \alpha}{2}$. 1195. 1) $\operatorname{ctg} 35^\circ$;

2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{3}\right)$; 3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$. **1196.** 1) 1; 2) $0{,}5(m^2-1)$. **1197.** 1) 1; 2) $0{,}5(n^2-1)$. **1198.** q^2-2. **1199.** p^2-2. **1120.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 0. **1203.** $\pi k-\frac{\pi}{4}$. **1208.** 1) 1; 2) 0; 3) —0,5; 4) —0,5; 5) 0; 6) 0,5. **1209.** 1) $\cos 12°$; 2) $-\sin 33°$; 3) $-\operatorname{tg} 6°$; 4) $-\sin 36°$; 5) $\operatorname{ctg} 14°$; 6) $-\operatorname{tg} 38°$; 7) $-\cos 19°$; 8) $-\sin 40°$; 9) $\operatorname{tg} 0{,}2\pi$; 10) $-\sin 0{,}14 \ldots$. **1210.** 1) $\sin 28°$; 2) $\operatorname{tg} 15°$; 3) $\cos 43°$; 4) $-\operatorname{ctg} 33°$; 5) $\sin 52°$; 6) $-\sin 0{,}1\pi$; 7) $-\operatorname{ctg} 1{,}14 \ldots$; 8) $-\sin 0{,}28 \ldots$. **1211.** 1) $-\operatorname{ctg} 8°$; 2) $\sin 50°$; 3) $\operatorname{tg} 26°$; 4) $-\cos 42°$; 5) $-\sin 21°$; 6) $\operatorname{tg} 24°$; 7) $\cos 65°$; 8) $\operatorname{ctg} 0{,}99 \ldots$. **1212.** 1) $\sin 29°$; 2) $-\cos 14°$; 3) $\operatorname{tg} 20°$; 4) $\operatorname{tg} 0{,}2\pi$; 5) $\cos 0{,}21 \ldots$. **1214.** 1) 0; 2) —0,5; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $-\sqrt{3}$; 6) —0,5; 7) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 8) 0; 9) —0,5; 10) —0,5. **1215.** 1) 0,7431; 2) 0,4848; 3) —0,5299; 4) 0,6249; 5) 0,4226; 6) —0,1763; 7) —0,8008; 8) 0,1322. **1216.** 1) 0; 2) 0. **1217.** 1) $\sin\alpha$; 2) 0. **1218.** 1) 1; 2) 1. **1219.** 1) 1; 2) —1. **1220.** 1) 1; 2) 0. **1221.** 1) $\frac{1}{\sin 10°}$; 2) $\frac{1}{\cos 0{,}1\pi}$. **1222.** 1) $3\sin^2 x$; 2) 2. **1223.** 1. **1224.** 1) —1; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **1234.** 0,5. **1235.** 1) 0,6; 0,8 и —0,75. **1236.** $2\pi k+\pi$. **1237.** $15°+360°\cdot k$ и $-105°+360°\cdot k$. **1238.** $\frac{\pi k}{2}$. **1239.** $\pi k+\frac{\pi}{2}$. **1240.** $\pi k+\frac{\pi}{4}$. **1241.** $180°\cdot k-45°$. **1242.** $2\pi k\pm\frac{3\pi}{4}$. **1243.** $135°+180°\cdot k$. **1244.** $15°+360°\cdot k$ и $105°+360°\cdot k$. **1245.** $140°+360°\cdot k$ и $-100°+360°\cdot k$. **1246.** $180°\cdot k+60°$. **1247.** $\pi k+\frac{\pi}{4}$. **1248.** $23°+180°\cdot k$.

1249. 1,020. Решение. Так как $\cos\frac{5\pi}{3}=0{,}5$, то уравнение примет вид $\sin(\cos x)=0{,}5$, откуда $\cos x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$. Это уравнение имеет смысл при $k=0$. Следовательно, для определения x имеем уравнение $\cos x=\frac{\pi}{6}$, откуда $x=2\pi k\pm\arccos\frac{\pi}{6}$. Наименьший положительный корень этого уравнения равен $\arccos\frac{\pi}{6}\approx 1{,}020$.

VI. Прогрессии

1251. 1, а) 2; 4; 6; 8; 10; 12; б) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; в) —1; 2; —3; 4; —5; 6; г) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{6}{7}$; д) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{6}$; $\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{10}$; $\frac{1}{12}$; е) 0; —3; —8; —15; —24; —63; ж) 2; $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{7}{6}$; з) $-\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$; $1\frac{1}{4}$; $\frac{3}{10}$; $1\frac{1}{6}$. **1252.** Нельзя. Так, последовательность 2; 4; 8; ... может быть задана формулой общего члена $a_n=2^n$ или формулами; $a_n=n^2-n+2$, $a_n=\frac{1}{3}n^3-n^2+\frac{8}{3}n$, $a_n=2\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot 2^{2n-1}+\frac{2}{3}$. **1253.** 2, а) $2n$; б) $\frac{1}{n}$; в) n^2; г) $3n+1$. **1255.** 1) 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 2) 16-й; 18-й; нет, 34-й, 54-й. **1257.** 0; $-\frac{4}{3}$; 0; 1; 0. **1258.** 1) $\frac{1}{300}$; 2, а) $n>333$; б) $n>3\,333\,333$.

1259. 1) $n \geqslant 3$, целое: 4) $n > 360$: $n > 21\,600$; $n > 1\,296\,000$. **1260.** 3) $n > 360$; $n > 21\,600$: $n > 1\,296\,000$; 4) $\lim\limits_{n \to \infty} \beta_n = 180°$. **1262.** 1) 4; 3; $2\frac{2}{3}$; $2\frac{1}{2}$; $2\frac{2}{5}$; $2\frac{1}{3}$; 4) $n > 2001$; $n > 200\,001$; 5) 2. **1263.** 1) 0; $1\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{4}$; $\frac{4}{5}$; $1\frac{1}{6}$; $\frac{6}{7}$; $1\frac{1}{8}$; 4) $n > 1000$; 1. **1264.** 1) 1; 2) 2; 3) 1; 4) 0; 5) 2; 6) 3. **1265.** 1) 180°; 360°; 540°; 720°; 900°; 1080°; 1260°; 2) $n \geqslant 558$. **1270.** 1) 2; 2) 1,5; 3) 5; 4) $\frac{1}{3}$; 5) 1; 6) $\frac{2}{3}$. **1271.** 1) 0,7; 2) —0,3; 3) 0,1; 4) 0,4; 5) 2,6; 6) —6,5; 7) —0,04; 8) 0,1. **1272.** 1) 0; 2) $+\infty$; 3) 1,5; 4) $\frac{1}{2}$. **1273.** 1) 0; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) 0; 4) $\sqrt{3}$.

1276. 25 *см*; 40 *см*; 55 *см*; 115 *см*. **1277.** В примерах 1), 3). **1279.** $b = \frac{a+c}{2}$, где a, b и c — три последовательных члена арифметической прогрессии. **1282.** 2) 11; 3) $-14a$. **1283.** 1) 4; 2) $-5b$; 3) $\frac{2}{3}$. **1285.** Да. **1286.** Образуют прогрессию, разность которой равна удвоенной разности данной прогрессии. **1287.** В которой первый член равен разности прогрессии. **1288.** 1) 50; 2) —32; 3) 2,6; 4) 4,4; 5) $20 - 2\sqrt{3}$. **1289.** 9. **1290.** $-\frac{2}{3}$. **1291.** 1) С 22-го; 2) с 33-го по 65-й. **1292.** 1) 231; 2) —139,5; 3) $32\frac{1}{4}$; 4) 27. **1294.** 1) 121; 2) $113\frac{1}{3}$; 3) —819; 4) 28,6; 5) $4\sqrt{3}$. **1295.** 1) 20 100; 2) $n(n+1)$; 3) n^2; 4) 4905. **1296.** 1) 123 300; 2) $\frac{1}{2}km(m+1)$. **1297.** 31. **1298.** 156.

1299.

№	a_1	d	n	a_n	S_n
1	1,26	—0,3	15	—2,94	—12,6
2	$5 - 8\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	21	$2\sqrt{3} + 5$	$105 - 63\sqrt{3}$
3	$-1{,}3$	—0,6	15	—9,7	—82,5
4	$\sqrt{2} - 1$	$\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$	9	$5(\sqrt{2} - 1)$	$27(\sqrt{2} - 1)$
5	3,6	—0,1	37	0	66,6
6	$2\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$	31	$14\frac{3}{4}$	$271\frac{1}{4}$

№	a_1	d	n	a_n	S_n
7	0,1	0,2	15	2,9	22,5
8	0,5	0,5	17	8,5	76,5
9	—20	2	20	18	—20
10	—45	$2\frac{1}{4}$	41	45	0
11	—15	0,2	12	—12,8	—166,8
12	17	—5	33	—143	—2079
13	1	$\sqrt{3}-3$	10	$9\sqrt{3}-26$	$45\sqrt{3}-125$
14	0	$-\frac{3}{4}$	25	—18	—225
15	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{33}$	12	$-\frac{2}{3}$	0
16	0,2	0,3	19	5,6	55,1

1300. 1) $\frac{n(x-n)}{x}$; 2) $\frac{n(nx-a)}{x+a}$. **1301.** $p+q-n$. **1302.** 1) 134 *мм*; 158 *мм*; 182 *мм*; 2) a; $\frac{ak+b}{k+1}$; $\frac{a(k-1)+2b}{k+1}$.

1303.

№	a_1	d	n	a_n	S_n
1	1,26	—0,3	10	—1,44	—0,9
2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	10	$10\sqrt{3}$	$55\sqrt{3}$
3	19,1	—0,6	17	9,5	243,1
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	41	$10\frac{1}{2}$	225,5

№	a_1	d	n	a_n	S_n
5	1,6	—0,2	9	0	7,2
6	0,75	0,2	21	4,75	57,75
7	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ и 0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	6 и 7	$3\sqrt{2}$	$\frac{21\sqrt{2}}{2}$
8	3,2	—0,4	17	—3,2	0
9	—1, (3)	—2, (2)	10	—21, (3)	—113, (3)
10	4,9	9,8	5	44,1	122,5
11	$-2\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	19	$3\frac{2}{3}$	$12\frac{2}{3}$
12	0	—0,01	100	—0,99	—49,5
13	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	10	$1+3\sqrt{3}$	$10+15\sqrt{3}$
14	0	0,1	11	1	5,5
15	—0,2	—0,1	12	—1,3	—9
16	2,5	—0,5	11	—2,5	0
17	0,2	—0,05	9	—0,2	0
18	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{3}$	9	$-1\frac{5}{6}$	$-4\frac{1}{2}$

1304. 120. **1305.** 11. **1306.** 13. **1307.** 1) —7; 3; 2) —7; 3; 3) —0,7; 0,3; 4) 3; 3 или —33; 15; 5) 0; $1\frac{1}{2}$; 6) 5; —2 или 3; —2; 7) ±4; ∓3; 8) —7; 3 или $13\frac{2}{5}$; $-3\frac{4}{5}$; 9) 1; 3 или $-40\frac{2}{3}$; $19\frac{2}{3}$. **1308.** 1) 10; 2) 15; 3) 12. **1309.** 1) 29; 2) 47; 3) 19. **1310.** 3. **1311.** 5; 7; 9 и —9; —7; —5. **1312.** Любая арифметическая прогрессия, в которой разность равна удвоенному первому члену. **1313.** $[a^2 - ab(n-3) + b^2]\,n$. **1317.** 1275. **1318.** 1280. **1319.** ÷7; 16; 25. **1320.** $a = -5$; $d = 3$. **1321.** 98. **1322.** Нет. **1323.** 15 300.

1326. 8. **1327.** $\frac{\pi}{3}$. **1328.** 1) 102,9 *м*; 2) 592,9 *м*; 3) 30 *сек*. **1329.** 1) ~4,0 *сек*; 2) 122,5 *м*. **1330.** 8 *сек*. **1331.** 10. **1332.** 10 *сек*. **1333.** 12 сторон. **1334.** 1 *мин*. **1335.** 50 *м/мин*^{2}. **1336.** 4 *сек*. **1337.** 4 чел.; 30 руб.; 22 руб.; 14 руб.; 6 руб. **1338.** 6 *сек*. **1339.** 2 *сек*; 9 *сек*. **1340.** 1160 *м*.

1341. 1) $6\cdot 2^{n-1}$; 2) $\frac{6}{5}\cdot 3^{n-1}$; 3) $\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; 4) $-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

1342. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) 2; 3) a^{-1}; 4) $1\frac{1}{3}$. **1343.** $b^2=ac$, где a, b, c — три последовательных члена геометрической прогрессии. **1344.** 1) Да; 2) да. **1346.** 1) 729; 2) 2048; 3) $-\frac{1}{256}$; 4) $\frac{16}{9}$. **1347.** 7. **1348.** 3. **1349.** $\frac{3}{4}$.

1351. 1) 605; 2) —63; 3) $-1\frac{11}{32}$; 4) $\frac{65(3+\sqrt{6})}{24}$; 5) $31\sqrt{6}+30\sqrt{3}$.

1352. 1) 3; 381; 2) —3; $-1\frac{52}{81}$; 3) $\sqrt{6}$; $13\sqrt{6}+12\sqrt{2}$.

1353.

№	a_1	q	n	a_n	S_n
1	—2	3	6	—486	—728
2	$\sqrt{6}$	$\sqrt{2}$	9	$16\sqrt{6}$	$31\sqrt{6}+30\sqrt{3}$
3	2	$-\frac{1}{2}$	8	$-\frac{1}{64}$	$1\frac{21}{64}$
4	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	7	$8\sqrt{2}$	$15\sqrt{2}+14$
5	9	$\frac{2}{3}$	7	$\frac{64}{81}$	$25\frac{34}{81}$
6	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	5	$4\sqrt{3}$	$7\sqrt{3}+3\sqrt{6}$
7	—2	$-1\frac{1}{2}$	6	$15\frac{3}{16}$	$8\frac{5}{16}$
8	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	4	9	$4(3+\sqrt{3})$
9	128	$\frac{1}{2}$	7	2	254
10	$\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{2}$	5	$3\frac{3}{8}$	$8\frac{19}{24}$

№	a_1	q	n	a_n	S_n
11	15	$\frac{1}{3}$ или $-\frac{4}{3}$	3	$1\frac{2}{3}$ или $26\frac{2}{3}$	$21\frac{2}{3}$
12	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$ или $-1-\sqrt{3}$	3	$3\sqrt{2}$ или $4\sqrt{2}+2\sqrt{6}$	$4\sqrt{2}+6$
13	2 или 32	3 или $-\frac{3}{4}$	3	18	26
14	15 или 240	3 или $-\frac{3}{4}$	3	135	195
15	$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{2}$	6	$2\frac{17}{32}$	$6\frac{89}{96}$
16	2	3	4	54	80

1354. $3^{1-\frac{1}{2^n}}$ **1356.** $П = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$. **1357.** 1) $50\frac{46}{81}$; 2) $2^3 \cdot 3^{14} \cdot \sqrt{2}$; 3) $\frac{81\sqrt{6}}{32}$; 4) $\frac{1}{a^{15}}$. **1358.** 81; 27; 9; 3. **1359.** 16; 32; 64. **1360.** $q = \sqrt{\frac{b}{a}}$. **1361.** 14. **1362.** 1) 3; 2; 2) —5; ±2. **1363.** 1) —3; —2; 10; 2) 1; 2; 5. **1364.** 121 и $11\frac{5}{16}$. **1365.** 765. **1366.** 2. **1367.** 9; 6; 4; $2\frac{2}{3}$. **1368.** $a = 8$; $q = \frac{3}{2}$. **1370.** 1; 3; 9; ... и 9; 3; 1; ... **1371.** 1; 3; 9; ... и 9; 3; 1; ... **1372.** 12; 7; 2 и 3; 7; 11. **1373.** 4; 8; 16. **1374.** 2; 8; 32. **1375.** 12; 14; 16. **1376.** 2; 8; 32. **1377.** $128\frac{7}{8}$. **1378.** 22,5 и 2,5. **1379.** 10. **1380.** 4. **1381.** 20. **1382.** 8 или 11. **1383.** 200. **1384.** 135. **1385.** ÷27; 18; 9. **1386.** $\sim 0{,}49$ *г.* Указание. Количество вещества, оставшегося при радиоактивном распаде, определяется по формуле $M = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$.

1387. 1) 4; 2) 12; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) $\frac{3}{5}$. **1388.** 1) $2(\sqrt{2}-1)$; 2) $3(\sqrt{3}+1)$; 3) $\frac{9}{2}(\sqrt{3}+1)$; 4) $\frac{3}{2}(\sqrt{6}+2)$. **1389.** 1) $3\sqrt{2}+4$; 2) $\frac{1}{2}(3\sqrt{3}+5)$; 3) $\frac{x}{y-x}$. **1390.** В двоичной. **1391.** 1) 2; 2) $\sqrt{2}$; 3) 2. **1392.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1393.** $\frac{\sqrt{30}}{6}$. **1394.** 12. **1395.** 1) $\frac{2}{9}$; 2) $2\frac{7}{9}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) $2\frac{7}{33}$; 5) $1\frac{3}{11}$; 6) $\frac{19}{99}$; 7) $3\frac{38}{111}$; 8) $\frac{901}{999}$; 9) $5\frac{2}{999}$. **1396.** 1) $\frac{7}{30}$; 2) $1\frac{7}{90}$; 3) $2\frac{107}{330}$;

4) $3\frac{809}{1110}$; 5) $3\frac{61}{300}$; 6) $2\frac{101}{660}$; 7) $1\frac{313}{4950}$; 8) $\frac{91}{11\,100}$; 9) $\frac{1001}{9000}$.
1397. 1) 2; 2) $2(2-\sqrt{3})$; 3) $\frac{2(6+\sqrt{2})}{17}\approx 0{,}87$; 4) $4(2+\sqrt{3})\approx 14{,}9$.
1398. 1) $\frac{13}{24}$; 2) 4; 3) $2(7+\sqrt{2})$; 4) 1. **1399.** $1111\frac{1}{9}$ *м*. **1400.** $65\frac{5}{11}$ *мин*.
1401. 1) 24 *см*; 2) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ *см*^{2}. **1402.** $a^2\sqrt{3}$. **1403.** $4a(2+\sqrt{2})$; 2) $2a^2$; 3) $\pi a(2+\sqrt{2})$; 4) $\frac{\pi a^2}{2}$. **1404.** 1) $6R\sqrt{3}$; 2) $R^2\sqrt{3}$; 3) $4\pi R$; 4) $\frac{4}{3}\pi R^2$.
1405. 1) $2a$; 2) $a(2+\sqrt{2})$; 3) $2a(2+\sqrt{3})$.

VII. Задачи для повторения курса IX класса

1406. $x\leqslant 0{,}07$. **1407.** -1 при $x=0$ и $x=2$. **1408.** 1) и 4) могут. **1409.** Решений нет. **1410.** 3. **1411.** 1) $\left(\frac{a+b}{a};\ \frac{a-b}{b}\right)$; 2) (1,5; 3,5); (2,5; 3,5). **1412.** 1) $a\neq 4$; 2) $a=7$; 3) нет; 4) $a=4$. **1413.** 1) $a=3$; 2) $a=5$; 3) $a\neq 3$; $a\neq 5$. **1414.** 1) $\sqrt{3}-\sqrt{2}>0{,}3$; 2) $\sqrt{\frac{4-\sqrt{15}}{2}}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$. **1417.** 1) $-1<x<5$; 2) $x>4$. **1418.** 1) $3<x<5$; 2) $|x|>1$, кроме $x=3$; 3) $-1<x<3$. **1419.** 1 и 2. **1420.** 2 и 3. **1421.** 1) $-2{,}5<x<3$; 2) $x<2{,}5$; $x>5$. **1422.** $-1<x<0$ и $4<x<5$. **1423.** 1) $a<-5\frac{2}{15}$; $a>1\frac{5}{7}$; 2) $-5<a<-1\frac{1}{5}$. **1424.** 1) $n\neq 3\frac{3}{4}$; 2) нет; 3) $n=3\frac{3}{4}$. **1425.** $50^\circ\leqslant\beta\leqslant 75^\circ$; $59^\circ\leqslant\delta\leqslant 87^\circ$. **1426.** $\frac{dr_2}{r_1-r_2}$, если $r_1>r_2$. **1427.** $\frac{240}{7}(2t-9)$ *км*; $\frac{360}{7}(8-t)$ *км*; $4{,}5<t<8$. **1428.** $q\leqslant\frac{p}{t}(T-t)$. **1429.** 1) 28 *мин*; 21 *мин*; 2) решений нет, если $k=0$; удовлетворяется тождественно, если $k=1$; единственное решение, если $k\neq 0$, $k\neq 1$; 3) 2. **1430.** 1) 9 *ч* 30 *мин*; 2) —1 и 4; 3) решений нет. **1431.** 1) $\frac{150a}{5-a}$ ваг.; $\frac{10a+100}{5-a}$ ваг., где $a=3$; 4; 2) $x>2$; 3) $a<-3\frac{1}{3}$; $a>-2\frac{2}{5}$. **1432.** 1) 12; 24; 36; 48; $a=\frac{4}{7}$; 2, а) $k\neq 1$, $k\neq 4$; б) $k=4$; в) $k=1$; 4) $12<k<18$.

1433. 1,а) $x<2$; б) $x<2$; $x>6$; 3) 44; 45; 46; 47. **1434.** 1,а) $x>1\frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{2}<x<2\frac{1}{2}$; 3) 41; 52; 63. **1435.** 1) $x=\frac{6}{4-a}$ при $4-a\neq 0$; $x<0$, если $a>4$; $x>0$, если $a<4$; не имеет решений, если $a=4$; 2) $x<-3$; $x>-1$; 3) $\frac{48-12a}{a+1}$ сеялок, если $0<a\leqslant 4$. **1436.** 1) $x=\frac{4-k}{k-6}$ при $k-6\neq 0$; $x>0$, если $4<k<6$; $x<0$, если $k<4$, или $k>6$; $x=0$, если $k=4$; нет решений, если $k=6$; 2) $-5<x<6$; 3) 8 тракторов, если $a=2$. **1437.** 1) (—2; 0); (6; 4); 2, а) при $k\neq -1$ и $k\neq -5$; б) при $k=-5$; в) при $k=-1$. **1438.** 1) (0; 3); (4; 1); 2, а) $m\neq -1$; $m\neq\frac{1}{3}$; б) $m=-1$; в) $m=\frac{1}{3}$.

1439. 1, а) 0; б) —1; 1. **1441.** $2a$. **1444.** Да. **1445.** 1) Указание. Решить уравнение $N = 1 + \frac{1}{1+N}$; 2) ~1,414. **1446.** 6. **1447.** $-2(2+\sqrt{3})$ и $2+\sqrt{3}$. **1449.** —12. **1450.** —7; 2. **1451.** —3; 9. **1452.** 1) $\frac{x-5}{2(x-2)}$; 2) $\frac{1}{(4x+3)(x-2)}$. **1453.** 1) —3; 5; 2) —3; —2; $\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$. **1454.** $(x+3+2\sqrt{2})\cdot(x+3-2\sqrt{2})(x+1)^2$. **1455.** 1) $\pm\sqrt{a}$; 2) $\pm a\sqrt{2}$; 3) $-1\pm\sqrt{3+a}$; $1\pm\sqrt{1+a}$. **1456.** $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; ±3. **1457.** $\sqrt{\frac{a}{2}(\sqrt{5}\pm 1)}$ *м*.

1458. 1) 1,25a; 2) 2a. **1459.** 1) 1; 27; 2) 1; 2; 3) —3; 2; 4) $1\frac{2}{7}$; 5) $1\frac{2}{31}$. **1460.** 1) (—6; —4); (—6; 2); (3; —4); (3; 2); 2) (±2; ∓1); 3) (1; 3); (3; 1); 4) (4; 64); (64; 4). **1461.** 1) 2; 3; 4; 5; 2) 25. **1462.** 1) (3; 4); (4,5; 8,5); 2) (—1,5; —2); (3; 1); 3) (1; —3). **1463.** $a=2$; $b=-3$; $c=-5$. **1464.** $a=1$; $b=-8$; $c=15$. **1465.** h. Указание. Выразить полную поверхность оставшейся части бруска через a, h и x (сторону основания выреза) и определить значение x для наибольшего значения поверхности. **1466.** 1) 2 *сек* и 4 *сек*; 2) 6 *сек*. **1467.** 30 *мин*. **1468.** 125 *км*. **1469.** 1, а) $x^2-2x-1=0$; б) $3x^2+2x=0$; 2) $\frac{25}{36}$; 3) —0,6; 4) $\frac{2a+1}{2a+3}$. **1470.** 1) 10 *км/ч*; 12 *км/ч*; 2) m; 3) 15. **1471.** 1) 22,5 *км/ч*; 2) 1 и 1,5; 3) $2<x<3$. **1472.** 1) 36 и 4; 2) 2 и 6; 3) (3; 4); (—3; 4); (0; —5). **1473.** 1) 35 *кГ*; 168 *кГ*; 2) 4; 3) (3; —4); (4; —3); (—4; 3); (—3; 4).

1474. 1) $\pm 5+\sqrt{25+20S}$ *км/ч*, где $120<S<180$; 2) 0. **1475.** 1) $\frac{5+\sqrt{25+10a}}{2}$ *га*, где $120<a<300$; 2) 2. **1476.** 1) $x^2\pm 0,7x+0,1=0$; 2, а) $k<\frac{5}{8}$; б) $k=\frac{5}{8}$; в) $k>\frac{5}{8}$. **1477.** 1) $x^2-8x+12=0$. **1478.** 1) (±3; ±1); $\left(\mp 12; \pm 3\frac{1}{2}\right)$; 2) 2; 4; 6; 8. Указание. $x^2+x+10>0$ при всех действительных значениях x. **1479.** 1) $(\pm 3\sqrt{3}; \pm\sqrt{3})$; (±4; ±5); 2) 2; 3; 4; 5; 3) 3.

1480. 1) $10^{20}>90^{10}$. Указание. $10^{20}=100^{10}$. 2) $\left(\frac{1}{8}\right)^{10}>\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$. **1481.** 1) $\sqrt{2}-1$; 2) $\sqrt{3}-1$; 3) $\sqrt{5}-2$; 4) $2-\sqrt{3}$. **1482.** 4. **1483.** 1) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+3)$; 2) $\left(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{6}}\right)^2$. **1485.** $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$; $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. **1486.** $\frac{1}{2}$; 2. **1487.** 1) 4; 2) 8; 3) —2; $-2\frac{7}{15}$; 4) 2. **1488.** ~1,587. **1489.** 1) $a-b$; 2) —2; 3) $\frac{(a+x)\sqrt{ax}}{ax}$.

1490. 1, а) —2; б) 7; 2) $\frac{(a-b)^2}{a^2b^2}$; 3) —1; 1. **1491.** 1, а) —2; б) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{(a-b)^2}{a^2b^2}$; 3) 4 корня (~±0,5; ~±1,9). **1492.** 1) $x-2$; 2) $\sqrt{5}-1$; 3) 16. **1493.** 1) $a^{-\frac{1}{2}}b$; 2) ~0,173; 3) 8. **1494.** 1) $\sqrt[4]{ab}$; 2) ~3,863; 3) 6 и в. **1495.** 1) $ab^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)$; 2) $2x^2-2x-1=0$; 3) $\frac{1}{\sqrt[5]{5}}$.

1496. Нет. 1497. $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{8}{15}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{15}{8}$. 1498. Нет. 1499. $-a^2$, где $|a| < 1$. 1500. $-3\frac{3}{7}$. 1502. 1) $60^\circ(3n+1)$; 2) $2\pi k$. 1504. $y_{\text{наиб}} = 3$ при $x = 0$; $y_{\text{наим}} = 1$ при $x = \pm\frac{\pi}{2}$. 1505. π. 1506. 1. 1508. −1. 1511. Период 4π; в первом периоде $y > 0$, если $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$; $y < 0$, если $0 < x < \frac{\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3} < x < 4\pi$; $y_{\text{наиб}} = 1$ при $x = \pi$, $y_{\text{наим}} = -3$ при $x = 3\pi$. 1512. $\pi < x < 2\pi$. 1513. Два. 1514. 1) 1; 3; 5. Указание. $3 - \sin x > 0$; 2) −1; 0; 1; 2; 3; 4. Указание. $\cos x - 2 < 0$.

1515. 1) $360^\circ k - 40^\circ$; 2) $131^\circ 47'$; 3) 2,7 *рад*. 4) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$. 1516. 1) $2\pi k + 2{,}8$; 2) 2,20 *рад*; 3) $134^\circ 22'$; 4) -30°; 60°; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 1517. 1, а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg} 20^\circ > \cos 20^\circ$; 3) $\sim 0{,}266$; 5) $y_{\text{наим}} = 1$ при $x = \frac{5\pi}{6}$. 1518. 1, а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\sin 50^\circ - \operatorname{tg} 50^\circ < 0$; 3) 1; 5) $y_{\text{наиб}} = 5$ при $x = \frac{5\pi}{4}$. 1519. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2, а) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg} 0{,}77 \approx 0{,}9697$; 3) период π; $y_{\text{наиб}} = 2$ при $x = \frac{\pi}{4}$; $y_{\text{наим}} = 0$ при $x = \frac{3\pi}{4}$. 1520. 1) $\frac{3-\pi}{6}$; 2, а) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg} 0{,}54 \approx 0{,}5994$; 3) период π; $y_{\text{наиб}} = 0$ при $x = 0$; π; $y_{\text{наим}} = -2$ при $x = \frac{\pi}{2}$. 1521. 1) −0,6; 3) 1; 0; 4) $180^\circ k + 30^\circ$. 1522. 1) $-\frac{12}{13}$; 3) 1; 0; 4) $\pi k - \frac{\pi}{12}$. 1523. 1, а) $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $-\sin 0{,}35 \approx -0{,}3429$; 2) 1; 4) -70°; $10^\circ(18k - 7)$. 1524. 1, а) $-\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $-\sin 0{,}75 \approx -0{,}6816$; 2) 1; 4) 150°; $30^\circ(6k + 5)$.

1525. 2; 2; $\frac{4}{3}$; 4; $\frac{6}{5}$; 6; $\frac{8}{7}$; 8; $\frac{10}{9}$; 10. 1526. $\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n(2n+2)}$. 1527. $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; $-\frac{1}{32}$. 1528. 1) 1; $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{9}{6}$; …; предел равен 2; 2) 1; $\frac{17}{11}$; $\frac{17}{9}$; $\frac{19}{9}$; …; предел равен 3; 3) 5; $\frac{9}{\sqrt{5}}$; $\frac{13}{\sqrt{11}}$; $\frac{17}{\sqrt{19}}$; …; предел равен 4. 1529. $k_n = R \cdot \cos\frac{180^\circ}{n}$. 1530. Нет. 1531. −6; 2,5; 1532. 67 626. 1533. 239; 14 400. 1534. 6. 1535. 2 или 5. 1536. 15 250. 1537. 7; −4. 1538. $n \geqslant 8$. 1539. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. 1541. Решение. Искомая сумма S найдется из соотношения $S = S_1 - S_2 - S_3 + S_4$, где $S_1 = \frac{10+99}{2} \cdot 90 = 4905$ — сумма всех двузначных чисел; $S_2 = \frac{12+99}{2} \cdot 30 = 1665$ — сумма двузначных чисел, делящихся на 3;

$S_3 = \frac{10+95}{2} \cdot 18 = 945$ — сумма двузначных чисел, делящихся на 5; $S_4 = \frac{15+90}{2} \cdot 6 = 315$ — сумма двузначных чисел, делящихся на 15. Значит, $S = 2610$. **1543.** 1) Образуют арифметическую прогрессию; 2) нет. **1545.** $11\frac{13}{16}$; $8\frac{5}{16}$. **1546.** 2. **1547.** $\sim 0{,}79$. **1548.** 1; $\sqrt{2}$. **1549.** 1) Указание. Правая часть равенства есть сумма членов геометрической прогрессии. Найти ее. 2, а) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$; б) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$. **1550.** Решение. $(1 + a + a^2 + \ldots + a^n)^2 - a^n = \left(\frac{1 - a^{n+1}}{1-a}\right)^2 - a^n = \frac{(1-a^{n+1})^2 - a^n(1-a)^2}{(1-a)^2} = \frac{(1-a^n)(1-a^{n+2})}{(1-a)^2} = \frac{1-a^n}{1-a} \cdot \frac{1-a^{n+2}}{1-a} = (1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}) \cdot (1 + a + a^2 + \ldots + a^{n+1})$. **1551.** 1) $\sim 36° 52'$; $\sim 53° 08'$. Указание. Составить тригонометрическое уравнение $2\cos\alpha = \sin\alpha + \sin 90°$, где α — острый угол треугольника. 2) $\sim 38° 10'$; $\sim 51° 50'$. **1553.** 1) 3, 5, 7; 4, 5, 6 и 5, 5, 5. **1554.** 2; 4; 8; 12 или 12,5; 7,5; 4,5; 1,5. **1556.** 1) 5 *мин* и 10 *мин*; 2) 2. **1557.** 1) 13 *сек*; 2) $3\frac{16}{75}$. **1558.** 1) 8; 12; 16; $21\frac{1}{3}$; 2) 10; 3) $n \geqslant 201$; 4) $6 + 4\sqrt{2}$.

1559. 1) $n \geqslant 7$; 2) 375; 3) 31. **1560.** 1) $n \geqslant 6$; 2) 0; 3) $\frac{n-1}{2}$. **1561.** 1) 6; 2) $3\frac{31}{150}$; 3) 6; 18 и 54. **1562.** 1) 5; 2) $\frac{7+5\sqrt{2}}{2}$; 3) 240. **1563.** 1) 2 или 11; 2) $a_1 = 15$; $d = -4$; 3) $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{10}$, $\frac{1}{17}$, $-\frac{1}{26}$, $\frac{1}{37}$, $-\frac{1}{50}$, $\frac{1}{65}$. Нет. 4) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$. **1564.** 1) 8; 2) $a_1 = 2$; $d = 1$, 3) $\frac{n}{2n-1} = \frac{100}{199}$; 4, а) 2; б) 0.

VIII. Тригонометрические теоремы сложения и их следствия

1566. 1) $\cos\alpha$; 2) $-\sin\alpha$. **1567.** 1) $\frac{33}{65}$; 2) $\frac{63}{65}$. **1568.** 1) $\frac{8+15\sqrt{3}}{34}$; 2) $\frac{8-15\sqrt{3}}{34}$. **1569.** $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$. **1570.** $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$. **1571.** $\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$. **1572.** 1) $-0{,}6$; 2) $-0{,}936$. **1573.** 1) $-\frac{119}{169}$; 2) $\frac{91}{325}$. **1574.** 1) $-\frac{416}{425}$; 2) $\frac{304}{425}$. **1575.** $\frac{58}{63}$. Указание. $\cos\beta = \cos[(\alpha+\beta) - \alpha]$. **1578.** 1) 0,28; 2) 0,8; 3) $-\frac{15}{13}$. **1579.** 1) $\arccos\left(-\frac{13}{85}\right)$. Решение. Так как $0 < \arcsin\frac{3}{5} < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \arcsin\frac{15}{17} < \frac{\pi}{2}$, то $0 < \arcsin\frac{15}{17} + \arcsin\frac{3}{5} < \pi$. Имеем: $\cos\left(\arcsin\frac{15}{17} + \arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{8}{17} \times \frac{4}{5} - \frac{15}{17} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{13}{85}$. Дуги $\arccos\left(-\frac{13}{85}\right)$ и $\arcsin\frac{15}{17} + \arcsin\frac{3}{5}$ лежат в одном и том же числовом промежутке $(0; \pi)$ и имеют равные косинусы, значит, они равны $\arcsin\frac{15}{17}+\arcsin\frac{3}{5}=\arccos\left(-\frac{13}{85}\right)$; 2) $\arccos\frac{63}{65}$; 3) $\arccos\frac{64}{1025}$; 4) $\arccos\frac{468}{493}$. **1580.** $\frac{24}{145}$. **1581.** 1) $\pi k+\frac{\pi}{2}$; 2) $\pi k+\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4}$; 3) πk; 4) $360^\circ\cdot k+15^\circ$; 5) $360^\circ\cdot k+30^\circ$ и $360^\circ\cdot k-90^\circ$. **1583.** 1) $\cos\alpha$; 2) $\sin\alpha$. **1584.** 1) 0,8; −0,352. **1585.** 1) $-\frac{31\sqrt{2}}{82}$; 2) $\frac{49\sqrt{2}}{82}$. **1586.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$. **1587.** $\frac{1}{6}(3+\sqrt{6})$. **1588.** $0{,}1(4-3\sqrt{3})$. **1589.** $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{1-p^2}-p)$. **1590.** 1) $\frac{1189}{4225}$; 2) $-\frac{119}{4225}$. **1591.** −0,6. Решение. По условию $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ и $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)<0$. Поэтому $-\frac{5\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\alpha<-\frac{3\pi}{4}$ и $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-0{,}7\sqrt{2}$; $\sin\alpha=\sin\left[\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-0{,}7\sqrt{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-0{,}1\sqrt{2})=-0{,}6$. **1594.** 1) $-\frac{140}{221}$; 2) $\frac{44}{125}$; 3) $\frac{352}{377}$. **1595.** 1) $\arcsin\frac{429}{625}$; 2) $\arcsin\frac{156}{205}$; 3) $\arcsin\frac{21}{221}$; 4) $-\arcsin\frac{33}{65}$. **1596.** $\frac{1288}{1313}$. **1597.** 1) $\frac{2\pi k}{3}$; 2) $\frac{\pi k}{3}$ и $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi k}{3}$ и $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4}$; 4) $360^\circ\cdot k$ и $360^\circ\cdot k+120^\circ$. **1598.** 1) 0,5; 2) $\cos 10^\circ$. **1599.** 1) $\sin 3{,}14\approx 0$; 2) 0,5. **1600.** 1) $\sin 3\varphi$; 2) 1. **1601.** 1) $\cos\beta$; 2) 0,5. **1602.** 1) $\sin(n\pm 1)x$; $\cos(n\pm 1)x$. **1603.** 1) $2\cos 10^\circ$; 2) 0. **1604.** 1) $\operatorname{tg} 15^\circ$; 2) $\cos\frac{\pi}{30}$. **1605.** 1) $\cos 10^\circ$; 2) 2. **1606.** 1) $\cos(\alpha-\beta)$; 2) $\cos(\alpha+\beta)$. **1607.** 1) 1; 2) 1. **1608.** 1) $\operatorname{tg}\alpha$; 2) $-\operatorname{ctg}\alpha$. **1609.** 1) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$; 2) $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$. **1610.** 1) 1; 2) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$. **1611.** 1) 1; 2) 1. **1612.** 1) $\sin 40^\circ$. Решение. $\sin 20^\circ+2\sin 40^\circ-\sin 100^\circ=\sin(30^\circ-10^\circ)+2\sin(30^\circ+10^\circ)-\cos 10^\circ=\sin 30^\circ\cdot\cos 10^\circ+\sin 10^\circ\cdot\cos 30^\circ=\sin 40^\circ$. 2) $-\sin 40^\circ$. Указание. Углы 10° и 50° представить соответственно в виде $30^\circ-20^\circ$ и $30^\circ+20^\circ$. **1623.** 1) Решение. $\cos 15^\circ+\sin 15^\circ=\frac{1}{\cos 45^\circ}\cdot(\sin 45^\circ\cdot\cos 15^\circ+\sin 15^\circ\cdot\cos 45^\circ)=\frac{\sin 60^\circ}{\cos 45^\circ}$. 2) Указание. Умножить и разделить левую часть тождества на $\sin 45^\circ$. **1628.** 1) $\sim 0{,}178$; 2) $\sim 0{,}612$. **1633.** $\alpha+\beta+\gamma=\pi k+\frac{\pi}{2}$. Решение. Заметив, что $\alpha+\beta\neq\pi k+\frac{\pi}{2}$, преобразуем данное соотношение так: $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\gamma=\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\gamma$, или $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=0$, откуда $\alpha+\beta+\gamma=\pi k+\frac{\pi}{2}$. **1634.** 1) Решение. Пусть $\arcsin\frac{5}{13}=\alpha$ и $\arcsin\frac{12}{13}=\beta$. Тогда $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

и $\sin\beta = \frac{12}{13}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Находим: $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$, $\cos(\alpha+\beta) = \frac{12}{13}\cdot\frac{5}{13} - \frac{5}{13}\cdot\frac{12}{13} = 0$. Так как $0 < \alpha+\beta < \pi$ и $\cos(\alpha+\beta) = 0$, то $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$. 2) Решение. По определению $0 < \arccos\sqrt{\frac{2}{3}} < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} < \frac{\pi}{2}$, поэтому $-\frac{\pi}{2} < \arccos\sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} < \frac{\pi}{2}$. Найдем: $\sin\left(\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}\right) = \sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}+1-\sqrt{6}+2}{6} = 0{,}5$, так как $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3-2\sqrt{6}+2} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$. Итак, дуга $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}$ принадлежит замкнутому интервалу $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ и синус ее равен 0,5, значит, $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. **1636.** $\arccos 0{,}2$. **1637.** $\arcsin\frac{2}{3}$. **1638.** $\pi k + \frac{\pi}{2}$. **1639.** πk, если $\alpha \neq \pi k + \frac{\pi}{2}$; любое действительное число, если $\alpha = \pi k + \frac{\pi}{2}$. **1640.** πk, если $\alpha \neq \pi k$; любое действительное число, если $\alpha = \pi k$. **1641.** Любое действительное число, если $a = \pi k + \frac{\pi}{2}$; нет решений, если $a \neq \pi k + \frac{\pi}{2}$. **1642.** $\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4}$. **1643.** $\frac{2\pi k}{3}$. **1644.** $\frac{2\pi k}{n+1}$, $n \neq -1$. **1645.** $\frac{\pi k}{3}$ и $\pi k + \frac{\pi}{2}$. **1646.** $\frac{\pi k}{3} + \frac{\pi}{12}$. **1647.** πk. **1648.** $\pi k + \frac{\pi}{2}$ и $2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$. **1649.** $\pi k - \frac{\pi}{6}$. **1650.** $2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}$. **1651.** Равнобедренный.

1653. 1) $\frac{11}{13}$; 2) $\frac{1}{17}$. **1654.** 1) 5; 2) 0,2. **1655.** 1) $2-\sqrt{3}$; 2) $2+\sqrt{3}$; 3) $-(2+\sqrt{3})$. **1657.** -2. **1658.** 1) 1; 2) 7. **1660.** 1) -3; 2) $-\frac{1}{3}$. **1661.** $-0{,}75$. **1662.** $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}$. **1663.** 1) 1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) -1; 4) 1. **1664.** 1) 8; 2) 1; 3) $\frac{1}{32}$; 4) $\frac{1}{2}$. **1666.** 1) $\operatorname{arctg} 2$; 2) $\operatorname{arcctg} 0{,}8$. **1669.** 225°. **1670.** $\frac{\pi}{4}$. **1671.** $\pi k - \frac{\pi}{4}$. **1675.** 1) 1; 2) 1. **1676.** 1) $\operatorname{tg} 3{,}14 \approx 0$; 2) $\operatorname{tg} 0{,}78 \approx \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. **1677.** 1) 0; 2) 0. **1678.** 1) 1; 2) 1. **1679.** Решение. $\frac{3\operatorname{ctg}^2 15^\circ - 1}{3 - \operatorname{ctg}^2 15^\circ} = \frac{\operatorname{ctg}^2 30^\circ\cdot\operatorname{ctg}^2 15^\circ - 1}{\operatorname{ctg}^2 30^\circ - \operatorname{ctg}^2 15^\circ} = \frac{\operatorname{ctg} 30^\circ\cdot\operatorname{ctg} 15^\circ + 1}{\operatorname{ctg} 30^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ}\cdot\frac{\operatorname{ctg} 30^\circ\cdot\operatorname{ctg} 15^\circ - 1}{\operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ} = \operatorname{ctg}(15^\circ - 30^\circ)\cdot\operatorname{ctg}(15^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{ctg} 15^\circ$. 2) 1. Указание. Угол 50° заменить суммой $45^\circ + 5^\circ$.

1687. Указание. $15° = 45° - 30°$. **1689.** $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{a-b}{1+ab}$. Решение. $\operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg}[(\alpha+x) - (\alpha-y)] = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+x) - \operatorname{tg}(\alpha-y)}{1+\operatorname{tg}(\alpha+x)\cdot\operatorname{tg}(\alpha-y)} = \frac{a-b}{1+ab}$. **1692.** 1) $180°\cdot k - 15°$; 2) $\frac{\pi k}{2} - \frac{4\pi}{15}$; 3) $180°\cdot k - 30°$.

1693. 1) $2\sin 1{,}5\alpha\cdot\cos 1{,}5\alpha$; 2) $2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}$; 3) $\cos^2\frac{\alpha}{8} - \sin^2\frac{\alpha}{8}$; 4) $\frac{2\operatorname{tg}27°}{1-\operatorname{tg}^2 27°}$; 5) $\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{z}{3} - 15°\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{z}{3} - 15°\right)}$; 6) $\cos^2\left(\frac{\pi}{5} + \frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{5} + \frac{x}{2}\right)$; 7) $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\gamma\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\gamma\right)$; 8) $\cos^2(1{,}5\beta + 0.05\gamma) - \sin^2(1{,}5\beta + 0{,}05\gamma)$; 9) $\frac{2\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{1}{4}\varphi\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\alpha - \frac{1}{4}\varphi\right)}$. **1694.** $\sin 2\alpha = \pm 2\sin\alpha\cdot\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm 2\cos\alpha\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. **1695.** $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \pm 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \pm 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$. **1696.** 1) $\sim 0{,}54$; $\sim -0{,}84$ и $-\frac{336}{527}$; 2) $-\frac{240}{289}$; $-\frac{161}{289}$ и $\frac{240}{161}$. **1697.** $-\frac{120}{169}$ и $-\frac{119}{169}$. **1698.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $-3\frac{3}{7}$. **1699.** $-\frac{1}{7}$. **1700.** 1) $\frac{123}{845}$; 2) $\frac{323}{325}$. **1701.** $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

1702. $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; $1\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{4}$. **1703.** 1) $-0{,}2$; 2) $1{,}4$. **1704.** $2\pi k$ и $\pi k + \frac{\pi}{2}$. **1705.** $\alpha = 180°\cdot k$. **1706.** 1) $2\cos\alpha > \cos 2\alpha$. Знак равенства имеет место, если $\alpha = 360°\cdot k \pm \arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. 2) $\operatorname{tg}2\alpha > 2\operatorname{tg}\alpha$, если $0° < \alpha < 45°$; $\operatorname{tg}2\alpha < 2\operatorname{tg}\alpha$, если $45° < \alpha < 90°$; $\operatorname{tg}2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha$, если $\alpha = 180°\cdot k$. **1707.** 1) $\frac{720}{1681}$; 2) $-0{,}92$; 3) $-\frac{1}{9}$; 4) $\frac{175}{288}$. **1708.** $\frac{240}{289}$ и $\frac{161}{289}$. **1709.** 1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$; $\operatorname{tg}3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$; 2) $\sin 4\alpha = \pm 4\sin\alpha\cdot(1-2\sin^2\alpha)\cdot\sqrt{1-2\sin^2\alpha}$; $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$; $\operatorname{tg}4\alpha = \frac{4\operatorname{tg}\alpha\cdot(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-6\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha}$. **1710.** 1) $\pm 0{,}8$; 2) $0{,}6$. **1711.** 1) $\frac{24}{25}$; 2) $-\frac{7}{25}$. **1712.** Решение. $\sin 36° = \cos 54°$, $\sin 2\cdot 18° = \cos 3\cdot 18°$; $4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0$, откуда $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

1713. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\sim 5\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}=5$. **1714.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 4) $\sqrt{5}+1$. **1715.** 1) $\cos 10^\circ$; 2) $\cos\alpha$. **1716.** 1) $-\cos 20^\circ$; 2) $\sin 2\alpha$. **1717.** 1) 1; 2) 1. **1718.** 1) 1; 2) 1. **1719.** 1) $\cos\alpha$; 2) $\cos 3\alpha$. **1720.** 1) $\cos 4\beta$; 2) $0{,}125\cos 4\alpha$. **1721.** 1) $\sin 2\alpha$; 2) $\sin 2\alpha$. **1722.** 1) 1; 2) 1. **1723.** 1) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 2) $2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. **1724.** 1) $\mathrm{tg}\,2\alpha$; 2) $\mathrm{tg}\,2\alpha$. **1725.** 1) $\sin 3\alpha$; 2) $0{,}5\,\mathrm{ctg}\,2\alpha$. **1726.** 1) $\cos 2\alpha$; 2) $\mathrm{tg}\,2\alpha$. **1727.** 1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$. **1728.** 1) Не существует; 2) не существует. **1737.** 1) Решение.

$$\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{4\sin\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{2\sin\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=$$

$=\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{4}$. 2) Указание. Умножить и разделить левую часть на $\sin 10^\circ$. 3) Указание. Умножить и разделить левую часть на $\cos 10^\circ$. **1738.** Решение. Пользуясь тождеством $\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}\,x=-2\,\mathrm{ctg}\,2x$, найдем: $\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha=-2\,\mathrm{ctg}\,2\alpha$, $2\,\mathrm{tg}\,2\alpha-2\,\mathrm{ctg}\,2\alpha=-4\,\mathrm{ctg}\,4\alpha$, $4\,\mathrm{tg}\,4\alpha-4\,\mathrm{ctg}\,4\alpha=-8\,\mathrm{ctg}\,8\alpha$, $8\,\mathrm{tg}\,8\alpha-8\,\mathrm{ctg}\,8\alpha=-16\,\mathrm{ctg}\,16\alpha$, $16\,\mathrm{tg}\,16\alpha-16\,\mathrm{ctg}\,16\alpha=-32\,\mathrm{ctg}\,32\alpha$. Складывая почленно эти равенства, получим требуемое тождество. **1739.** Решение. $\mathrm{tg}\,36^\circ\cdot\mathrm{tg}\,72^\circ=\mathrm{tg}\,(2\cdot 18^\circ)\times\mathrm{ctg}\,18^\circ=\frac{2\,\mathrm{tg}\,18^\circ\cdot\mathrm{ctg}\,18^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\,18^\circ}=\frac{2}{1-\mathrm{tg}^2\,18^\circ}=2:\left[1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2\right]=\frac{2(10+2\sqrt{5})}{4+4\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, отсюда $\mathrm{tg}^2\,36^\circ\cdot\mathrm{tg}^2\,72^\circ=5$. **1745.** 1) π; 2) π; 3) 2π. Указание. Представить функцию в виде $y=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. 4) 2π. 5) $\frac{\pi}{2}$. Указание. Представить функцию в виде $y=\cos 4x$. **1746.** 1) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$; 2) 1 и -1; 3) 1 и -1; 4) 1 и -1. Указание. Представить данную функцию в виде $y=\cos 2x$. **1748.** 1) $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4}$; 2) πk; 3) нет решений; 4) $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{8}$; 5) $\pi k+\frac{\pi}{12}$ и $\pi k+\frac{5\pi}{12}$; 6) $\pi k+\frac{\pi}{4}$; 7) $60^\circ\cdot k+15^\circ$; 8) $3\pi k+\frac{\pi}{2}$; 9) $180^\circ\cdot k+15^\circ$ и $180^\circ\cdot k+75^\circ$.

1749. 3) $\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\pi x}{2}}$; 5) $\pm\sqrt{\frac{1-\cos\left(4A-\frac{\pi}{4}\right)}{1+\cos\left(4A-\frac{\pi}{4}\right)}}$.

1751. 1) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ и $\sqrt{2}-1$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ и $2-\sqrt{3}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ и $2\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{3}-2$. **1752.** 1) $\frac{8}{17}$, $\frac{15}{17}$ и $\frac{8}{15}$; 2) $-\frac{5}{13}$, $-\frac{12}{13}$ и $\frac{5}{12}$;

3) $\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{5}$ и $1\frac{1}{3}$. **1753.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 2; $\frac{1}{2}$. **1754.** $1\frac{1}{3}$ и 3. **1755.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{1}{3}$. **1756.** $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha}\mp\sqrt{1-\sin\alpha}}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha}\pm\sqrt{1-\sin\alpha}}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha}\mp\sqrt{1-\sin\alpha}}{\pm\sqrt{1+\sin\alpha}\pm\sqrt{1-\sin\alpha}}$. **1757.** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+1}}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{ctg}\alpha\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$. **1758.** $-0{,}2$ и -5. **1762.** 1) $-2\cos\alpha$; 2) $\sin 2\alpha$. **1763.** 1) $\left|\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right|$; 2) $2\left|\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right|$. **1764.** 1) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^2(45^\circ-\alpha)$. **1765.** 1) $\sin 2\alpha$; 2) $\sin 2\alpha$. **1766.** 1) $\operatorname{tg}25^\circ$; 2) $\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)$. **1767.** 1) 1; 2) 1. **1768.** 1) $\sqrt{2}\operatorname{ctg}2\alpha$; 2) $\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$; **1769.** 1) $\cos\frac{\alpha}{4}$; 2) $\sin\frac{\alpha}{4}$. **1770.** 1) Не существует; 2) не существует. **1771.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{1}{2}$. **1779.** 2) Указание. В формуле $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}\right)$ положить $\alpha=\arcsin x$. 3) Указание. В формуле $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}\right)$ положить $\alpha=\arcsin x$. **1780.** 1) Указание. Привести функцию к виду $y=1-2\cos 2x$. 2) Указание. Представить функцию в виде $y=1-\cos 2x$. **1781.** 1) 2 и -1; 2) 3 и 0. **1782.** 1) $2\pi k$ и $4\pi k+\pi$; 2) $2\pi k+\pi$ и $4\pi k$; 3) $2\pi k$ и $2\pi k+\frac{\pi}{2}$; 4) $2\pi k+\pi$ и $2\pi k+\frac{\pi}{2}$; 5) πk и $\pi k+\frac{\pi}{4}$; 6) $2\pi k$.

1783. 1) $\frac{1}{2}(\cos 10^\circ+\cos 20^\circ)$; 2) $\sin 6^\circ+\sin 42^\circ$; 3) $\cos\frac{3\pi}{40}+\cos\frac{13\pi}{40}$; 4) $\cos 2a+\cos 2b$; 5) $\cos 1+\cos(2x+1)$; 6) $\frac{1}{2}\left[\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$. **1784.** 1) $\frac{1}{2}(\cos 9^\circ-\cos 55^\circ)$; 2) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{24}-\cos\frac{5\pi}{24}\right)$; 3) $\cos A-\cos 3A$; 4) $\cos 2\alpha-\cos 2x$. **1785.** 1) $\frac{1}{2}(\sin 25^\circ+\sin 5^\circ)$; 2) $\frac{1}{2}-\sin 2^\circ$; 3) $\sin 5^\circ-\sin 1^\circ$; 4) $\frac{1}{2}\sin 2(x-y)$. **1786.** 1) $\frac{1}{4}(\sin 24^\circ+\sin 12^\circ+\sin 8^\circ-\sin 4^\circ)$; 2) $\cos 5^\circ-\cos 15^\circ+\cos 35^\circ-\cos 45^\circ$; 3) $\sin 18^\circ+\sin 14^\circ-\sin 42^\circ+\sin 10^\circ$; 4) $\frac{1}{4}\left(\cos 5^\circ+\cos 25^\circ+\frac{1}{2}\cos 15^\circ\right)$. **1787.** 1) $\cos 1^\circ+\cos 3^\circ+\cos 5^\circ+\cos 7^\circ+\cos 9^\circ+\cos 11^\circ+\cos 13^\circ+\cos 15^\circ$; 2) $1-\cos 6A-\cos 8A+\cos 10A$. **1790.** 1) $\frac{1}{2}(1-\cos 6A)$; 2) $1+\sin 2\alpha$; 3) $2\cos x-\cos 2x-1$; 4) $\frac{1}{2}\sin 4\gamma+\frac{1}{4}\cos 8\gamma-\frac{1}{4}$; 5) $\frac{3}{4}\sin\alpha-\frac{1}{4}\sin 3\alpha$; 6) $\frac{3}{2}+2\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 4\alpha$; 7) $2\cos\alpha-\cos 3\alpha-\cos 5\alpha$; 8) $\frac{3}{2}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\sin 4\alpha-\frac{1}{2}\sin 6\alpha+\frac{1}{4}\sin 8\alpha$. **1791.** 1) $\sim 0{,}1983$; 2) $\sim 0{,}3714$;

3) $\sim 1{,}2300$; 4) $\sim 0{,}2000$; 5) $\sim 0{,}4055$; 6) $\sim 0{,}1134$. **1792.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. **1793.** 1) $\sin 3\alpha$; 2) $\cos\alpha$. **1794.** 1) 0,5; 2) 0,5. **1795.** 1) 0,75; 2) 0,25. **1796.** 1) 0,25; 2) 1. **1800.** 1) Решение. $\sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 20^\circ (\cos 40^\circ - \cos 120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{8} (\sin 60^\circ - \sin 20^\circ + \sin 20^\circ) = \frac{3}{16}$. 2) Указание. Воспользоваться тождествами 1800 (1) и 1737 (3). **1801.** Решение. Заметив, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$ и $\beta \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, представим данное равенство в виде $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\beta}{\cos\beta}$, или $2\cos\alpha \cdot \sin\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta$, или $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$, откуда получаем требуемое равенство. **1802.** 1) 0,75; $-0{,}25$. 2) Решение. Представив функцию в виде $y = \frac{1}{2}\sin(b_1 - b_2) + \frac{1}{2}\sin(2ax + b_1 + b_2)$, найдем: $y_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}[1 + \sin(b_1 - b_2)] = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b_1 - b_2}{2}\right)$; $y_{\text{наим}} = \frac{1}{2}[\sin(b_1 - b_2) - 1] = -\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b_1 - b_2}{2}\right)$; 3) 0,75 и $-0{,}25$; 4) $\cos^2\frac{b_1 - b_2}{2}$ и $-\sin^2\frac{b_1 - b_2}{2}$; 5) 0,25 и $-0{,}75$; 6) $\cos^2\frac{b_1 - b_2}{2}$ и $-\sin^2\frac{b_1 - b_2}{2}$; 7) 1 и $\frac{1}{2}$; 8) 1 и $\frac{1}{4}$. **1803.** 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) 2π; 3) 2π; 4) π. **1804.** 1) $\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{12}$; 3) πk и $2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$; 4) πk и $2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}$; 5) $\pi k \pm \frac{\pi}{3}$; 6) $180^\circ \cdot k + 90^\circ$.

1805. 1) $2\cos 15^\circ \cdot \cos 35^\circ$; 2) $2\sin 10^\circ \cdot \sin 26^\circ$; 3) $2\cos\alpha \cdot \cos 4\alpha$; 4) $2\sin\alpha \cdot \sin\beta$. **1806.** 1) $2\sin 20^\circ \cdot \cos 8^\circ$; 2) $2\sin 4^\circ \cdot \cos 1^\circ$; 3) $2\sin x \cdot \cos\alpha$; 4) $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$. **1807.** 1) $\sqrt{2}\cos 25^\circ$; 2) $\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}$; 3) $2\cos 15^\circ \times \sin(A - 15^\circ)$; 4) $2\sin\frac{3\alpha}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{4}\right)$. **1809.** 1) $\frac{\sin 32^\circ}{\cos 15^\circ \cdot \cos 17^\circ}$; 2) $\frac{\sin\frac{\pi}{60}}{\cos\frac{5\pi}{12} \cdot \cos\frac{2\pi}{5}}$; 3) $\frac{\sin 2x}{\cos(x+a) \cdot \cos(x-a)}$; 4) $\frac{1}{2\cos A \cdot \cos(A - 30^\circ)}$. **1811.** 1) $\frac{\sin 40^\circ}{\sin 24^\circ \cdot \sin 16^\circ}$; 2) $2\,\mathrm{tg}\,2\alpha$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{5\pi}{24} \cdot \sin\frac{\pi}{8}}$; 4) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \cdot \cos\beta}$. **1812.** 1) $2\sin\alpha$; 2) $\sin 2x$; 3) $\frac{\cos\alpha}{\cos 3\alpha}$; 4) $\frac{\cos 3\alpha}{\sin\alpha}$. **1813.** 1) $2\cos^2\frac{\alpha}{4}$; 2) $-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right)$; 3) $2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{8}\right)$; 4) $2\sin^2(45^\circ - \alpha)$. **1814.** 1) $\mathrm{tg}^2\alpha$; 2) $\mathrm{tg}^2\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$; 3) $\mathrm{ctg}\,\frac{1}{2}kx$; 4) $\mathrm{tg}\,\frac{x-a}{2}$. **1815.** 1) $2\,\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}$; 2) $2\cos^2(45^\circ - \alpha) \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha$; 3) $-2\,\mathrm{tg}\,\pi\alpha \cdot \sin^2\frac{\pi\alpha}{2}$; 4) $2\,\mathrm{ctg}\,(30^\circ + 2\alpha) \times \sin^2(30^\circ - \alpha)$. **1816.** 1) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} \times$

$\times \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 45°\right)$; 3) $-4\cos\alpha \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$; 4) $-4\sin\alpha \cdot \sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

1817. 1) $\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}$; 2) $\frac{\sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\beta\cdot\sin^2\alpha}$; 3) $-\frac{\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)}{\cos^2 x\cdot\cos^2 y}$; 4) $\frac{\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)}{\sin^2 x\cdot\cos^2 y}$.

1818. 1) $2\cos\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+30°\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}-30°\right)$; 3) $4\sin\left(15°+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(15°-\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $2\sin\left(15°-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(15°+\frac{\alpha}{2}\right)$.

1819. 1) $\frac{\sin(45°\pm\alpha)}{\cos 45°\cdot\cos\alpha}$; 2) $\frac{\sin(\alpha\pm 45°)}{\sin 45°\cdot\sin\alpha}$; 3) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$; 4) $-\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

1820. 1) $4\cos\left(15°+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(15°-\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)\times$ $\times\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 3) $2\sin(\alpha-30°)\cdot\cos(\alpha+30°)$; 4) $8\sin\left(15°+\frac{\alpha}{2}\right)\times$ $\times\sin\left(15°-\frac{\alpha}{2}\right)$. **1821.** 1) $\frac{2\sin(30°+\alpha)}{\sin\alpha}$; 2) $\frac{2\sin(\alpha-30°)}{\cos\alpha}$. 3) $\frac{4\sin(60°+\alpha)\cdot\sin(60°-\alpha)}{\cos\alpha}$; 4) $\frac{4\sin(\alpha+60°)\cdot\sin(\alpha-60°)}{\sin^2\alpha}$.

1822. 1) $2\sin(x+60°)$; 2) $2\sin(x-30°)$; 3) $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi)$, где $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; 4) $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\omega x+\varphi)$, где $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **1823.** 1) $5\sin(\alpha-36°52')$; 2) $5\cos 16°42'$; 3) $3\sin(\alpha+48°10')$; 4) $13\sin(3\alpha+22°37')$.

1824. 1) $2\sin(\alpha-30°)$; 2) $17\cos(16°56'-A)$; 3) $\left|\frac{b\cos\alpha}{\cos\varphi}\right|$, где $\varphi=$ $=\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}\alpha\right)$; 4) $\operatorname{tg}(\varphi-45°)$, где $\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{c}{b\sin\alpha}\right)$. **1825.** 1) $\operatorname{tg}(45°-\varphi)$, где $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$; 2) $2\sqrt{a}\cos\left(45°-\frac{\varphi}{2}\right)$, где $\varphi=\arccos\frac{b}{a}$.

1826. Решение. $2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=m$ и $2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\times$ $\times\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=n$, откуда $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{m}{n}$. Следовательно, $\sin(\alpha-\beta)=$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{2mn}{m^2+n^2};\quad \cos(\alpha-\beta)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}.$$

1827. 1) $4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; 2) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

1828. 1) $\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos(45°-\alpha)}{\cos\alpha}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}\sin^2\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin(\alpha-45°)}{\sin\alpha}$.

1829. 1) $4\cos\alpha\cdot\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(45°-\frac{5\alpha}{2}\right)$; 2) $4\cos\alpha\cdot\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)\times$ $\times\cos\left(45°-\frac{5\alpha}{2}\right)$. **1830.** 1) $\sin\frac{5\alpha}{2}\cdot\cos\frac{7\alpha}{2}$; 2) $\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha$.

1831. 1) $2\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $2\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$. **1832.** 1) $\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $-\operatorname{ctg}\alpha$. **1833.** 1) $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}$. **1834.** 5) Решение. Преобразуем разность: $\operatorname{tg}20^\circ-\sqrt{3}=\operatorname{tg}20^\circ-\operatorname{tg}60^\circ=\frac{-\sin40^\circ}{\cos20^\circ\cdot\cos60^\circ}=-\frac{4\sin20^\circ\cdot\cos20^\circ}{\cos20^\circ}=-4\sin20^\circ$, откуда получаем данное тождество. **1843.** *Указание.* Умножить члены дроби на $2\sin\alpha$. **1844.** Решение. Умножив члены дроби на $2\sin\alpha\;(\alpha\neq\pi k)$, получим:

$$\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\sin3\alpha+2\sin\alpha\cdot\sin5\alpha+\ldots+2\sin\alpha\cdot\sin(2n-1)\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos3\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos5\alpha+\ldots+2\sin\alpha\cdot\cos(2n-1)\alpha}=$$

$$=\frac{(1-\cos2\alpha)+(\cos2\alpha-\cos4\alpha)+(\cos4\alpha-\cos6\alpha)+\ldots\to}{\sin2\alpha+(\sin4\alpha-\sin2\alpha)+(\sin6\alpha-\sin4\alpha)+\ldots\to}$$

$$\frac{\to\ldots+[\cos(2n-2)\alpha-\cos2n\alpha]}{\to\ldots+[\sin2n\alpha-\sin(2n-2)\alpha]}=\frac{1-\cos2n\alpha}{\sin2n\alpha}=\frac{2\sin^2n\alpha}{2\sin n\alpha\cdot\cos n\alpha}=\operatorname{tg}n\alpha.$$

1847. Решение. Заметим, что $\alpha+\beta\neq2\pi k$, так как в противном случае $\frac{\alpha}{2}=\pi k-\frac{\beta}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\neq\frac{1}{3}$. Из данного соотношения имеем: $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. Разделив почленно на $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$, получим: $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, или $\cos\frac{\alpha}{2}\times\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}$, или $3\sin\frac{\alpha}{2}\times\sin\frac{\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$. Разделив обе части этого равенства на $3\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$ (что возможно, так как $\alpha\neq(2k+1)\pi$ и $\beta\neq(2k+1)\pi$), получим: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}$. **1848.** 3) *Указание.* В тождестве $\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B}=\operatorname{tg}(A+B)$ заменить $\operatorname{tg}(A+B)$ на $-\operatorname{tg}C$. 4) *Указание.* Умножить обе части тождества $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C$ на $\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$. **1849.** 45°. **1850.** Решение. Так как $\cos C=-\cos(A+B)$, то данное соотношение преобразуется так: $\sin^2A+\sin^2B+\cos(A-B)\cdot\cos(A+B)-\cos^2C=0{,}25$, или $1-\cos^2C=0{,}25$, или $\sin^2C=0{,}25$, откуда $\sin C=0{,}5$ ($\sin C>0$). Следовательно, $C=30^\circ$ или $C=150^\circ$. **1852.** Преобразуем данное соотношение: $\sin(A-B)=\sin(A+B)\sin(A-B)$, или $\sin(A-B)\,[1-\sin(A+B)]=0$, откуда $\sin(A-B)=0$, либо $\sin(A+B)=1$. Из этих равенств получаем: $A=B$ или $A+B=\frac{\pi}{2}$. Следовательно, треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный. **1853.** 1) $y_{\text{наиб}}=\sqrt{2}$ при $x=\frac{\pi}{4}$; 2) $y_{\text{наиб}}=\sqrt{2}$ при $x=\frac{3\pi}{4}$. **1854.** 1) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sqrt{a^2+b^2}$ и $-\sqrt{a^2+b^2}$; 4) 6 и 1. **1856.** $c\sqrt{2}$. **1857.** h^2. **1858.** Решение. Выразим площадь S сечения через x и y: $S=(2y)^2-4(y-x)^2=4(2xy-x^2)$. Если $\angle EOA=\alpha$, то $x=R\cdot\sin\alpha$, $y=R\cdot\cos\alpha$, $S=4R^2(\sin2\alpha-\sin^2\alpha)=2R^2(2\sin2\alpha+\cos2\alpha-1)$. Площадь сечения будет иметь наибольшее значение, если выражение $2\sin2\alpha+\cos2\alpha$ принимает наибольшее значение. Имеем: $z = 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \operatorname{tg}\varphi \cdot \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \frac{\cos(\varphi - 2\alpha)}{\cos\varphi}$, где $\varphi = \operatorname{arctg} 2$. Следовательно, $z_{\text{наиб}} = \frac{1}{\cos\varphi}$ и достигается при $\cos(\varphi - 2\alpha) = 1$, т. е. при $\alpha = \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 \approx 37^\circ 47'$. Отсюда $x \approx$ $\approx R\sin 37^\circ 47' \approx 0{,}527R$; $y \approx R\cos 37^\circ 47' \approx 0{,}85R$. $Z_{\text{наиб}} = \frac{1}{\cos\varphi} =$ $= \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \sqrt{5}$; $S_{\text{наиб}} = 2R^2(\sqrt{5} - 1) \approx 2{,}472R^2$. **1859.** 1) $\frac{2\pi k}{3} + \frac{\pi}{3}$ и $2\pi k$; 2) $\frac{\pi k}{3}$ и $\pi k + \frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi k}{2}$; 4) $\frac{\pi k}{8}$; 5) $\pi k + \frac{\pi}{3}$; 6) $\frac{\pi k}{4} + \frac{\pi}{8}$ и πk; 7) $\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{8}$; 8) $\frac{\pi k}{4}$.

1861. $y = 0{,}5\sin\left(100\pi + \frac{\pi}{3}\right)$. **1862.** 1) 4π; 2) колебания отличаются друг от друга амплитудами. **1863.** 1) 3; 2π и $\frac{1}{2\pi}$; 2) 3; π и $\frac{1}{\pi}$; 3) 3; $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{2}{\pi}$. **1865.** 1) 2; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$; 0; 2) 5; π; $\frac{1}{\pi}$; 0; 3) 1; 2; $\frac{1}{2}$; 0; 4) 2,1; 4π; $\frac{1}{4\pi}$; 0; 5) 3; 8; $\frac{1}{8}$; 1; 6) 0,1; 0,2; 5; $-\frac{\pi}{3}$; 7) 2; 4; $\frac{1}{4}$; 3; 8) 10; 20π; $\frac{1}{20\pi}$; $\frac{\pi}{6}$; 9) $\frac{1}{3}$; 1; 1; -6π; 10) 1; 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$. **1866.** 1) В начале движения находится в 3 *см* от точки B_1, через 1 *сек* — в 3 *см* от точки B, через 2 *сек* — совпадает с точкой B и через 3 *сек* — в 3 *см* от точки B; 2) через 5 *сек*. **1867.** 1) $y = 5\sin\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right)$; 2, а) 2,5 *см*; б) 7,5 *см*; в) ~1,5 *см*.

1869. 1) 2; $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}$; 2) Подвергнуть растяжению от оси абсцисс с коэффициентом 2, растяжению от оси ординат с коэффициентом $\frac{1}{3}$ и параллельному переносу в направлении оси абсцисс на величину $\frac{\pi}{2}$.

1873. 2, а) $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k$; б) $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi(2k + 1)$. **1874.** 1) 5 и $\sim 0{,}64$ *рад*; 2) 2 и $\frac{\pi}{3}$; 3) 1 и $-\frac{5\pi}{6}$; 4) $\sqrt{7}$ и $\sim -0{,}333$; 5) 127 и $\frac{\pi}{3}$. **1875.** 1) 0; 2) π; 3) $\frac{\pi}{3}$. **1876.** 1) $-\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{7\pi}{6}$. **1877.** $i = 7\sin(\omega t + 0{,}667)$; $i_{\max} = 7$. **1879.** $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$.

1880. $-\frac{44}{125}$. **1881.** $\cos(\alpha - \beta) < \cos\alpha + \sin\beta$. **1884.** 1) $\frac{\pi k}{2}$; $\frac{2\pi}{3}(3k \pm 1)$; 2) $\frac{\pi}{16}(4k - 1)$. **1885.** 1) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$; 2) $\sin\left(\frac{\beta}{2} + 30^\circ\right) \times$ $\times \sin\left(\frac{\beta}{2} - 30^\circ\right)$; 3) $4\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin 4\alpha$. **1887.** 1) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$; 2) 1. **1888.** $\frac{17\sqrt{2}}{26}$. **1890.** $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$. **1893.** $1\frac{1}{2}$. **1894.** 1) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$; 3) 2. **1896.** $\frac{2}{\sin\alpha}$. **1897.** $\frac{3}{4}$. **1898.** $\cos 7^\circ$. **1899.** 1) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$; 2) $\frac{2ab}{a^2 + b^2}$;

3) $\frac{a^2+b^2-2}{2}$. **1900.** 1) $2\cos^2\alpha$; 2) $2\operatorname{ctg}\alpha$; 3) $\frac{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$; 4) $\frac{4\sqrt{2}\sin(x+45^\circ)\cdot\sin(x+60^\circ)\cdot\sin(x-60^\circ)}{\cos^3 x}$; 5) $4\cos\frac{\alpha}{2}\times$ $\times\cos\left(\frac{\alpha}{4}+30^\circ\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{4}-30^\circ\right)$; 6) $2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}$; 7) $2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$; 8) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$; 9) $-4\sin\frac{A+B}{2}\times$ $\times\cos\left(A-\frac{B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A}{2}-B\right)$; 10) $\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$. **1901.** a^2+b^2+ $+c^2-2abc=1$. **1902.** 1) $a^2(b^2-c^2)^2+4a^2b^2=8abc$; 2) $\frac{ab}{c}=(a^2+b^2)-a^2$.

1903. Решение. Докажем, что $\operatorname{tg}^2 20^\circ$ является корнем данного уравнения. Для этого достаточно показать, что $(\operatorname{tg}^2 20^\circ)^3-33\cdot(\operatorname{tg}^2 20^\circ)^2+$ $+27\operatorname{tg}^2 20^\circ-3=0$. Имеем: $3=\operatorname{tg}^2(3\cdot 20^\circ)$; $3=\left(\frac{3\operatorname{tg}20^\circ-\operatorname{tg}^3 20^\circ}{1-3\operatorname{tg}^2 20^\circ}\right)^2$; $3=\frac{9\operatorname{tg}^2 20^\circ-6\operatorname{tg}^4 20^\circ+\operatorname{tg}^6 20^\circ}{1-6\operatorname{tg}^2 20^\circ+9\operatorname{tg}^4 20^\circ}$; $\operatorname{tg}^6 20^\circ-33\cdot\operatorname{tg}^4 20^\circ+27\cdot\operatorname{tg}^2 20^\circ-3=0$. Утверждение того факта, что $\operatorname{tg}^2 40^\circ$ и $\operatorname{tg}^2 80^\circ$ являются корнями данного уравнения, ведется аналогично, исходя из равенств: $3=\operatorname{tg}^2(3\cdot 40^\circ)$ и $3=\operatorname{tg}^2(3\cdot 80^\circ)$.

1904. $\sim 36^\circ 52'$; $\sim 53^\circ 08'$. **1905.** $r\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **1906.** 1) $y=4\sin\left(\frac{\pi}{18}\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)$; 2) 6 *см*. **1907.** $\frac{d}{2\cos\alpha}$; $\frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$. Равнобедренный прямоугольный треугольник. **1908.** $2\sqrt{2}\,d\cos\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)$; $\frac{1}{2}d^2\sin\varphi$. **1909.** $\frac{m^2\sin 2\alpha}{8\cos^2(45^\circ-\alpha)}$. **1910.** $2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$; $r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$. **1911.** $\frac{4r^2}{\sin\alpha}$; $\frac{8r}{\sin\alpha}$. **1912.** $2R^2\cos\alpha\cdot\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$. **1913.** $\frac{b}{\cos\alpha}\sqrt{-\cos 2}$, где $45^\circ<\alpha<90^\circ$. **1914.** $\frac{r\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}$; $\frac{r\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}$. **1915.** $\frac{p^2}{4}\cdot\sin\alpha$, квадрат.

1916. $\frac{a^2}{2\cos^2(45^\circ-\alpha)}$, $0^\circ\leqslant\alpha\leqslant 90^\circ$. Наибольшее значение, равное a^2, достигается при $\alpha=0^\circ$ и $\alpha=90^\circ$; наименьшее значение, равное $\frac{a^2}{2}$, — при $\alpha=45^\circ$. **1917.** $2\pi d\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$; $2\pi d\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

1918. $\frac{C^2}{\pi^2\cdot\sin\alpha}$; $\alpha=\arcsin\frac{\pi}{2}\approx 39^\circ 32'$. **1919.** $2\pi\sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}}$.

1920. $\frac{\pi R\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$; $\alpha=60^\circ$. **1921.** $\frac{4q}{\pi\sin\alpha}$, $0<\alpha<\pi$. Наименьшее значение, равное $\frac{4q}{\pi}$, достигается при $\alpha=\frac{\pi}{2}$. **1922.** $\pi d^2\cos^4\left(45^\circ-\frac{\varphi}{4}\right)$

и $\pi d^2 \sin^4\left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right)$; $0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 180^\circ$. При $\varphi = 0$ площади кругов равны и площадь каждого круга равна одной четвертой части круга, построенного на отрезке d как на диаметре. При $\varphi = 180^\circ$ один из кругов вырождается в точку. **1923.** $a\sqrt{\cos\alpha}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. **1924.** $d\sqrt{-\cos 2\alpha}$, $45^\circ < \alpha < 90^\circ$. **1925.** $\arcsin\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\alpha\right)$; $30^\circ < \alpha < 90^\circ$. **1926.** 1) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_2 a_1}$; 2) $a_1 = -\frac{1}{a_2}$.

1927. 1) $2\cos 10^\circ$; 3) $2\frac{3}{7}$; 4) $\frac{\pi}{8}(16k - 1)$. **1928.** 1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{1}{7}$; 4) πk. **1929.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{3}{4}$; 4) $\pm\frac{3}{4}$. **1930.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{2}{3}$; 4) $\pm\frac{2}{3}$. **1931.** 1) $\frac{1}{4}$; 3) $4\sin x \cdot \sin\frac{x + 30^\circ}{2} \cdot \cos\frac{x - 30^\circ}{2}$; 4) $2\pi k$. **1932.** 1) $\frac{3}{4}$; 3) $4\cos x \cdot \cos\frac{x + 60^\circ}{2}\cos\frac{x - 60^\circ}{2}$; 4) πk.

IX. Показательная и логарифмическая функции

1933. 1) $\frac{M_0\sqrt{2}}{4}$; $\frac{M_0}{8}$; 2) 7 суток. **1934.** 3) $\sim 3{,}3$ суток.

1935. 1) $\sim 8{,}66$ *кГ*; 15 *кГ*; $\sim 19{,}74$ *кГ*; $\sim 34{,}20$ *кГ*; 2) $\sim 51{,}96$ *кГ*; 10 *кГ*; 3) 1 раз; 2 раза; 5, а) $\sim 2{,}3$ *кГ*; $\sim 5{,}2$ *кГ*; $\sim 15{,}6$ *кГ*. б) $\sim 1{,}6$ вит., 1,9 вит.; 2 вит. **1936.** 3) $-\infty < x < +\infty$; 4) $0 < y < +\infty$; 5) справа, дальше от оси Y; 8) $\sim 0{,}1$; $\sim 0{,}4$; $\sim 0{,}7$; 1; 2; 4; $\sim 5{,}7$; 9) -3; -1; 0; 1; $\sim 1{,}3$. **1939.** 1) $-\infty < x < +\infty$; 2) $-\infty < x < +\infty$; 3) $\sim 0{,}1$; $\sim 0{,}7$; 4; 4) 4; 3; $\sim 2{,}6$; 6) $x > 2$; 7) $1 < x < 2$. **1940.** 4, а) Для отрицательных значений x график функции $y = 2^x$ лежит выше графика функции $y = 10^x$; для значений $x > 0$ наоборот. В точке (0; 1) графики пересекаются. **1941.** 1) 2; 2) 3; 3) $\frac{1}{8}$; 4) 4; 5) a. **1942.** Указание. 1) Графики функций $y = a^x$ и $y = a^{-x}$ симметричны относительно оси Y; 2) графики функций $y = a^x$ и $y = -a^x$ симметричны относительно оси X. **1943.** 1, а); б); д) $-\infty < x < +\infty$; в) $x \neq 0$; г) $0 \leqslant x < +\infty$; е) $x \neq 1{,}5$; 4, а) $m = 2$; б) $0 < m < 1$; в) $-1 < m < 0$; г) $m = -1$; д) $1 < m < 2$; е) $-4 < m < -3$; 5, а) $a < 1$; б) $a > 1$; в) $a < 1$; г) $a > 1$.

1947. 3) $0 < x < +\infty$; $-\infty < y < +\infty$; 7) $\sim -1{,}6$; 0; $\sim 0{,}6$; $\sim 1{,}6$; $\sim 2{,}3$; 8) $\sim 0{,}2$; 1; $\sim 2{,}8$; $\sim 5{,}7$. **1949.** 1) 0; 1; 2, а) при $0 < x < 1$, $y < 0$; при $x > 1$ $y > 0$; б) при $0 < x < 1$ $y > 0$; при $x > 1$ $y < 0$. **1950.** 1) Возрастающие б); в); д); е). **1953.** 1) $x > 0$; 2) $x < 0$; 3) $x > 1$; 4) $x > -1$; 5) $|x| > 1$; 6) любое действительное число; 7) любое действительное число, кроме 0; 8) $2\pi k < x < 2\pi k + \pi$; 9) $2\pi k - \frac{\pi}{2} < x < 2\pi k + \frac{\pi}{2}$; 10) $\pi k < x < \pi k + \frac{\pi}{2}$; 11) $x > 0$, $x \neq 1$; 12) любое действительное число, кроме 0; 13) $x > 0$; 14) $x > 1$; 15) $x < 1$. **1954.** 1, а) $m < n$; б) $m > n$; в) $m < n$; г) $m > n$; 2, а) $m > 1$; б) $m > 3$; в) $0 < m < 1$; г) $0 < m < 1$; 3, а) $0 < a < 1$; б) $a > 1$; в) $a > 1$; г) $0 < a < 1$.

1957. 1) $\frac{3}{8}$; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{1}{6}$; 4) $-\frac{5}{12}$; 5) 3,5; 6) $4\frac{2}{15}$; 7) $1\frac{7}{8}$; 8) k^2. **1958.** 1) $-\frac{1}{4}$; 2) 0; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) не существует. **1959.** 1) 8; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{1}{32}$;

4) 32; 5) $27\sqrt{3}$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{9}$; 7) a^a; 8) 1; 9) 10. **1961.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[N]{N}$; 3) 3; 4) 3; 5) $\frac{2}{3}$; 6) 4; 7) $2^{-\frac{2}{9}}$; 8) $2^{-\frac{1}{3}}$; 9) $2^{1\frac{2}{3}}$; 10) $\frac{1}{3}$. **1962.** 1) 1 и 2; 2) 3 и 4; 3) $\log_2 0{,}5 = -1$. **1963.** 1) $3^{\log_3 2}$; 2) $2^{\log_2 10}$; 3) $b^{\log_b a}$. **1964.** 4) 4; 5) 10; 6) 1000. **1965.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) 3; 4) $2^{-\frac{1}{2}}$. **1966.** 1) 15; 2) $\frac{2}{7}$; 3) 32; 4) 24; 5) 4,5; 6) 8. **1967.** 1) 4900; 2) $\frac{8}{27}$; 3) $2^2 \cdot 3^{-\frac{4}{3}}$; 4) 5; 5) 100; 6) 25. **1968.** 1) a^2b; 2) $\frac{a^3}{b^2}$; 3) $a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}$; 4) 64; 5) 75. **1969.** 1) 1; 2) $\sqrt{2}$; 3) $2^{\frac{1}{2}}5^{-\frac{3}{2}}$; 4) $4\frac{1}{36}$. **1970.** 1) $2^{-\frac{2}{3}}$; 2) 2; 3) 2,5; 4) $\frac{1}{27}$. **1971.** 1) $-2{,}5$; 2) $3^{-\frac{1}{2}}$; 3) $\frac{1}{80}$; 4) $-2{,}4$. **1972.** 1) 2; 2) 3; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{3}$. **1973.** 1) $\sqrt{2} - 1$; 2) $\sqrt{3} - 1$; 3) 2; 4) 2. **1974.** 1) 5; 2) 1; -11; 3) $1 + \sqrt{2}$; 4) -3. **1975.** 1) $a = b$; 2) $a = \frac{b+1}{2}$. **1976.** 1) 8; 2) $\frac{1}{9}$; 3) 27; 4) $\frac{1}{4}$; 8; 5) $\frac{1}{27}$; $\sqrt[3]{9}$. **1979.** 1) 4; 2) 12; 3) $-\frac{1}{12}$; 4) 2. **1980.** 1) 64; 2) 2; 3) 9; 4) a. **1981.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 5; 3) 2; 4) -2. **1982.** 1) $-b$; 2) $\sim -0{,}477$; 3) 0. **1983.** 1) $-b$; 2) 0; 3) $mn = 1$.

1986. 2) $\sim -0{,}6990$; $\sim -0{,}3980$; $\sim -0{,}3010$; $\sim -0{,}2219$; $\sim -0{,}0970$; $\sim -0{,}8239$; 3) $\sim -0{,}1761$; $\sim -0{,}2219$; $\sim -0{,}2040$; $\sim 0{,}2040$; $\sim 0{,}3801$. **1987.** 1) Увеличится в два раза; 2) уменьшится в два раза; 3) уменьшится на $\log_a 2$; 4) увеличится на 1. **1988.** Не изменится. **1995.** 2) $\frac{1}{2}\log 5 + \frac{1}{2}\log a + 1\frac{1}{2}\log b - \log 6$; 4) $\log 8 + \frac{1}{2}(\log 18 + 3\log n - \log 169 - \log\sin 2\alpha - \log\sin\alpha)$. **1966.** 1) $-\frac{5}{6}\log a + \frac{7}{12}\log b$; 4) $\frac{2}{3}\log 2 - \frac{4}{3}\log p - \frac{7}{6}\log q$. **1977.** 2) $-\log 3 - 2\frac{8}{9}\log m - \frac{8}{9}\log 2 - \frac{8}{9}\log n$; 4) $1\frac{1}{3}\log 3 - 4\frac{1}{2}\log a - 1\frac{1}{6}\log b + \frac{2}{3}\log \operatorname{tg}\alpha$. **1999.** 1) $16\log a$; 2) $\frac{1}{12}(22\log n - \log m)$; 3) $\frac{1}{24}(32\log 2 + 13\log 3)$; 4) $\frac{1}{24}(16\log 3 + 7\log 5)$. **2000.** 1) 2; 2) 1. **2001.** 3) $0{,}5a^{\frac{1}{2}}\log a$; 4) $\sqrt[0,5]{0{,}4} \cdot \log 0{,}6$. **2002.** 1) $\log 3 + \log\log a$; 2) $\frac{2}{3}\log 2 + \log\log 2$; 3) $\frac{1}{3}\log 3 + \log\log 2 - \log 2$; 4) $\frac{2}{3}\log 1{,}5 + \log\log 1{,}5$. **2003.** 1) $\frac{1}{2}\log a + \log\log a$; 2) $3\log m$; 3) $\log\log\log a - \log a$; 4) $2\log\log(a+b) - \log 3$. **2004.** 1) $\log 4 + \log\sin(60^\circ + \alpha) + \log\sin(60^\circ - \alpha)$; 2) $\log\cos 2\alpha$; 3) $\log 4 + 2\log\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

4) $\log \sin 2\alpha + \log \sin 2\beta$. **2006.** 5) $\sin 2\alpha$; 6) 1. **2007.** 4) $\dfrac{\sqrt[3]{a-b}}{\sqrt{a+b}}$;
5) $\cos^2 \alpha$. **2008.** 3) $a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{3}{4}}$; 4) $m^{\frac{3}{4}} n^{\frac{4}{5}}$. **2009.** 3) $\dfrac{\sqrt[3]{\left(\frac{m}{n}\right)^2}}{m-n}$;
4) $(m+n)\sqrt[4]{m^3n^3}$. **2010.** 1) $ab^2(a+b)^2\sqrt[3]{a}$; 3) $\dfrac{10\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a-b}}$; 4) $\dfrac{1}{100b^2\sqrt{a}}$.
2011. 1) $t^3\sqrt[3]{s} = 10$; 2) $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[3]{z}$; 3) $x^2 = \dfrac{1}{6-x^2}$; 4) $\dfrac{(a+b)^2}{1000\,(a-b)^3}$.
2012. 1) 1,2; 2) 10; 3) $2\sqrt{2}$; 4) 0,02. **2013.** 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{1}{2}$. **2014.** 1) $\dfrac{r\,(r+s)^k}{\sqrt[k]{r-s}}$;
2) $\dfrac{1}{a\,(a-b)^k \cdot \sqrt[k]{a+b}}$; 3) $a^2\sqrt{\dfrac{(a+b)\sqrt{a-b}}{ab}}$; 4) $\sqrt[4]{\left[\dfrac{a\sqrt[3]{(a+b)^2}}{(a-b)^3\sqrt{b}}\right]^3}$.
2015. 1) $\dfrac{S\,(a+b)\sqrt[3]{rs^2}}{r^3\,(a-b)}$; 2) $\dfrac{a^2b^3}{(a-b)\sqrt[3]{(a-b)^2}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{r-s}}{\sqrt[8]{r^3}}$;
4) $\sqrt[6]{\dfrac{(a+2b)^2}{a^4b}}$. **2016.** 0. **2017.** $1{,}5-\sqrt{3}$. **2018.** 1.

2020. lg 2 и lg 3. **2022.** 2) 90; 900; 9000. **2023.** 2) ~ 2,176; ~ 3,176; ~ 4,176; ~ 0,176; ~ $\overline{1}{,}176$; ~ $\overline{4}{,}176$. **2030.** 2) ~ −1,6508; 5) ~ −4,0161; 8) ~ −1,0001; 11) ~ −1,9693. **2031.** 2) ~ $\overline{2}{,}7561$; 6) ~ $\overline{1}{,}7636$; 9) ~ $\overline{3}{,}4299$; 12) ~ $\overline{1}{,}0001$. **2032.** 2) ~ $\overline{3}{,}9628$; 4) ~ $\overline{2}{,}6320$; 6) ~ 2,8264; 8) ~ 6,6989; 10) ~ $\overline{4}{,}7204$; 12) ~ 0,0002; 14) ~ 4,8042. **2033.** 2) ~ $\overline{1}{,}3484$; 4) ~ $\overline{1}{,}6251$; 6) ~ 0,2817; 8) ~ 1,5637; 10) ~ $\overline{1}{,}6611$. **2034.** 2) ~ 2,6571; 4) ~ $\overline{1}{,}7479$; 6) ~ $\overline{2}{,}7118$; 8) ~ 0,4855; 10) ~ $\overline{1}{,}3982$. **2035.** 2) ~ −0,6289; 4) ~ −1,8116; 6) 0,4775. **2037.** 2) ~ $\overline{1}{,}6990$; 4) ~ $\overline{1}{,}3010$; 6) ~ 2,3010; 8) ~ 0,3980. **2038.** 4 цифры; 31 цифра. **2039.** 1) ~ 629,5; 2) ~ 1,715; 3) ~ 0,1726; 4) ~ 2,115. **2040.** 1) ~ 1,801; 2) ~ 1101; 3) ~ 1193; 4) ~ 3,528. **2041.** 1) ~ −6,169; 2) ~ −0,9974; 3) ~ −0,1990; 4) ~ −36,44; 5) ~ −5914; 6) ~ −1,021. **2042.** 1) ~ 1,113; 2) ~ 1,339; 3) ~ 1,625; 4) ~ 0,5025. **2043.** 1) ~ 10,05; 2) ~ 118,3; 3) ~ 1,085; 4) ~ 0,3228. **2044.** 1) ~ 1,338; 2) ~ 11,15; 3) ~ 0,01312; 4) ~ 1,278. **2045.** 1) ~ 0,920; 2) ~ 2,966; 3) ~ 0,7404; 4) ~ 0,149. **2046.** 1, а) ~ 79,2; б) ~ 9,36; в) ~ 1,349; г) ~ 24,8. **2047.** 1, а) ~ 41,6; б) ~ 0,00519; в) ~ 2,58; г) ~ 1,133. **2048.** 1, а) ~ 1,54; б) ~ 0,0455; в) ~ 83,3; г) ~ 4,16; д) 0,324. **2049.** 1) ~ 0,292; 2) ~ 11,8; 3) ~ 15 250; 4) ~ 0,299. **2050.** 1) ~ 4,55; 2) ~ 26,6; 3) ~ 82; 4) ~ 10,7. **2051.** 1) ~ 0,032; 2) ~ 1,43; 3) ~ 21,9; 4) ~ 204. **2052.** 1) ~ 12,15; 2) ~ 7,79; 3) ~ 311; 4) ~ 8,1. **2053.** 1) ~ 0,879; 2) ~ 1,3; 3) ~ 3,37; 4) ~ 0,198. **2054.** 1) ~ 1,04; 2) ~ 2,3; 3) ~ 1,66; 4) ~ 0,554. **2055.** 1) ~ 0,255; 2) ~ 1,07; 3) ~ 4,57; 4) ~ 1,706. **2056.** 1) ~ 2,37 $м^2$; 2) ~ 9,86 $м^2$. **2057.** 1) ~ 3,97 *дм*; 2) ~ 3,77 $см^2$. **2058.** 1) ~ 7,21 *дм*; 2) ~ 0,029 $м^2$; 3) ~ 1,93 *дм*. **2059.** ~ 136 *кГ*. **2060.** ~ 8,09 *кГ*. **2061.** 1) ~ 1,46 $м^3$; ~ 65,2 $дм^3$; ~ 179,3 $дм^3$; 2) ~ 186 *м*. **2062.** ~ 15,2 *кал.* **2063.** 1) ~ 5190 *м*. **2072.** ~ 11,01. **2073.** ~ 0,043. **2074.** ~ 41 700. **2075.** ~ 440,2. **2076.** ~ 61,94. **2077.** ~ 49,25. **2078.** ~ 1,918. **2079.** ~ 3081. **2080.** ~ 224,8. **2081.** ~ 9,519. **2082.** ~ 32,67. **2083.** ~ 241,8. **2084.** ~ 29,82. **2085.** 1892. **2107.** 1) ~ 0,0311; 2) ~ 0,582; 3) ~ 0,180;

4) $\sim 0,0316$. **2108.** 1) $\sim 0,00759$; 2) $\sim 0,0813$; 3) $\sim 0,372$; 4) $\sim 0,00253$. **2109.** 1) $\sim 0,104$; 2) $\sim 57,3$; 3) ~ 826; 4) $\sim 1,63$. **2110.** 1) $\sim 2,10$; 2) $\sim 6,66$; 3) $\sim 37,3$; 4) $\sim 0,298$. **2111.** 1) $\sim 0,1199$; 2) ~ 2500; 3) $\sim 22,3$; 4) $\sim 0,0618$. **2112.** 1) 1,88; 2) $\sim 0,494$; 3) $\sim 0,728$; 4) $\sim 0,256$. **2113.** 1) $\sim 0,326$; 2) $\sim 0,941$; 3) $\sim 5,25$; 4) $\sim 4,10$. **2114.** 1) $\sim 27,2$; 2) $\sim 5,58$; 3) $\sim 0,00215$; 4) ~ 396. **2115.** 1) $\sim 1,49$; 2) $\sim 0,342$; 3) $\sim 0,95$; 4) $\sim 2,54$. **2116.** 1) $\sim 10,11$; 2) $\sim 1,227$; 3) $\sim 3,05$; 4) $\sim 28,4$. **2117.** 1) $\sim 1,895$; 2) $\sim 103,1$; 3) $\sim 10,29$; 4) $\sim 2,92$. **2118.** 1) $\sim 8,91$; 2) $\sim 1,331$; 3) ~ 280; 4) $\sim 20,5$. **2119.** $\sim 2,85$. **2120.** $\sim 0,1105$. **2121.** $\sim 0,047$. **2122.** ~ 68 *см*. **2123.** $\sim 0,0997$ *дм*. **2124.** 1) $\sim 7^\circ 45'$; $\sim 20^\circ 19'$; $\sim 13^\circ$; $\sim 17^\circ 33'$; 2) $\sim 6^\circ 35'$; $\sim 9^\circ 34'$; $\sim 15^\circ 10'$; $\sim 12^\circ 29'$. **2125.** 1) $\sim 12^\circ 30'$; 2) $\sim 2^\circ 20'$; 3) $\sim 15^\circ 41'$; 4) $\sim 17^\circ 02'$; 5) $\sim 1^\circ 47'$; 6) $\sim 17^\circ 20'$. **2126.** 1) $\sim 21,4$; $\sim 49,8$; 2) $\sim 1,69$; ~ 3.58; 3) $\sim 0,148$; $\sim 0,36$. **2127.** 1) $\sim 10^\circ 20'$; 2) $\sim 12^\circ$. **2128.** 1) $\sim 18^\circ 40'$; 2) $\sim 3^\circ 29'$; 3) $\sim 4^\circ$.

2129. 1) 10; 2) -4; 3) 3; 4) -3; 5) 1,5; 6) 4. **2130.** 1) -1; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) -15; 5) -3; 6) $6\frac{3}{7}$. **2131.** 1) 4; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) -2; 4) $-\frac{2}{3}$; 5) ± 1; 6) $\pm\frac{1}{3}\sqrt{30}$. **2132.** 1) -1; 7; 2) $3+2\sqrt{2}$; 3) 3; 4) -2; 4. **2133.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\pm 0,3$; 3) $-\frac{1}{2}$; 3; 4) -2; 3. **2134.** 1) 3; 2) 5; 3) 0; 20; 4) -3. **2135.** 1) 6; 2) 6; 10; 3) -2; 4) $-0,5$. **2136.** 1) ± 2; 2) решений нет; 3) -3; 4) $\frac{1}{2}$. **2137.** 1) $2\pi k$; 2) $\frac{\pi}{2}k+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{12}$; 3) $\pi k\pm\frac{\pi}{3}$; 4) решений нет. **2138.** 1) $2\pi k+\frac{\pi}{2}$; 2) $2\pi k\pm\frac{\pi}{3}$; 3) $\pi k\pm\frac{\pi}{3}$; 4) $\pi k+\frac{\pi}{4}$; 5) $2\pi k$; 6) $2\pi k\pm\frac{\pi}{3}$. **2139.** 1) $\sim 1,75$; 2) $\sim -0,692$; 3) $\cos x = \sim 0,7741$; 4) $\operatorname{tg} x = \sim -1,431$; 5) $\sim 0,5446$; 6) 5. **2140.** 1) 2; 2) 3; 3) 5; 4) 2. **2141.** 1) 0; 2) 1,5; 3) 2; 4) 9. **2142.** 1) 2; 2) -3; 3) $\sim 0,8509$; 4) $\log_5(2+\sqrt{5})$. **2143.** 1) $\log_5 2-1$; -2; 2) 0; $\frac{1}{9}$; 3) 1; 2; 4) 4. **2144.** 1) 2; 2) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 3) 9; $(3-2\log_2 3)^2$; 4) 0; ± 1. **2145.** 1) $\sim -0,32$; 2) $\sim 0,38$; 3) $\sim -0,77$; 2; 4; 4) $\sim 0,1$; 3; 5) 1; 6) $\sim 0,9$; $\sim -2,9$. **2146.** 1) $x\neq 0$; 2) $-2<x<3$; 3) $x\neq 1,5$; 4) $x>2\frac{2}{3}$; 5) $0<x<1$; 6) $x<3$; $x>4$. **2147.** 1) 60; 2) 3; 3) 4; 4) 8. **2148.** 1) $3\frac{2}{3}$; 2) 5; 3) 10; 100; 4) $10^{-\frac{5}{2}}$; 1000. **2149.** 1) 19; 2) 9; 3) 3; 4; 4) 0; 3. **2150.** 1) 2; 8; 2) 30; $3\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 2; 4. **2151.** 1) 10^{10}; 2) ± 9; 3) $7\frac{1}{9}$; 16; 4) 2^9. **2152.** 1) 0,1; 1000; 2) 100; 3) 10; $10^{-\frac{1}{2}}$; 4) 1; 100. **2153.** 1) 1; 10 000; 2) 0,001; 10; 3) 100; $10^{-\frac{4}{3}}$; 4) 10; $\frac{1}{10}$. **2154.** 1) 100; 2) 1; 5. **2155.** 1) 1; 2) 4. **2156.** 1) $1<x<1,2$; 2) $-2<x<1$; 3) $1<x<3$; 4) $2<x<3$; 5) $\frac{2}{3}<x<1$; $x>1$; 6) $0<x<1$. **2157.** 1) 64; 2) 27; 3) 2; 4) $\frac{1}{4}$; 4;

5) 4; $2^{-\frac{1}{3}}$; 6) $2^{\sqrt{2}}$; $2^{-\sqrt{2}}$. **2158.** 1) (12; 5); 2) (2; 2); 3) (10^6; 0,1); 4) (1000; 10). **2159.** 1) (10; 1000); (1000; 10); 3) $\left(\frac{4}{3};\ \pm\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$; 4) (4; 2); (9; —3). **2160.** 1) (13; 11); 2) (7; 3); 3) (11; 15); 4) (113,5; 111,5). **2161.** 1) (2; 6); 2) $\left(a\sqrt{a};\ \frac{\sqrt{a}}{a}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{a}}{a};\ a\sqrt{a}\right)$; 3) (3; 3); $(\sqrt{3};\ 9)$; 4) $(2;\ \sqrt{2})$; $(\sqrt{2};\ 2)$. **2162.** $T=\dfrac{t\cdot\lg 2}{\lg\dfrac{M_0}{M}}=3$ (*мин*). Решение.

$$M=M_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}};\qquad \frac{M}{M_0}=2^{-\frac{t}{T}};\qquad \lg M-\lg M_0=-\frac{t}{T}\lg 2;$$

$$T=\frac{t\lg 2}{\lg M_0-\lg M}=\frac{t\cdot\lg 2}{\lg\dfrac{M_0}{M}};\qquad T=\frac{6\cdot\lg 2}{\lg 4}=\frac{6\cdot\lg 2}{2\cdot\lg 2}=3\ (\textit{мин})$$

2163. $t=\dfrac{T\cdot\lg\dfrac{M_0}{M}}{\lg 2}=40$ (*мин*). **2164.** $M_0=M\cdot 2^{\frac{t}{T}}=24$ *г*.

2165. $t=\dfrac{T_1\cdot T_2\cdot\lg\dfrac{M_2}{M_1}}{\lg 2\,(T_1-T_2)}=21$ (*год*). **2166.** $T_2=\dfrac{t\cdot T_1\cdot\lg 2}{T_1\cdot\lg\dfrac{M_2}{M_1}+t\lg 2}=2\frac{1}{2}$ (года).

2167. 30 суток. **2168.** 6 лет и 12 лет.

2169. а) $4^{-0,6}>0,25^{1,2}$ на ~0,25; б) ~7; ~ —0,7. **2171.** $\frac{3}{4}$. **2172.** 1) 2; $\frac{1}{2}$; 2) 25; 1; 3) 6; 4; 4) 10; 2. **2173.** 1) $2\pi k\pm\frac{\pi}{3}$; 2) $\pi k+\frac{\pi}{4}$; 3) 2; 4) 3. **2174.** 1) 2; 1; 2) 2; 3) 1; 4) 6. **2175.** 1) $\dfrac{\log_2(\sqrt{5}-1)-1}{1-\log_2 3}$. Указание. Разделить уравнение почленно на 6^x и воспользоваться подстановкой: $\left(\frac{2}{3}\right)^x=z$; 2) $\log_2 3-1$; 3) ±2. Указание. Приняв во внимание, что $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, положить $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=z$; 4) ±2. **2176.** 1) (4; 1); 2) $\left(a^3;\ \frac{1}{a}\right)$; $\left(\frac{1}{a};\ a^3\right)$. **2181.** 1) Равенство невозможно. Действительно, если $\sin x<0$, то $\lg\sin x$ не имеет смысла. Если же $0<\sin x\leqslant 1$, то $\lg\sin x\leqslant 0$; 2) возможно. **2182.** 1) $2\pi k<x<2\pi k+\pi$; 2) $2\pi k$. **2183.** 1) Возрастает от $-\infty$ до 0; 2) убывает от 0 до $-\infty$. **2184.** 1) 0; 2); 0; 3) 0. **2185.** $x<-3$ и $x>1,5$. **2187.** 1, а) $x<\frac{2}{3}$ и $x>1$; б) $\frac{2}{3}<x<\frac{3}{4}$; в) $\frac{3}{4}<x<1$; 2, а) $x<-1$ и $x>3$; б) $-1<x<1-\sqrt{3}$ и $1+\sqrt{3}<x<3$; в) $1-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{3}$. **2189.** 1) 8; 2) $2\sqrt{2}$; 3) —4. **2190.** 1) $\frac{\pi}{2}k+\frac{\pi}{4}$; 2) $\pi k+\frac{\pi}{6}$. **2193.** 3. **2194.** 1) $2\frac{1}{3}<x<3$; 2) $1,5<x<1,75$; 3) $2<x<5$. **2195.** 1) 27; 2) 25. **2196.** $\frac{a+b}{1-a}$. **2197.** 1) 4; 2) 6. **2199.** 1. **2200.** ~0,3010; ~0,6990.

2201. $2+n-4m$. 2202. 1. 2203. 1) $\sim 51{,}5$; 2) ~ 275; 3) $\sim 9{,}32$; 4) ~ 2670. 2204. 1) $\sim 1{,}056$; 2) $\sim 4{,}946$; 3) $\sim 23{,}28$; 4) $\sim 8{,}245$. 2205. 1) 2; 2) 2; 3; 3) 9; $7\frac{1}{2}$; 4) 100; 10^{-8}. 2206. 1) 16; 2) a; 3) $3^{\sqrt{2}}$; $3^{-\sqrt{2}}$; 4) 27; $\frac{1}{9}$. 2207. $\sim 1{,}6$. 2209. $x<-3$ и $x>-2$. 2210. 1) $x>10$, $x\neq 100$; 2) $0<x<0{,}001$ и $1<x<100$; 3) $0<x<1$ и $x>10$. 2212. 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$. 2213. 1) (1; 8); (8; 1); 2) (1; 1). 2214. 1) 10; 2) 100; 3) любое действительное число. 2215. 2; 10; 50. 2216. 100 и 10 000; 2 и 4. 2217. 1) $x<-3$; $x>\frac{1}{2}$; 2) $-4<x<-1\frac{2}{3}$; 3) $2\frac{1}{4}<x<3$; 4, а) $\frac{1}{64}$; б) 4; 5) 9.

2218. 1) $x\leqslant-\frac{1}{2}$; $x\geqslant 3$; 2) $x<-4$; $x>3$; 3) $1{,}2<x<2$; $x\neq 1{,}6$; 4, а) -6; б) 1; 5) 4. 2219. 1) ~ 225 *см*²; 2) $\sim 1{,}926$; 3, а) 2; б) 2; $1\frac{1}{4}$.

2220. 1) $\sim 3{,}98$ *дм*²; 2) $\sim 0{,}0054$; 3, а) -2; 3; б) 10; $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

2221. 1, а) $\frac{3}{4}\sqrt{6}$; б) -1; $\sim 1{,}7$; 3) $|x|<3$; 4) $\frac{1}{2}$. 2222. 1, а) -2; б) $2\sqrt{2}$; 3) $|x|<2$; 4) 2; $\sim -1{,}7$. 2223. 1, а) $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$; б) 4; в) $\frac{1}{2}$; 2) 64; 3) $\frac{2p+1}{6}$; 4) $\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt[3]{b^2}\cdot\lg^2 c}$; 5) $2\lg 2+\lg\sin\frac{30^\circ+\alpha}{2}+\lg\cos\frac{30^\circ-\alpha}{2}$.

2224. 1, а) $\sqrt{3}$; б) 3; в) $\frac{2}{3}$; 2) 9; 3) $\frac{1}{5}\lg 5-\frac{23}{15}\lg a+\frac{1}{10}\lg(a+b)$; 4) $\frac{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}\cdot(a-b)}$; 5) $2\lg 2+\lg\sin\frac{30^\circ+\alpha}{2}+\lg\sin\frac{\alpha-30^\circ}{2}$.

2225. 1) $\sim 21{,}54$; 2) $\sim 3{,}02$ *см*; 3) ~ 1746. 2226. 1) $\sim 73{,}02$; 2) $\sim 4{,}32$ *см*; $\sim 12{,}96$ *см*; 3) ~ 4379. 2227. 1, а) -2; б) 3; в) 2; 2) 3; 7; 3) $1\frac{2}{7}<x<3{,}5$. 2228. 1, а) $-0{,}5$; б) 2; в) 2; 2) 3; 7; 3) $\frac{5}{7}<x<1{,}5$.

X. Функции и пределы

2229. 1) Понятия множества и соответствия. 2230. $f_1(3)=f_2(-1)$. 2231. 1) $f_1(0{,}5)=f_2(0{,}5)$; $f(-2)=f_2(-2)$; $f_1(1)=f_2(1)$; 2) $f_1(0)\neq f_2(0)$. 2232. 1) $\varphi(5)=0$; 2, а) $\varphi(x)=\varphi(-x)$; б) $\varphi(x)=-\varphi(-x)$. 2233. 41; 43; 47; 47; 151; 83; 1681; $2x+h+1$. 2234. 1) 0; 3; $\sqrt{2x+1}$; $\sqrt{2x^2-1}$; $\frac{1}{2}\lg(2x-1)$; $\sqrt{2\lg x-1}$. 2) 1. 2235. 0; -1; 3; 1; $\frac{x-2}{x}$; $\frac{2x-1}{2x+1}$; $\frac{x^2-1}{x^2+1}$; $\frac{4x}{1-x^2}$; $\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$; 3; $\frac{2h}{(x_0+h+1)(x_0+1)}$. 2236. 1; 2; 4; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{32}$; 2^x; $2^{2(x-1)}$; 8. 2237. 1; 3; $1+2\lg x$; $1+4\lg|x|$. 2244. 1) $\log_a x$, $a>0$; 2) a^x, $a>0$. 2246. 1; 0; 0; 1; 1; 0; 0; 0; -4. 2247. 1) 2; 3; 5; 0; 3; -2; -2; 0; -1; 5. 2) l — любое целое число. Решение. Так как $[x]\leqslant x<[x]+1$, то $[x+l]\leqslant x+l<[x+l]+1$. По условию $[x+l]=[x]+[l]$, поэтому $[x]+[l]\leqslant x+l<[x]+[l]+1$. Это неравенство будет выполняться при любых значениях x, если l — целое число.

2249. 1) Множество всех действительных чисел; 2) $x>0$. 2250. 1) Множество всех действительных чисел; 2) $x\neq 0$; 3) $x\geqslant 0$, если q — четное число (p — нечетное), x — любое действительное число, если q — число нечетное. **2251.** 1) В примерах а), е) и ж) множество всех действительных чисел; б) $x \neq \lg 2$; в) $x \neq \pm 1$; г) $x \geqslant -2$; д) $|x| \leqslant 3$; з) $x > 10$; и) $|x| > 1$; 2, а) 0; б) $\frac{\lg 4}{\lg 2} \approx 2{,}0003$; в) $-\frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}155$; г) 1,5; д) $\frac{1}{2}$; е) 3; ж) 3; з) —1; и) 0. **2256.** 1) 1; $2(2-\sqrt{3})$; $2+\sqrt{2}$; $\sim -2{,}165$; 2) $x = 2\pi - \frac{\pi}{2}$. **2257.** 1) $x \neq 0$; 2) $x = 0$; 3) $x \leqslant 2$; 4) $x > 1$; 5) $x \geqslant -1$; 6) $|x| > 1$; 7) $-2 \leqslant x \leqslant 3$; 8) $x \neq -3$ и $x \neq 2$; 9) $x > 0$ и $-2 < x < 0$. **2258.** 1) Множество всех действительных чисел; 2) $|x| \leqslant 1$; 3) $x \neq \pi k - \frac{\pi}{4}$; 4) $x \neq \pi k + \frac{\pi}{3}$; 5) $x = \pi k - \frac{\pi}{4}$; 6) $x \neq 2\pi k$; 7) $|x| \leqslant \frac{1}{3}$; 8) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 9) множество всех действительных чисел. **2260.** 1) Сужается на множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x \leqslant -2$; 3) не изменяется; 5) расширяется на множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x < 2$.

2261. 1) Да; 2) нет. **2262.** Да. **2265.** Промежутки возрастания: 1) $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi k\right]$; $\left[\frac{\pi}{4} + \pi k\right]$; 2) $\left(-\frac{3\pi}{2} + 3\pi k\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2} + 3\pi k\right)$; 3) $\left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$; $\left[\frac{13\pi}{6} + 2\pi k\right]$; 4) $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$; $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$. **2266.** Возрастает в примере 1); убывает в примерах 2) и 3). **2268.** Возрастает от величины $\cos 1 \approx 0{,}5403$ до 1. **2269.** 1) Возрастает; 2) убывает; 3) возрастает; 4) убывает. **2270.** 1) Возрастает от $-\infty$ до 0; 2) убывает от 0 до $-\infty$. **2272.** 1) π и 0; 2) 2 и $\frac{1}{2}$. **2273.** 1) Наибольшее значение, равное $\sin 1 \approx 0{,}8415$, достигается при $x = 0$ и $x = 2\pi$; наименьшее значение, равное $\sin(-1) \approx -0{,}8415$, — при $x = \pi$. 2,а) Наибольшее значение, равное $1 - \cos 1 \approx 0{,}4597$, достигается при $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$; наименьшее значение, равное 0, — при $x = 0$, $x = \pi$ и $x = 2\pi$. б). Наибольшее значение, равное $\operatorname{tg} 1 \approx 1{,}5574$, достигается при $x = \frac{\pi}{2}$; наименьшее значение, равное $\operatorname{tg}(-1) \approx -1{,}5574$, — при $x = \frac{3\pi}{2}$. **2274.** Ограниченные в примерах 2), 5) и 6). **2275.** 1) [1; 2]; 2) [0; 1]; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4) $\left[\frac{1}{3};\ 1\right]$. Решение. Обозначим $y = \frac{1}{2 - \cos 3x}$. Тогда $\cos 3x = \frac{2y-1}{y}$. Так как $-1 \leqslant \cos 3x \leqslant 1$, то $-1 \leqslant \frac{2y-1}{y} \leqslant 1$, откуда, заметив, что $y > 0$, получаем: $-y \leqslant 2y - 1 \leqslant y$, $1 - y \leqslant 2y \leqslant y - 1$, $y \geqslant \frac{1}{3}$ и $y < 1$. Итак, $y_{\text{наиб}} = 1$, $y_{\text{наим}} = \frac{1}{3}$. 5) $\left(-\infty;\ 2\frac{1}{2}\right)$; 6) $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$. Решение. Пусть $y = \frac{x}{1 + x^2}$. Тогда $yx^2 - x + y = 0$, откуда $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}$. Область изменения функции y определяется соотношением $1 - 4y^2 \geqslant 0$, откуда $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$.

2278. 1) Четная; 2) нечетная. **2283.** Четные в примерах 2), 3), 5), 7), 8), 11) и 12); нечетные в примерах 4), 6) и 10). **2284.** Решение. Построим функции: $\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ и $\psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. Функция $\varphi(x)$ четная, а функция $\psi(x)$ нечетная. В самом деле, $\varphi(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \varphi(x)$, $\psi(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -\psi(x)$. Складывая функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, получим: $\varphi(x) + \psi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$. **2285.** 1) По условию $f(x_2) > f(x_1)$, если $x_2 > x_1 > 0$. Так как $f(x)$ — четная функция, то $f(x_2) = f(-x_2)$ и $f(x_1) = f(-x_1)$. Поэтому для $-x_2 > -x_1 > 0$ имеем: $f(-x_2) > f(-x_1)$, т. е. в интервале $(-\infty, 0)$ функция $f(x)$ убывает. 2) По условию из неравенства $0 < x_1 < x_2$ следует неравенство $\psi(x_1) < \psi(x_2)$. Так как $\psi(x)$ — нечетная функция, то $\psi(x_1) = -\psi(-x)$ и $\psi(-x_2) = -\psi(x_1)$. Поэтому для $-x_2 < -x_1 < 0$ имеем: $-\psi(-x_1) < -\psi(-x_2)$, откуда $\psi(-x_1) > \psi(-x_2)$, т. е. в интервале $(-\infty; 0)$ функция $\psi(x)$ возрастает.

2286. Нельзя, так как, например, $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$ уже не равен $\sin\frac{\pi}{6}$; 2) нельзя. **2287.** 1) Периодом $\sin x$ и $\cos x$ является число 2π; периодом $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — число π. Периодичность тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ можно записать соответственно равенствами: $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$; $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$; $\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg} x$, где $k = 0$; ± 1; ± 2; .... 2,а) Решение. Пусть l — период функции $\sin nx$. Тогда $\sin n(x + l) = \sin nx$, или $\sin n(x + l) - \sin nx = 0$, или $2\sin\frac{nl}{2}\cos\left(nx + \frac{l}{2}\right) = 0$. При произвольном значении x это равенство возможно только в том случае, когда $\sin\frac{nl}{2} = 0$, откуда $\frac{nl}{2} = \pi k$, $l = \frac{2\pi k}{n}$. Наименьшее положительное значение l получим при $k = 1$; $l = \frac{2\pi}{n}$. Если l — период функции $\cos nx$, то $\cos n(x + l) = \cos nx$; $\cos n(x + l) - \cos nx = 0$; $2\sin\frac{nl}{2}\cdot\sin\left(nx + \frac{nl}{2}\right) = 0$. Это возможно только при $\sin\frac{nl}{2} = 0$, откуда $\frac{nl}{2} = \pi k$, $l = \frac{2\pi k}{n}$, и при $k = 1$ находим наименьший положительный период функции $\cos nx$: $l = \frac{2\pi}{n}$. б) Если l — период функции $\operatorname{tg} nx$, то $\operatorname{tg} n(x + l) = \operatorname{tg} nx$, или $\operatorname{tg} n(x + l) - \operatorname{tg} nx = 0$, отсюда $\sin nl = 0$, $l = \frac{\pi k}{n}$. Наименьший положительный период получаем при $k = 1$, $l = \frac{\pi}{n}$. **2288.** 1) Периодическая с периодом 2π; 2) непериодическая; 3) периодическая с периодом π; 4) периодическая с периодом 2π; 5) периодическая с периодом 2π; 6) периодическая с периодом π; 7) непериодическая; 8) непериодическая; 9) периодическая с периодом 2π; 10) периодическая с периодом 2π. **2289.** 1) 2π; 2) 2π; 3) $2\pi n$; 4) 2. **2290.** 1) 6π; 2) 2π; 3) π; 4) π. **2291.** 1) Решение. Пусть l — период функции $x - [x]$. Тогда $(x + l) - [x + l] = x - [x]$, или $(x + l) - [x + l] - x + [x] = 0$, или $l = [x + l] - [x]$. Это равенство будет выполняться при произвольном значении x, если l — целое число. Следовательно, наименьший положительный период функции равен 1. 2) График функции дан на рисунке 97. **2292.** 1) Для всякого значения x найдется целое (положительное, отрицательное или нуль) число n, удовлетворяющее неравенствам $2n - 1 < x < 2n + 1$.

Возьмем значение $x_1 = x + 2$. Очевидно, что $2n+1 < x_1 < 2n+3$, или $2(n+1)-1 < x_1 < 2(n+1)-1$. Найдем значение $y(x_1) = [x_1 - 2(n+1)]^2 = [(x+2) - 2(n+1)]^2 = (x-2n)^2 = y(x)$. Следовательно, периодом функции является число 2. График функции представлен на рисунке 98.

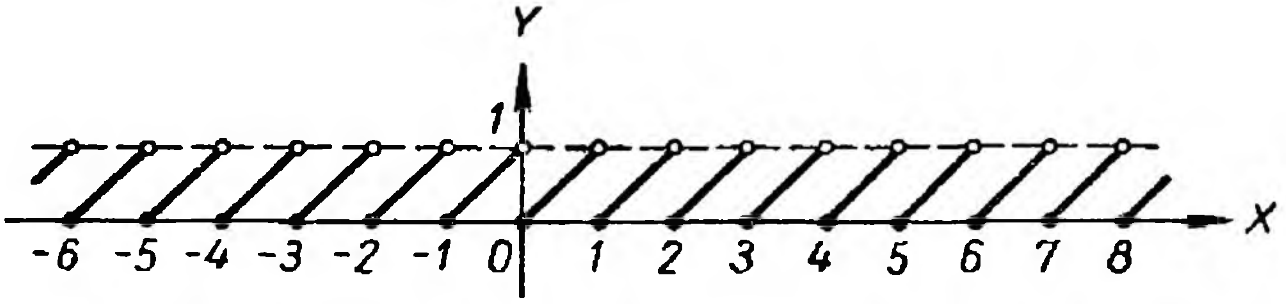


Рис. 97

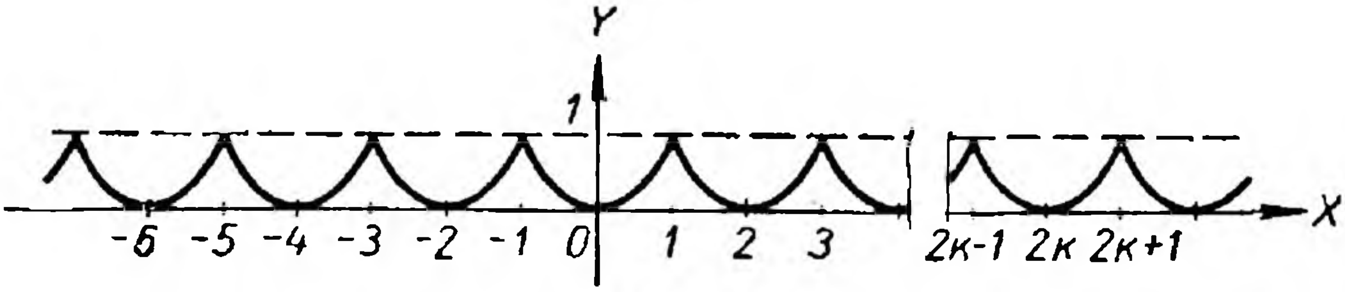


Рис. 98

2) **Решение.** Пусть $l > 0$ — период функции y. Тогда при любом значении x должно выполняться равенство $y(x+l) = y(x)$ ... (*). Если $x > 0$, то соотношение (*) примет вид: $(-1)^{[x+l]}\cdot\frac{x+l}{|x+l|} = (-1)^{[x]}\cdot\frac{x}{|x|}$, или $(-1)^{[x+l]} = (-1)^{[x]}$, откуда заключаем, что l — четное число. При $-l < x < 0$ имеем: $(-1)^{[x+l]}\cdot\frac{x+l}{|x+l|} = -(-1)^{[x]}\cdot\frac{x}{|x|}$, или $(-1)^{[x+l]} = (-1)^{[x]}$. При $x < -l$ снова получаем: $-(-1)^{[x+l]}\cdot\frac{x+l}{|x+l|} = -(-1)^{[x]}\cdot\frac{x}{|x|}$, $(-1)^{[x+l]} = (-1)^{[x]}$. Если же $x = -l$ или $x = 0$, то $(-1)^{[-l]} = 1$ и $(-1)^{[l]} = 1$. Оба эти равенства также выполняются при любом четном l. Следовательно, наименьший положительный период функции равен 2. График функции дан на рисунке 99.

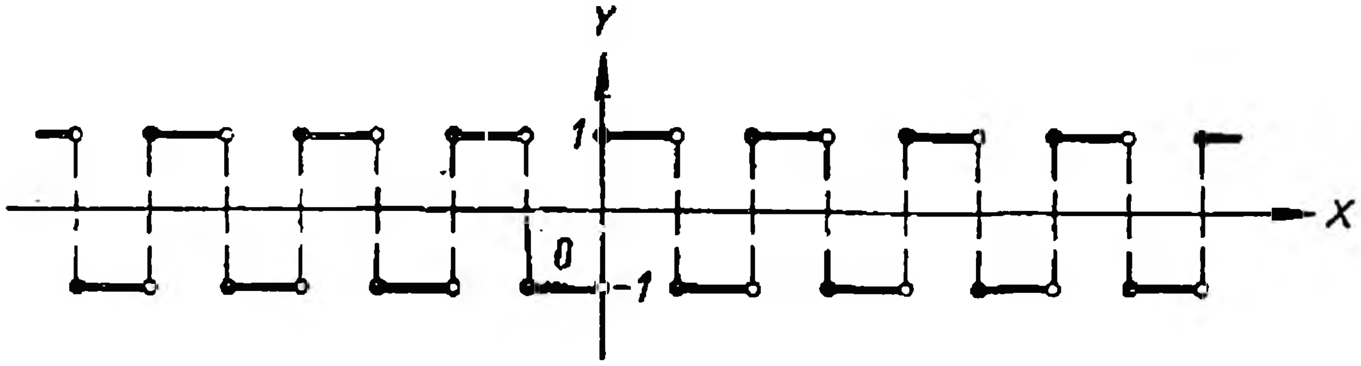


Рис. 99

2293. 1) $\frac{x-3}{2}$; 2) $1-x$; 3) $\frac{1}{x}$; 4) $\frac{x}{x-1}$; 5) x^3; 6) x^3-1; 7) $\lg(x-0{,}1)$; 8) $-\sqrt{x}$; 9) 10^{2-x}; 10) 5^x+5. **2296.** 1) $\frac{1}{x}$; 2) график такой функции симметричен относительно прямой $y = x$.

2298. 1, а) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$; б) $y=-x$; в) $y=-\sqrt{3}\cdot x$; 2, а) $y=5$; б) $x=-2$; 3) $y=x$. **2299.** 1) $y=3x+11$; 2) $y=-10x-2$; 3) $y=-0{,}6x+0{,}2$. **2303.** 1) $y=\frac{6}{5}x+3$; 2) $y=\frac{5}{6}x-2{,}5$.

2324. Решение. Пусть $OA=1$ и x — радианная мера дуги AM (рис. 100). Тогда $PM=\sin x$ и $AT=\operatorname{tg} x$. При $0<x<\frac{\pi}{2}$ MP — длина половины хорды единичной окружности — меньше половины стягиваемой ею дуги. Поэтому при $0<x<\frac{\pi}{2}$ имеем: $0<\sin x<x$. Для доказательства неравенства $x<\operatorname{tg} x$ сравним площади треугольника AOT и сектора AOM. Имеем: пл. $\triangle AOT=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot AT=\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, пл. сект. $AOM=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot AM=\frac{1}{2}x$. Так как треугольник AOT содержит в себе сектор AOM, то пл. сект. $AOM<$ пл. $\triangle AOT$, или $\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, откуда $x<\operatorname{tg} x$.

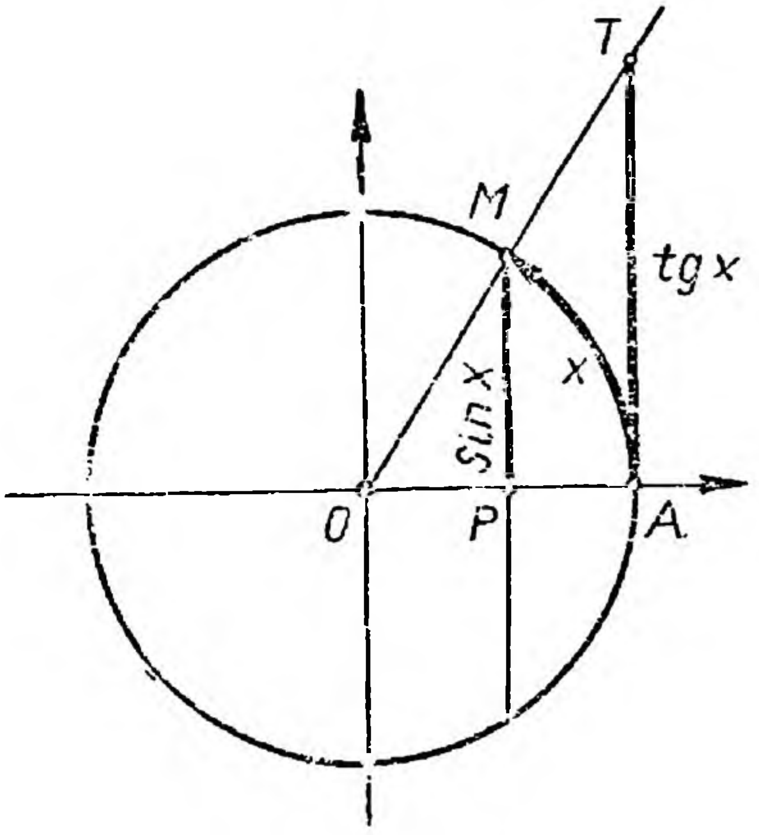


Рис. 100

2327. $\operatorname{tg}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$ не существует.

2329. 1) Функция $y=\cos(\arccos x)$ определена на замкнутом интервале $[-1;\,1]$, тогда как функция $y=x$ имеет смысл при всех действительных значениях x. **2330.** 1) Положив $\alpha=\arcsin x$ в формуле $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ и замечая, что $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, получим: $\cos(\arccos x)=\sqrt{1-[\sin(\arcsin x)]^2}=\sqrt{1-x^2}$; 2) $\operatorname{tg}(\arccos x)=$

$$=\frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

2331. Геометрическое истолкование дано на рисунке 101.

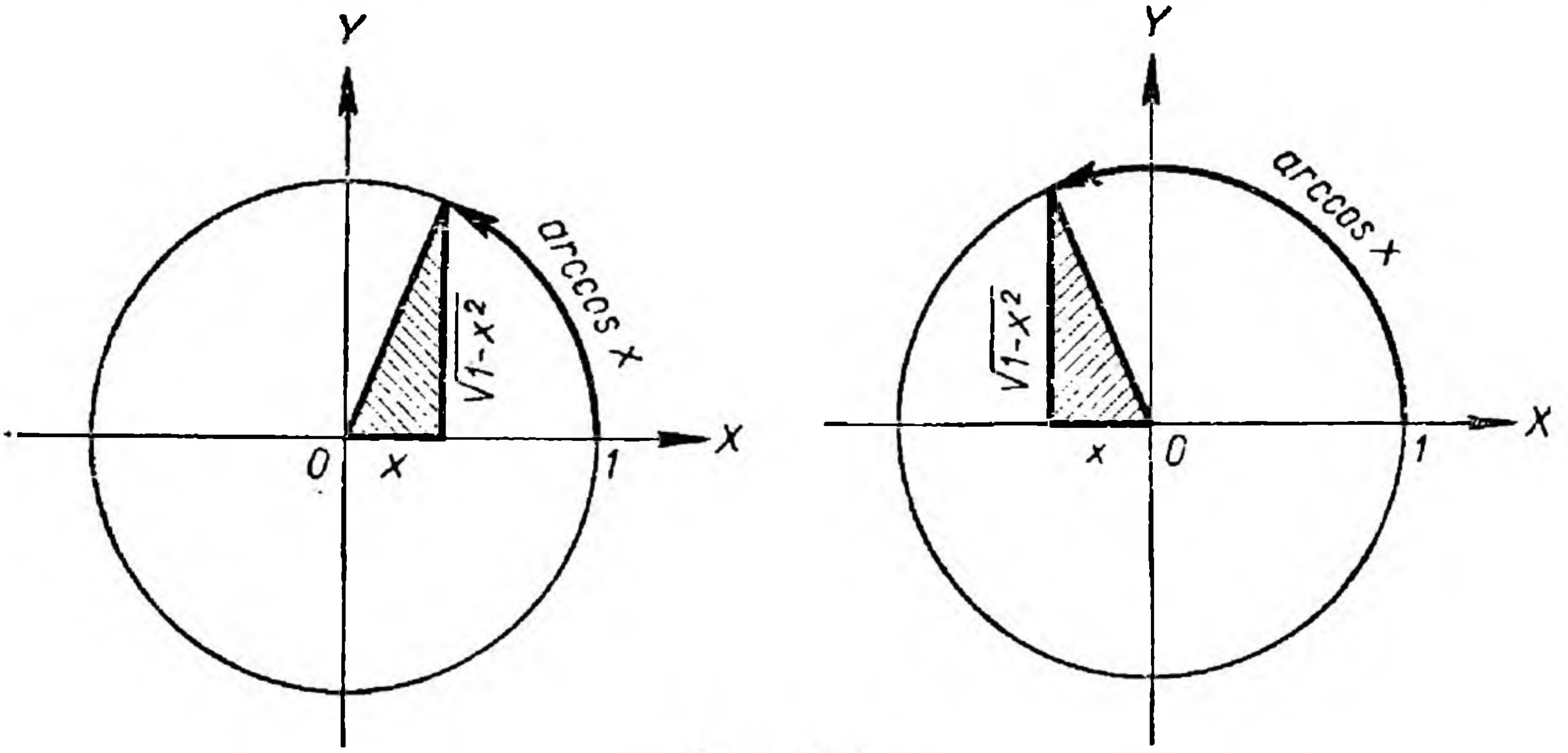


Рис. 101

2339. 1) $2a$; 2) 0; 3) 1; 4) 1. **2340.** 1) 0; 2) 0; 3) ∞; 4) ∞; 5) ∞; 6) ∞; 7) 0. **2341.** 1) 24; 2) 0; 3) 5; 4) 9. **2342.** 1) 2; 2) -3; 3) 1; 4) -2. **2343.** 1) 1; 2) 30; 3) $\frac{1}{5}$; 4) -1.

2346. 1) Требуется доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $|x-2| < \delta$ следует неравенство $|(2x+1)-5| < \varepsilon$. Из последнего неравенства имеем: $|2x-4| < \varepsilon$, $|x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, если $|x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$, то $|(2x+1)-5| < \varepsilon$. 2) $|x^2-9| < \varepsilon$, $|(x+3)(x-3)| < \varepsilon$, $(x+3)\cdot|x-3| < \varepsilon$. Так как $x > 0$, то $x+3 > 3$, а потому $3\cdot|x-3| < \varepsilon$, откуда $|x-3| < \frac{\varepsilon}{3}$. Следовательно, при условии $|x-3| < \frac{\varepsilon}{3}$ будет иметь место неравенство $|x^2-9| < \varepsilon$. 3) $|\sqrt{x}-2| = \left|\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2}\right| = \left|\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}\right| = \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2}$. Так как $\sqrt{x} > 0$, то $\sqrt{x}+2 > 2$, а потому $\frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} < \frac{|x-4|}{2}$. Следовательно, если выполняется неравенство $|x-4| < 2\varepsilon$, то будет выполняться и неравенство $|\sqrt{x}-2| < \varepsilon$. 5) Из неравенства $|5^x-25| < \varepsilon$ имеем: $-\varepsilon < 5^x-25 < \varepsilon$, или $25-\varepsilon < 5^x < 25+\varepsilon$. Следовательно, если $\frac{\lg(25-\varepsilon)}{\lg 5} < x < \frac{\lg(25+\varepsilon)}{\lg 5}$, то $|5^x-25| < \varepsilon$. **2347.** 1) 5; 2) a; 3) 1; 4) 6. **2348.** 1) -2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-2a$; 4) $-\frac{1}{3}$. **2349.** 1) -1. Указание. Сократить дробь на $\sqrt{x}$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. Указание. Умножить числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{a+h}+\sqrt{a}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) 2. **2350.** 1) $\frac{3}{2}$. Указание. Умножить числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt{x^2+4}+2)\cdot(\sqrt{x^2+9}-3)$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 3. **2351.** 1) $+\infty$; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **2352.** 1) 1; 2) -1; 3) 1; 4) 1. **2353.** 1) $\pm\infty$; 2) $+\infty$; 3) 2; 4) $\frac{1}{2}$. **2354.** 1) 0; 2) 0; 3) 2; 4) 1. **2356.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3) $\frac{5}{4}$; 4) $\frac{3}{2}$. **2357.** 1) 1; 2) 3; 3) 3. **2358.** 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{8}$.

XI. Производная и ее применение к исследованию функций

2364. 1) Нельзя, так как приращение функции зависит не только от величины приращения аргумента, но и от значения самого аргумента; 2) можно. 2365. 1) 0,62; 2) 1; 3) $-0{,}061$; 4) -1; 5) $-0{,}1$; 6) $-0{,}077$. 2366. 1) $-1{,}24$; 2) $-0{,}81$; 3) 0,76. 2367. $\sim 22{,}7$. 2368. 1) 0,66 *см*^{2} и 7,66 *см*^{3}; 2) 126 *см*^{2} и 331 *см*^{3}; 3) $-7{,}14$ *см*^{2} и $-10{,}61$ *см*^{3}.

2372. 1) 3 *см/сек*; 2) 3 *см/сек*. 2373. 1) 10 *м/мин*; 2) $2(t_1+t_2)$ *м/мин*. 2374. 1) 10290; 9849; 9824,5; 9804,9; 9800,49 *см/сек*. 2) $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = gt$. Этот предел есть скорость прямолинейного движения в момент времени t;

3, а) 980 *см/сек*; б) 4900 *см/сек*; 4) $v = gt$. **2375.** 1) $v = v_0 + gt$; 2) 2208 *м/сек*. **2376.** 1) 32,6; 31,1; 29,9; 29,63 *м/сек*; 2) 29,6 *м/сек*; 3) $v = 6t - 0{,}4$ *м/сек*. **2377.** 1) 5; 2) $3t_1^2$; 3) $6t_1^2 + 3$; 4) $-\frac{2}{(t+1)^2}$; 5) $\frac{3}{(t+1)^2}$; 6) $-\frac{2}{t^3}$; 7) $\frac{1}{2\sqrt{t+1}}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{2t+1}}$,

2378. 1) 4,1. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает собой среднюю скорость изменения данной функции в интервале $(x;\ x + \Delta x)$. 2) Изменится. **2380.** 1, а) 1; б) —9. 2, а) 1; б) 1; в) —1. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует. **2381.** 1) 12; 24 и —8; 2) $-\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}$; $11\frac{1}{2}$. **2382.** —3. При $x = 0$ функция не имеет производной. **2383.** 2) 0 и 2. **2384.** 1) $8x$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $6x^2$; 4) $x - 3x^2$. **2385.** 1) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 2) $-\frac{2}{(x-1)^2}$. **2386.** 2) 2 *м/сек*; 47 *м/сек*. **2387.** 1) Средняя угловая скорость неравномерного вращения за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ есть отношение приращения $\Delta\varphi$ угла φ к приращению времени $\Delta t = t_2 - t_1$ $\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right)$. 2) Угловая скорость неравномерного вращения в момент времени $t = t_1$ есть предел средней угловой скорости за промежуток времени от момента $t = t_1$ до момента $t = t_1 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t_1 + \Delta t) - \varphi(t_1)}{\Delta t} = \varphi'(t_1)$. **2388.** $\omega = 4t - 3$. При $t = 5$, $\omega = 17$ *рад/сек*. **2389.** 1) 5 *рад/сек*; 2) через 8 *сек*. **2390.** 2) $\lim\limits_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = F'(T)$, где Q — количество тепла при температуре T. **2391.** 1) ~1,02; 2) 1,00425 и 1,013. **2392.** 1) $\frac{\Delta q}{\Delta t}$; 2) $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$. **2393.** $i = 6t - 2$; 34*A*. **2394.** 1) $\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$; 2) $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta t} = f'(t)$. **2395.** 1) $\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$; 2) $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta t} = f'(t)$, где R — количество вещества в момент t.

2399. 1) 5; 2) 4 и 6; 3) из треугольника TPM находим: $TP = \frac{y}{\operatorname{tg}(\widehat{PTM})} = \frac{y}{y'} = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$, т. е. точка T есть середина отрезка OP. Значит, для построения касательной к параболе $y = x^2$ в любой ее точке M достаточно разделить пополам отрезок OP и середину его соединить с точкой касания M. **2400.** 1, а) $y = 8x - 4$; б) $y = -16x - 16$; 2, а) $y = 0{,}5x + 7$; б) $y = 0{,}5x + 7$; 3, а) $y = 1{,}5x - 0{,}5$; б) $y = 6x + 8$; 4, а) $y = \frac{1}{4}x + 1$; б) $y = \frac{\sqrt{10}}{6}x + \frac{3\sqrt{10}}{20}$. **2401.** $(1;\ -1)$. **2402.** $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right)$. **2403.** 3 и —3.

2406. 1) 0; 2) 0; 3) 5; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $-\frac{2}{5}$; 6) -7; 7) $2x+1$; 8) $2\sqrt{2}\,(1-x)$; 9) $2(x+1)$; 10) $3x-\frac{19}{4}$; 11) $72x^2-196x+133$. **2407.** 0,5; 0,5. **2408.** $-0{,}4$; $-0{,}4$. **2409.** 1; -1; 5. **2410.** 6; 34; 46. **2411.** $\operatorname{arctg}(-2)$. **2412.** 2; -1; 2. **2413.** $y=0{,}5x-1$; $y=-0{,}5(x-1)$.

2414. 1) $2x$; 2) $3x^2$; 3) $4x^3$; 4) $5x^4$. **2416.** $2\pi R$; 2) $4\pi R^2$. **2417.** 1) $7x^6$; 2) $10x^4$; 3) $-12x^3$; 4) $4x^5$. **2418.** 1) $10x+3$; 2) x^2-2x+4; 3) x^4-6x^2-x; 4) $1-x+x^2-x^3$. **2419.** 1) $15x^2-2x$; 2) $5x^4+3x^2-4x$; 3) $\frac{10}{3}x^4-4x^3+8x-6$; 4) $-6x^5+15x^4+40x^3+3x^2-6x-10$. **2420.** 1) $-2x^{-3}$; 2) $-\frac{3}{x^4}$; 3) $-\frac{10}{x^3}$; 4) $-\frac{2}{x^5}$. **2421.** 1) $1-\frac{1}{x^2}$; 2) $\frac{4}{x^5}+\frac{3}{x^4}-\frac{2}{x^3}$; 3) $\frac{9}{x^4}-\frac{4}{x^3}$; 4) $x-\frac{4}{x^3}+2$. **2422.** 1) $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; 2) $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$; 3) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; 4) $\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$. **2423.** 1) $1+\frac{1}{\sqrt{x}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{4}{\sqrt[3]{x}}$; 3) $2x+\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}+1$; 4) $-\frac{5}{2x\sqrt{x}}-\frac{3}{2\sqrt{x}}$. **2424.** 1) $at+v_0$; 2) 999; 3) 20; 4) -10. **2425.** 1) $\frac{4}{(2x+1)^2}$; 2) 9; 3) $-\frac{24}{49}$; 4) $\frac{1}{18}$. **2426.** 8 *м/сек*; через 24 *сек*. **2427.** а) 0; б) через 10 *сек*. **2428.** 3,5 *рад/сек*. **2429.** 1) 5 *г/см*³; 2) 65 *г/см*³; 3) 275 *г/см*³. **2430.** 1) $y=-0{,}5x+2$; 2) $(-1;\ 2)$. **2432.** 1) $6(2x-5)^2$; 2) $-5(3-x)^4$; 3) $24x(4x^2-3)^2$; 4) $3(3x-2)(x-1)^2(5x-4)$. **2433.** 1) $-\frac{2}{(x-2)^3}$; 2) $\frac{36x}{(3-x^2)^4}$; 3) $\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-2}}$; 4) $\frac{5}{(7-2x)\sqrt{7-2x}}$.

2435. 1) $\cos x-\sin x$; 2) $1-\cos x$; 3) $\frac{1}{3}\cos x-3\sin x$; 4) $-0{,}5\cos x-0{,}5\sin x$. **2436.** 1) $\sin x+x\cos x$; 2) $\cos x-x\cdot\sin x$; 3) $\cos 2x$; 4) $2\cos 2x$. **2437.** 1) $\sin 2x$; 2) $-2\sin 2x$; 3) $-2\sin 2x$; 4) $\frac{3}{2}\sin 2x(\sin x+\cos x)$. **2438.** 1) $-\sin 4x$; 2) $3\cos 3x$; 3) $-3\sin 3x$; 4) $\frac{n}{2}\sin 2x(\sin^{n-2}x+\cos^{n-2}x)$; 5) $-\sin^3 x$. **2439.** 1) $\frac{4}{\sin^2 2x}$; 2) $\operatorname{ctg}x-\frac{x}{\sin^2 x}$; 3) $\frac{1}{2}\sin 4x$; 4) $\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$; 5) $-3\cos x\cdot(1-\sin x)^2$; 6) $\operatorname{tg}^4 x$. **2440.** 1) -1; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$. **2443.** 1) $\cos\frac{x}{2}$; 2) $-\sin 3x$; 3) $\cos 5x+\sin\frac{x}{5}$; 4) $2x-\sin(x-1)$. **2444.** 1) $3\sin(2-3x)-3\cos(3x-2)$; 2) $2x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+x^2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $\frac{3}{2}\cos 3(x-1)-\frac{1}{2}\cos(x-1)$; 4) $6\sin 6x$. **2445.** 1) $\cos 5x-5x\sin 5x$; 2) $\frac{5}{2}\cos 5(x-1)+\frac{1}{2}\cos(x+1)$; 3) $\frac{4}{\cos^2 4x}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{x}{2\sin^2\frac{x}{2}}$. **2446.** 1) $4\cos 2x(\sin 2x-2)$; 2) $9(\sin 3x-\cos 3x)+3\cos 6x$;

3) $\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{3}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}x\cdot\sin x-\sin^2\frac{x}{2}$; 4) $6(4\sin x-\cos 2x)^2\times$ $\times(2\cos x+\sin 2x)$. **2447.** $(\pi k;\ 1)$; $\left(\pi k+\frac{\pi}{2};\ -1\right)$.

2448. 1) 2; 2) x; 3) 10; 4) $36x-6$. **2449.** 1) $n(n-1)x^{n-2}$; 2) $6x^{-4}$; 3) $-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$; 4) $\frac{-2}{9x\sqrt[3]{x}}$. **2450.** 1) $6x+\frac{2}{x^3}$; 2) $\frac{-2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $\frac{2}{(x-1)^3}$; 4) $6(3x^2+1)$. **2451.** 1) $-\sin x$; 2) $-\cos x$; 3) $-4\sin 2x$; 4) $-9\cos\left(\frac{\pi}{8}-3x\right)$. **2452.** 1) $\frac{1}{4}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$; 2) $2(1-\cos 2x)$; 3) $-9\cos 3x$; 4) $54(1-3x)$. **2454.** 1) g; 2) g. Ускорение прямолинейного движения в момент времени t равно второй производной от пути s по времени t. **2455.** 1) 18 *м/сек*², 15 *м/сек*², 12,3 *м/сек*², 12,03 *м/сек*², 12,003 *м/сек*²; 2) 12 *м/сек*²; 3) $6t$ *м/сек*². **2456.** 1) $(3t^2+2)$ *см/сек*; 2) $6t$ *см/сек*². **2457.** $\frac{\pi^2}{18}$ *см/сек*². **2458.** 1) t^2-5t+4; 2, а) 1 *сек* и 4 *сек*; б) 2 *сек* и 3 *сек*. **2459.** $4\cdot 10^4$ *дин*; 2) $2{,}5\cdot 10^4$ *эрг*.

2462. 1) Неотрицательные; 2) неположительные. **2463.** 1) Если функция $f(x)$ является возрастающей (убывающей) на интервале $(a;\ b)$, то ее производная $f'(x)$ положительна (отрицательна) во всех точках интервала $(a;\ b)$, причем в некоторых из них она может быть равна нулю. 2) Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ положительна (отрицательна) на интервале $(a;\ b)$ (в отдельных точках этого интервала она может быть равна нулю), то $f(x)$ — возрастающая (убывающая) на этом интервале функция. **2468.** 1, а) убывает; б) возрастает; 2, а) возрастает; б) убывает. **2470.** 1) Возрастает в интервале $(-2,\ +\infty)$; убывает в интервале $(-\infty,\ -2)$. 2) Возрастает в интервалах $(-\infty,\ -1)$ и $(2,\ +\infty)$ и убывает в интервале $(-1;\ 2)$. 3) Возрастает в интервале $(1,\ +\infty)$ и убывает в интервале $(-\infty,\ 1)$. 4) Возрастает в интервалах $\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{4},\ \pi\right)$ и убывает в интервале $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)$. **2471.** 1) Возрастает в интервале $(-\infty,\ -0{,}5)$ и убывает в интервале $(-0{,}5;\ +\infty)$; 2) убывает в интервале $(-\infty,\ +\infty)$; 3) возрастает в интервалах $(-\infty,\ 1)$ и $(3,\ +\infty)$; убывает в интервале $(1;\ 3)$; 4) возрастает в интервале $(0;\ +\infty)$; убывает в интервале $(-\infty;\ 0)$; 5) убывает в интервале $(-\infty,\ +\infty)$; 6) возрастает в интервале $(-\infty,\ +\infty)$.

2472. Да. **2475.** 1) Минимум в точке $(1;\ 5)$; 2) максимум в точке $(-3;\ 9{,}5)$; 3) максимум в точке $\left(-5;\ 37\frac{1}{3}\right)$; минимум в точке $\left(1;\ \frac{1}{3}\right)$; 4) максимум в точках $(1;\ 0{,}5)$ и $(-1;\ -0{,}5)$; минимум в точке $(0;\ 0)$. **2476.** 1) Максимум в точке $(-3;\ -6)$; минимум в точке $(3;\ 6)$; 2) максимум в точке $(-2;\ -2)$; минимум в точке $(2;\ 2)$; 3) нет ни максимума, ни минимума; 4) максимум в точке $(-a;\ -2)$; минимум в точке $(a;\ 2)$. **2477.** 1) Максимум в точке $\left(\frac{8}{5};\ \frac{108}{3125}\right)$; минимум в точке $(2;\ 0)$; 2) максимум в точках $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \sqrt{2}\right)$; минимум в точках $\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi k;\ -\sqrt{2}\right)$; 3) нет ни максимума, ни минимума; 4) максимум в точке $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; минимум в точке $\left(-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **2479.** 2) Минимум в точке $(0;\ 2)$. **2480.** 1) Указание. Исследовать на максимум и минимум функцию $f(x)=-x^2+ax$ $(x>0)$.

2) Указание. Исследовать на максимум и минимум функцию $f(x)=x+\frac{a}{x}$, $x>0$. **2481.** $p=-10$, $q=26$. **2482.** $\frac{a}{2}$ *м*; $\frac{a}{4}$ *м*. **2483.** $\frac{d}{\sqrt{3}}$ *см*; $\sqrt{\frac{2}{3}}\,d$ *см*. **2484.** $\frac{a}{6}$ *см*. **2485.** 7 *м/сек*; в конце 1 *сек*. **2488.** 1) Максимум в точке $(-2;\ 9)$; 2) минимум в точке $\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{1}{4}\right)$; 3) максимум в точке $(2;\ 44)$; минимум в точке $(-3;\ -81)$; 4) максимум в точке $(0;\ 0)$; минимум в точках $(-3;\ -135)$ и $(2;\ 40)$. **2489.** 1) Максимум в точке $(-2;\ -4)$; минимум в точке $(2;\ 4)$; 2) минимум в точках $(\pm 2;\ 4)$; 3) максимум в точке $(1;\ 0{,}5)$; минимум в точке $(-1;\ -0{,}5)$; 4) максимум в точке $(0;\ 1)$. **2490.** 1) Максимум в точке $(\pi;\ 1)$; минимум в точках $\left(\frac{3\pi}{2};\ -1\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2};\ -1\right)$; 3) максимум в точке $\left(\frac{5\pi}{3};\ \frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; минимум в точке $\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **2491.** 1) Максимум в точке $\left(\frac{5\pi}{8};\ \frac{\sqrt{2}+2}{4}\right)$; минимум в точке $\left(\frac{\pi}{8};\ \frac{\sqrt{2}-2}{4}\right)$; 4) максимум в точках $(0;\ 1)$; $\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$; $(\pi;\ 1)$; $\left(\frac{3\pi}{2};\ 1\right)$ и $(2\pi;\ 1)$; минимум в точках $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{4};\ \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{4};\ \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{7\pi}{4};\ \frac{1}{2}\right)$. **2492.** Указание. Исследовать на максимум и минимум функцию $P(x)=2R(2\sin x+\sin 2x)$, где x — угол при основании равнобедренного треугольника, P — периметр треугольника, R — радиус описанной окружности. **2494.** Указание. Исследовать на максимум и минимум функцию $S(x)=\frac{1}{4}C^2\sin 2x$, где x — острый угол прямоугольного треугольника, S — его площадь; C — длина гипотенузы. **2495.** 1) $x=\frac{2p}{4+\pi}$. Указание. Исследовать на максимум и минимум функцию $S(x)=2px-\frac{4+\pi}{2}\cdot x^2$, где x — радиус полукруга, S — площадь сечения туннеля. 2) $x=\sqrt{\frac{2S}{4+\pi}}$, где x — радиус полукруга. Указание. Исследовать на максимум и минимум функцию $p(x)=\frac{(4+\pi)x^2+2S}{2x}$. **2496.** 60°. Указание. Исследовать на максимум и минимум функцию $p(\varphi)=\frac{S}{h}+\frac{h(2-\cos\varphi)}{\sin\varphi}$, где p — смоченный периметр сечения канала. **2497.** 120°. **2498.** Высота цилиндра равна диаметру его основания и равна $2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. **2499.** $\frac{r}{\sqrt{2}}\approx 0{,}7$. Указание. Исследовать на максимум и минимум функцию $E=\frac{J}{2r^2}\cdot\sin\varphi\cdot\sin 2\varphi$, где φ — угол падения лучей на поверхность стола, J — сила света лампы (постоянная величина), E — освещенность поверхности стола. **2500.** $\frac{4}{3}R$. **2501.** $\frac{H}{3}$. **2502.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$. **2503.** $y_{\max}=\frac{v_0^2}{2g}\cdot\sin^2\alpha$ при $x=\frac{v_0^2}{2g}\cdot\sin 2\alpha$. Если $\alpha=45°$, $v_0=400$ *м/сек*,

$g = 10$ *м/сек*^{2}, то $y_{\max} = 4000$ *м*. **2504.** 1) $\sqrt{\frac{NR}{r}}$. Если $\sqrt{\frac{NR}{r}}$ — число не целое или не является делителем числа N, то следует взять ближайшее к найденному значению целое число, являющееся делителем числа N. 2) $\sqrt{\frac{Nr}{R}}$. **2505.** Составим функцию $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$. Тогда $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} > 0$, т. е. $f(x)$ — возрастающая функция. При $x > 0$ имеем: $f(x) > f(0) = 0$, т. е. $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

2506. Построим функцию $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$. Так как при $x > 0$ функция $f'(x) = -\sin x + x > 0$ (ибо $\sin x < x$), то для $x \geqslant 0$ функция $f(x)$ — возрастающая функция. При $x > 0$ получаем: $f(x) > f(0) = 0$, т. е. $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$.

2507. 2) Функция убывает в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$, возрастает в интервале $(-1; 1)$; функция имеет максимум в точке $(1; 2)$, минимум в точке $(-1; -2)$ (рис. 102). 3) Функция возрастает в интервалах $(-\infty; 0)$ и $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$, убывает в интервале $\left(0; \frac{2}{3}\right)$; максимум в

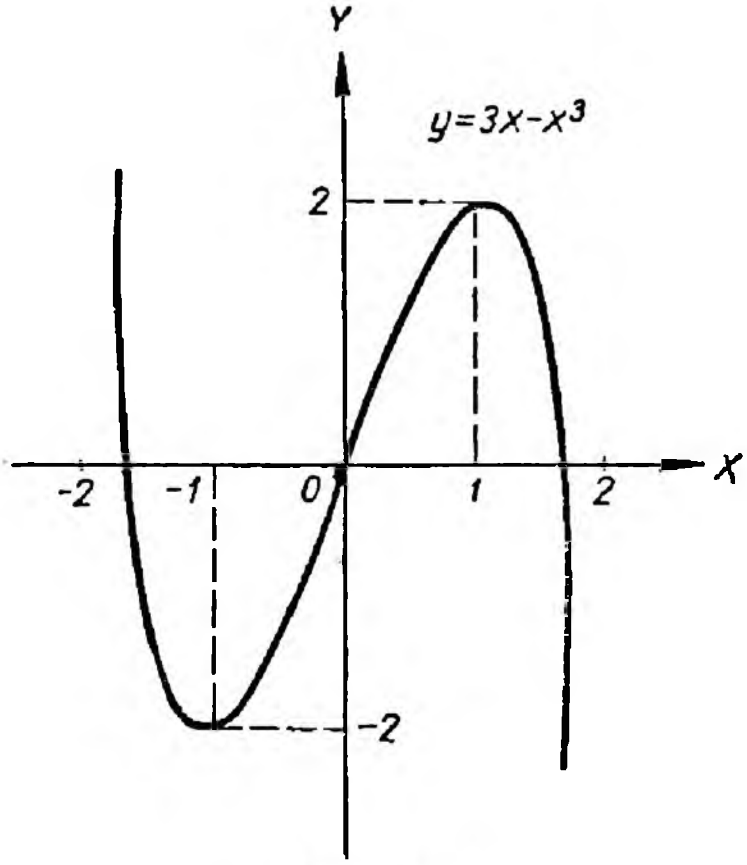


Рис. 102

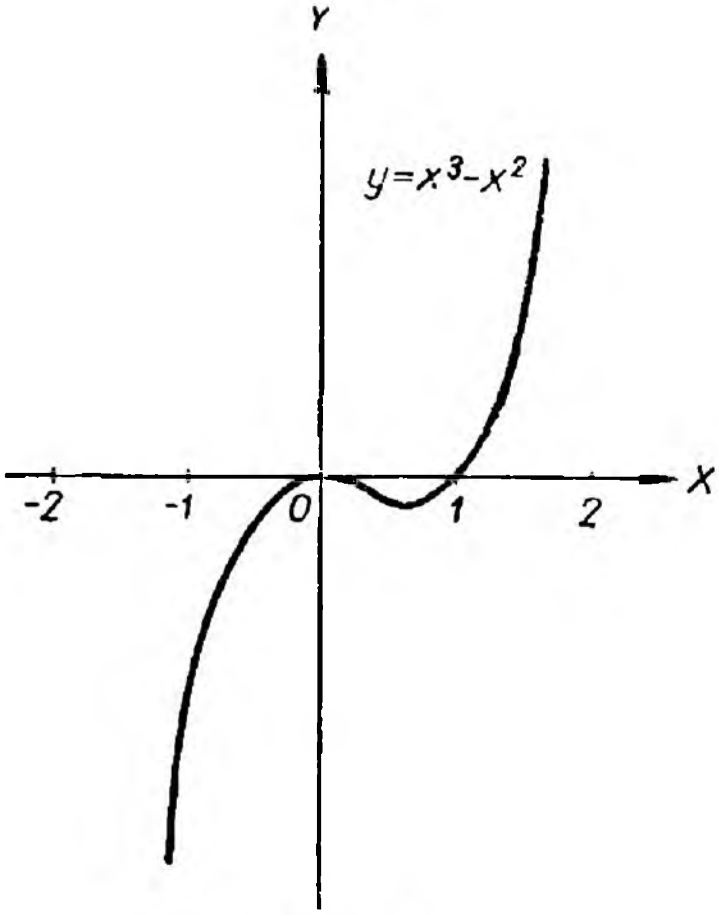


Рис. 103

точке $(0; 0)$, минимум в точке $\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{27}\right)$ (рис. 103). 4) Функция возрастает в интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, убывает в интервале $(-1, 1)$; максимум в точке $(-1; 5)$, минимум в точке $(1; 1)$ (рис. 104). **2508.** 4) Функция возрастает в интервалах $(-0{,}5\sqrt{10}; 0)$ и $(0{,}5\sqrt{10}; +\infty)$, убывает в интервалах $(-\infty; -0{,}5\sqrt{10})$ и $(0; 0{,}5\sqrt{10})$, имеет максимум в точке $(0; 4)$ и минимум в точках $(-0{,}5\sqrt{10}; -2{,}25)$ и $(0{,}5\sqrt{10}; -2{,}25)$ (рис. 105). **2509.** 1) Функция возрастает в интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, убывает в интервалах $(-1; 0)$ и $(0; 1)$, имеет максимум в точке $(-1; -2)$ и минимум в точке $(1; 2)$ (рис. 105). 2) Функция возрастает в интервале

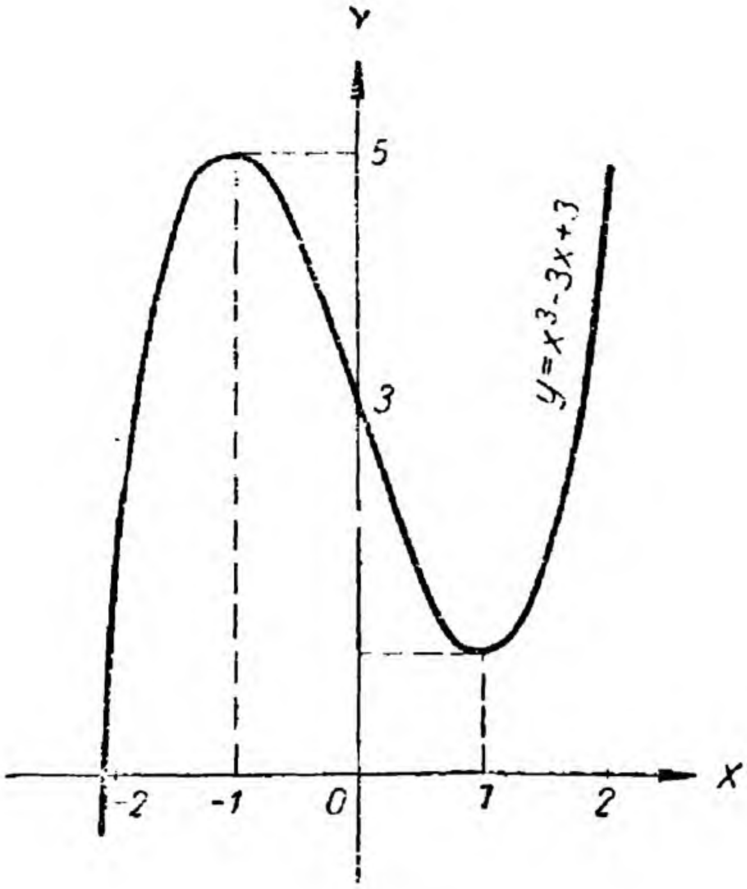


Рис. 104

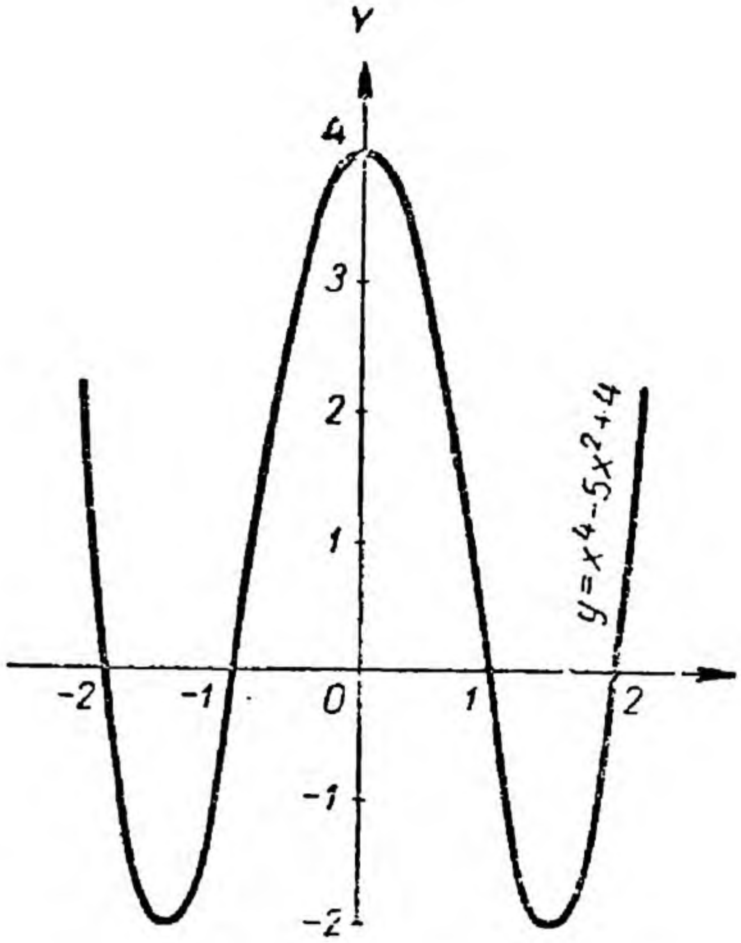


Рис. 105

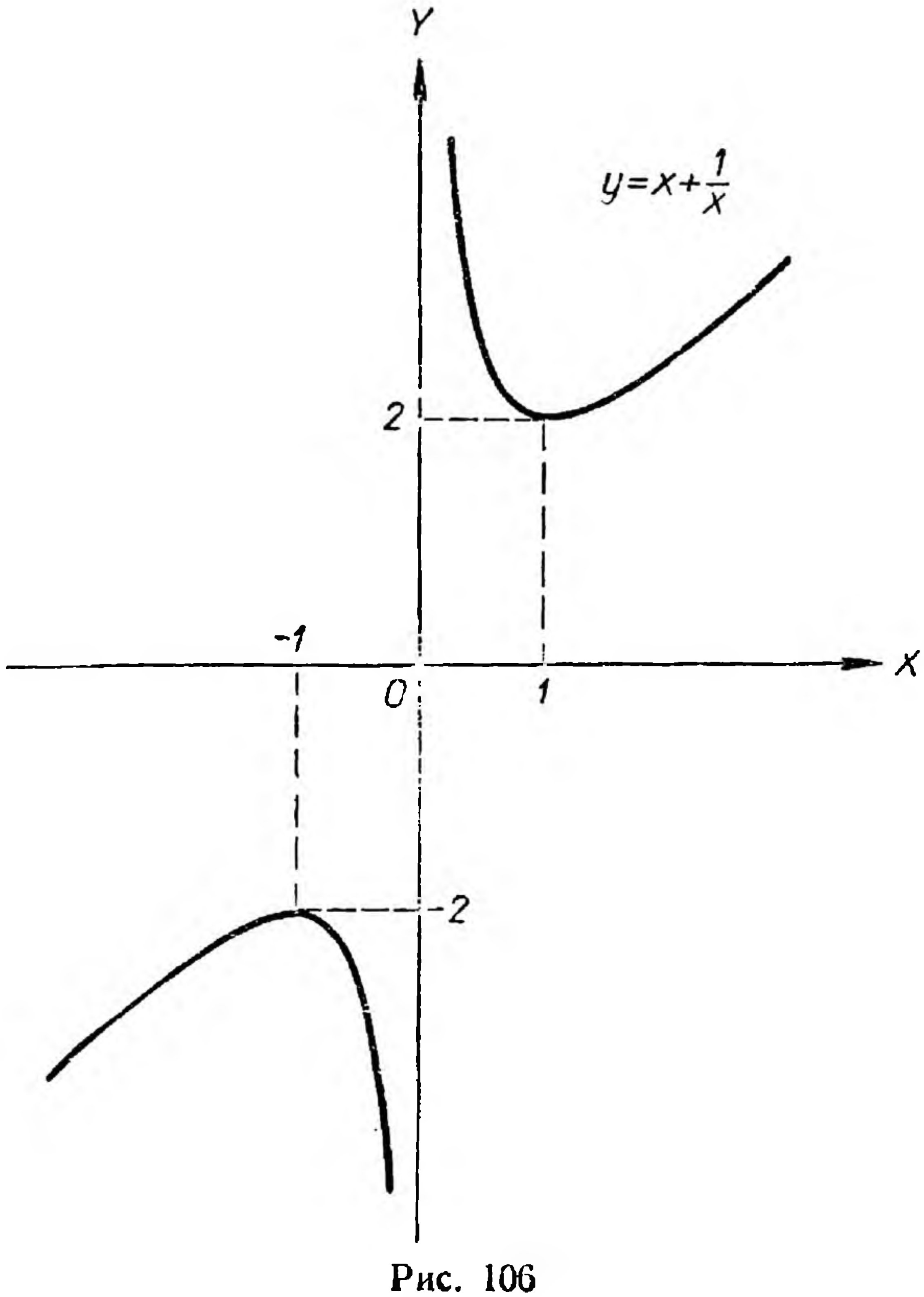


Рис. 106

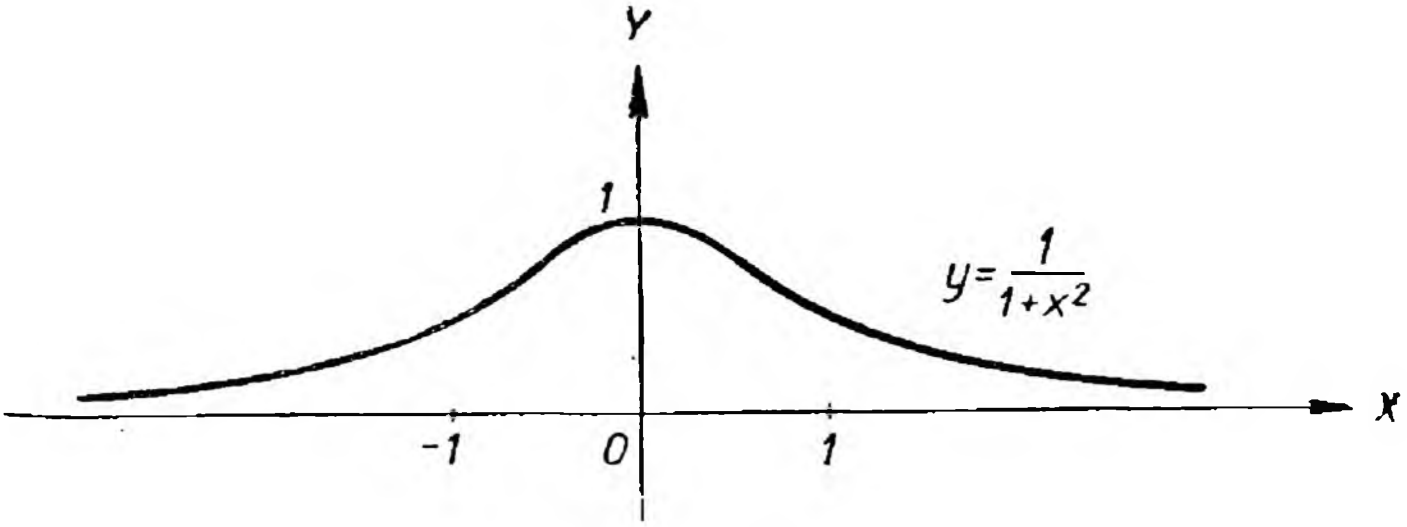


Рис. 107

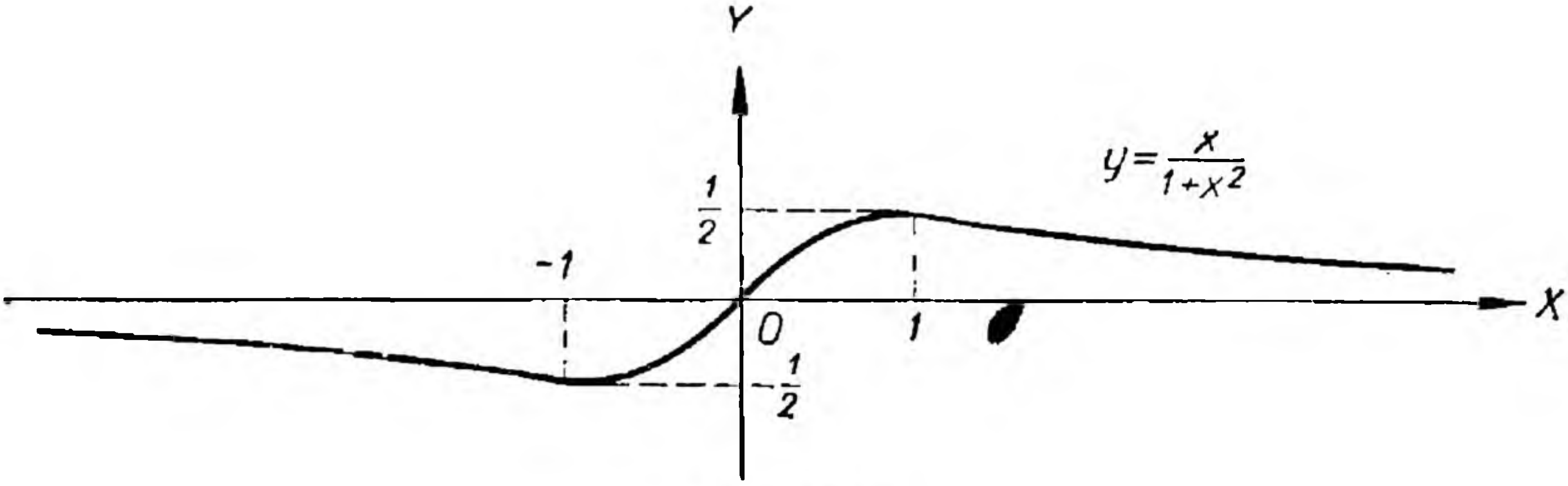


Рис. 108

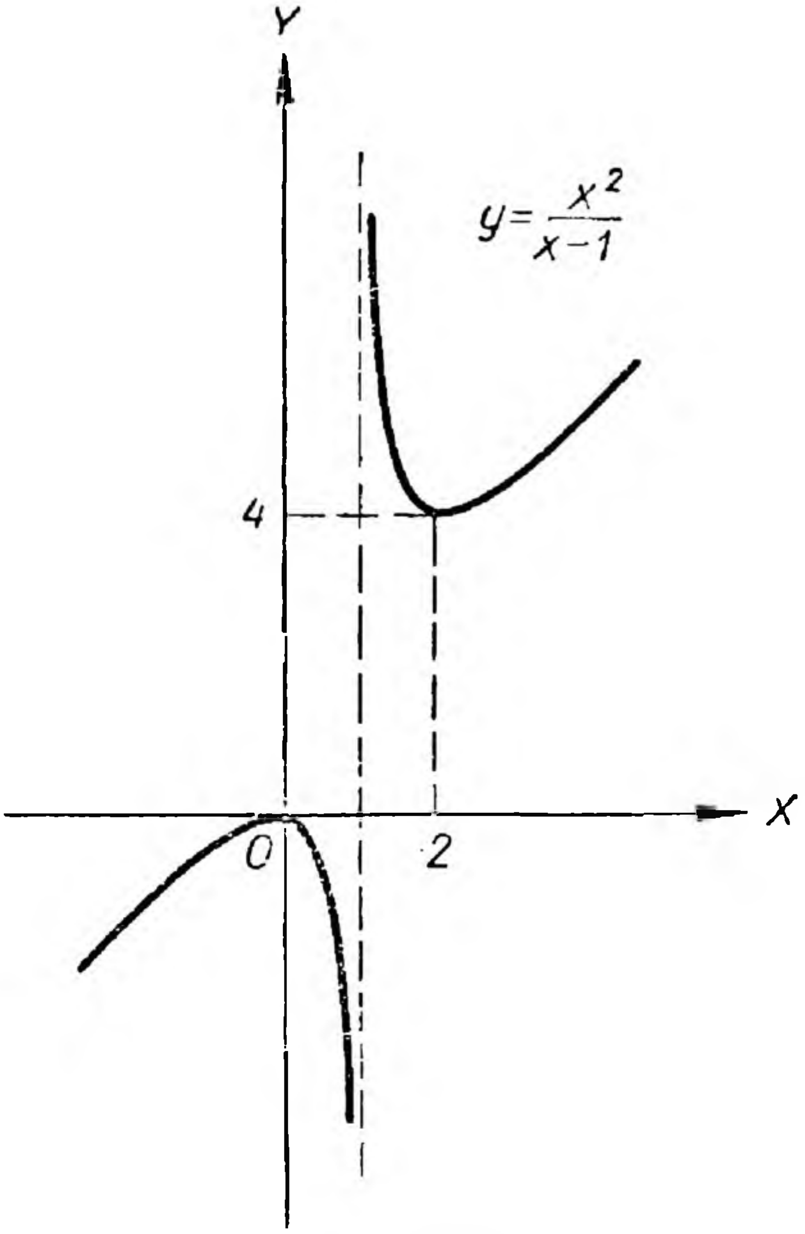


Рис. 109

$(-\infty; 0)$, убывает в интервале $(0; -\infty)$, имеет максимум в точке $(0; 1)$ (рис. 107). 3) Функция возрастает в интервале $(-1; 1)$, убывает в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1; +\infty)$, имеет максимум в точке $(1; 0{,}5)$, минимум в точке $(-1; -0{,}5)$ (рис. 108). 4) Функция возрастает в интервалах $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$, убывает в интервалах $(0; 1)$ и $(1; 2)$, имеет максимум в точке $(0; 0)$, минимум в точке $(2; 4)$ (рис. 109).

2513. 1) $-462\,\frac{a}{b}$; 2) $84x^3$; 3) $-3432x^7y^7$; 4) 2184; 5) $10a^9$. **2514.** 1) 20; 2) $120x^{11}$. **2515.** $-\frac{28}{27}a^5$. **2516.** 3. **2517.** x^{-6}; $924x^{-1}$; x^4. **2518.** Решение. Члены разложения будут возрастать до тех пор, пока отношение $\frac{T_{k+1}}{T_k}$ будет оставаться больше единицы, т. е. $\frac{C_{50}^{k}(\sqrt{2})^k}{C_{50}^{k-1}(\sqrt{2})^k} > 1$, или $\frac{50-k+1}{k}\times\sqrt{2} > 1$, или $51\sqrt{2}-k\sqrt{2} > k$, откуда $k < \frac{51\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = 51(2-\sqrt{2})$, или $k < 29{,}88$. Следовательно, наибольшее значение $k = 29$, а наибольший член разложения тридцатый: $C_{50}^{21}(\sqrt{2})^{29}$. **2519.** Указание. $C_{2n}^{n} = 2\cdot C_{2n-1}^{n-1}$. **2520.** Указание. $11^{10}-1=(10+1)^{10}-1$. 2) Указание. $6^{2n}-1=(7-1)^{2n}-1$. **2521.** Решение. Рассмотрим n-значное число: $\overline{a_0a_1a_2\ldots a_n} = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\cdot 10 + a_n = a_0(9+1)^n + a_1(9+1)^{n-1} + a_2(9+1)^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(9+1) + a_n = 9\cdot M + (a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n)$. Число разделится на 9, если сумма $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n$ делится на 9. Аналогично $\overline{a_0a_1a_2\ldots a_n} = a_0(11-1)^n + a_1(11-1)^{n-1} + a_2(11-1)^{n-2} + \ldots + a_n = 11\cdot N + (a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots)$. Число $\overline{a_0a_1a_2\ldots a_n}$ разделится на 11, если $a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots$ делится на 11.

XII. Обобщение понятия числа. Комплексные числа

2542. 1) Решение. а) При $n=1$ равенство верно: $\frac{1\cdot(1+1)\cdot(1+2)}{1\cdot 2\cdot 3}=1$. б) Допустим, что равенство справедливо при $n=k$, т. е. $1+3+6+10+\ldots+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)(k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$, и докажем, что тогда оно будет верно и для $n=k+1$, т. е. $1+3+6+10+\ldots+\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{1\cdot 2\cdot 3}$. Действительно, $1+3+6+10+\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{k(k+1)(k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{1\cdot 2\cdot 3}$. в) Так как для случая $n=1$ равенство верно, а из предположения его справедливости при $n=k$ получаем, что оно верно и для $n=k+1$, то данное равенство будет верно и для любого натурального n. **2543.** 1) $\frac{n}{n+1}$; 2) $u_n=2n-1$; 3) n^2. **2544.** 2) Указание. $1+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$
$$=\frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}=\frac{(k+1)\cdot[(k+1)+1]\cdot[2(k+1)+1]}{6}.$$

3) Указание. $1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{k-1}\cdot k^2+(-1)^k\cdot(k+1)^2=$ $=(-1)^{k-1}\cdot\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^k\cdot(k+1)^2=(-1)^k\cdot\frac{(k+1)(k+2)}{2}=$ $=(-1)^k\cdot\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$. 4) Указание. $1+3^2+5^2+$ $+7^2+\ldots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}+(2k+1)^2=$ $=\frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}=\frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}=$ $=\frac{(k+1)\cdot[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}{3}$.

2543. 1) 2; 8; 2) $2\frac{1}{2}$; $7\frac{1}{2}$; 3) -2; 12; 4) $5-\sqrt{13}$; $5+\sqrt{13}$; 5) $5-4i$; $5+4i$. **2553.** 1) 3; 2; 2) 0,5; 0; 3) 1; 3 или 2; 3. **2558.** 2; $1+i\sqrt{3}$; $-1+i\sqrt{3}$; -2; $-1-i\sqrt{3}$; $1-i\sqrt{3}$. **2559.** 1) Симметрично данному относительно действительной оси; 2) симметрично данному относительно начала координат; 3) симметрично данному относительно мнимой оси. **2560.** 1) $5+2i$; 2) $-5-2i$; 3) $-5+2i$. **2561.** 1) На прямой $x=7$; 2) на прямой $y=-5$. **2562.** 5. **2564.** $-i$. **2567.** 1) 5; 2) $\sqrt{2}$; 3) 3; 4) 5; 5) 1; 6) 3; 7) $\sqrt{3}$; 8) 1. **2568.** Модули равны. **2570.** 1) Окружность $x^2+y^2=49$; 2) луч $y=x$, $x\geqslant 0$. **2573.** $z=1,5-2i$. **2574.** 1) π; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $-\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $-\frac{3\pi}{4}$; 6) $\frac{2\pi}{3}$. **2576.** 1.а) $\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$; б) π; в) 0. 2) $-\varphi$. **2577.** 0.

2579. 1) $b_1+b_2=0$; 2) $a_1+a_2=0$. **2582.** 1) $b_1=b_2$; 2) $a_1=a_2$. **2583.** 1) 1,3; 2) 1,7. **2584.** На одной прямой и направлены: 1) в одну сторону; 2) в противоположные стороны. **2585.** 1) $7+11i$; 2) $3+i$; 3) $-1-3i$; 4) $1\frac{5}{12}-1\frac{5}{6}i$. **2586.** 3) $\frac{5}{12}-2\frac{1}{4}i$; 4) $\frac{1}{5}+1\frac{7}{18}i$. **2587.** 2) $2\sqrt{3}-i\sqrt{2}$; 4) $\frac{3+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}+\frac{3+2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}i$. **258[illegible].** 2) $5a-11bi$; 4) $\frac{(m-n)(m+n-1)}{mn}\cdot(1+i)$.

2593. 1) 2; 2) i; 3) $6(\sqrt{3}-i)$. **2594.** 1) -1; 2) $6\sqrt{6}$; 3) ab; 4) $(m-n)^2$. **2595.** 1) $2,5-3i$; 2) $1-6i$; 3) m^3n+mn^3i; 4) $-\frac{n}{m+n}-\frac{m}{m+n}\cdot i$. **2596.** 1) $-5-12i$; 2) $2-\frac{5}{6}i$; 3) $1,28+0,96i$; 4) $\frac{4}{81}+\frac{7}{81}i$. **2597.** 1) $3\sqrt{3}$; 2) $-2+2i\sqrt{3}$; 3) $24\sqrt{3}-24i$; 4) $\frac{5}{6}i$. **2598.** 1) a^2+b^2; 2) n^2-m^2+2mni; 3) $mn^2-m^2n-2mni\sqrt{mn}$; 4) $2+\frac{m^2-n^2}{mn}\cdot i$. **2600.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **2603.** x^4+4. **2607.** 1) $m-2ni$; 2) $\sqrt{a}+i$; 3) $a+3bi$; 4) $\sqrt{m}-2i\sqrt{n}$. **2608.** 1) $x^2+1=0$; 2) $x^2+0,25=0$; 3) $x^2-4x+5=0$; 4) $x^2-2x+4=0$. **2610.** 1) $-2i$; 2) $0,3i$; 3) $-3+2i$; 4) $2+3i$. **2611.** 1) $1,2+0,6i$; 2) $0,4+0,8i$; 3) $-\frac{9}{13}+\frac{6}{13}i$; 4) $\frac{6}{13}-\frac{4}{13}i$. **2612.** 1) $-i$; 2) $\frac{15}{17}-\frac{8}{17}i$; 3) $-\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{2}\cdot i$; 4) $3-5i\sqrt{2}$. **2613.** 1) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot i$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{5}-1)+\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})i$; 3) $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-2)}{5}-\frac{2+3\sqrt{2}}{5}\cdot i$; 4) $-\frac{13}{5}-\frac{\sqrt{6}}{5}i$. **2614.** 1) $\frac{m^2}{m^2+n^2}+$

$+\frac{mn}{m^2+n^2}\cdot i$; 2) $\frac{2a}{a^2+2}+\frac{a^2\sqrt{2}}{a^2+2}\cdot i$; 3) $\frac{m^2-n}{m^2+n}-\frac{2m\sqrt{n}}{m^2+n}\cdot i$; 4) i. **2618.** 1) $\frac{2}{7}$; 2) a. **2622.** 1) $-i$; 2) 1; 3) 0; 4) 0. **2623.** 0. **2624.** 1) 1; 2) i; 3) i; 4) i; 5) 0; 6) -1; 7) $-1-i$; 8) 0. **2625.** 1) $2i$; 2) -4; 3) $-2i$; 4) Решение. $(1-i)^{10}=[(1-i)^2]^5=(-2i)^5=-32i$. **2626.** 1) $-5+12i$; 2) $-24{,}96-2i$; 3) $2-4i\sqrt{2}$; 4) $-6-6i\sqrt{3}$. **2627.** 3) $ab(a-b)-2abi\sqrt{ab}$; 4) $\frac{1-a^2}{a}-2i$. **2628.** 1) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 2) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 3) $\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; 4) $\frac{4}{9}-\frac{8\sqrt{2}}{9}i$. **2630.** 1) i; $-3i$; 2) $6i$; $-2i$. **2631.** 1) $(x-3i)(x-4i)$; 2) $(x-2i)(x-3i)$. **2632.** $6-17i\sqrt{3}$. **2633.** 1) 0; 2) 0. **2634.** $-8+8i$. **2635.** 1) $-2\mp 12i$. **2636.** 1) -2; 2) -2; 3) $-\frac{1}{2}i$; 4) $-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$. **2637.** 1) 1; 2) 1; 3) $-(4{,}5+2\sqrt{2})$; 4) $8\sqrt{3}-14\frac{1}{3}$. **2638.** 1) 0; 2) $-0{,}25i$; 3) -3; 4) $-\frac{1}{4}$. **2639.** 1) 625; 2) 10 000; 3) -25; 4) -9. **2640.** 1) $\frac{2b(3a^2-b^2)i}{a^2+b^2}$; 2) $\frac{3x^2-1}{2x}$. **2641.** 1) 32; 2) 0; 3) Решение. $(1+i)^5\cdot(1-i)^5=[(1+i)(1-i)]^5=2^5=32$; 4) 128; 5) 1024; 6) $-0{,}25i$. **2642.** 1) $-2-2i$; 2) $-0{,}5+0{,}5i$; 3) $-2-\frac{i\sqrt{3}}{4}$. **2644.** 1) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; 2) $\pm(1-i)$; 3) $\pm(2+i)$; 4) $\pm(1-2i)$; 5) $\pm(3-2i)$; 6) $\pm(2+3i)$; 7) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$; 8) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{7}+i)$; 9) $\pm(2\sqrt{2}-i)$; 10) $\pm\sqrt{2}(\sqrt{15}+i)$.

2646. 1) $3(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)$; 2) $5(\cos\pi+i\sin\pi)$; 3) $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 4) $4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$. **2647.** 1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$; 3) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; 4) $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$. **2648.** 1) $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$; 2) $\sim 5(\cos 126^\circ 52'+i\sin 126^\circ 52')$; 3) $\sim\sqrt{13}[\cos(-123^\circ 41')+i\sin(-123^\circ 41']$; 4) $\sim\frac{\sqrt{5}}{6}(\cos 26^\circ 34'+i\sin 26^\circ 34')$. **2649.** 1) $1+i\sqrt{3}$; 2) $-2+2i\sqrt{3}$; 3) $3\sqrt{3}-3i$; 4) $-4\sqrt{3}-4i$. **2650.** 1) $6\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$; 2) $\sqrt{3}+i$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$; 4) $-i$. **2651.** 1) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; 2) $\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{7\sqrt{3}}{4}-\frac{7}{4}i$; 4) $-2i\sqrt{2}$. **2652.** 1) i; 2) -1024; 3) $-\frac{1}{27}i$; 4) 1. **2653.** 3) и 4). Решение. Полагая в формуле Муавра $n=3$, получим: $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi$ (1). С другой стороны, $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi+i(3\sin\varphi-4\sin^3\varphi)$ (2). Сравнивая равенства (1) и (2), получим: $\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi$; $\sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi$. **2654.** 1) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$;

2) $\cos\pi + i\sin\pi$; 3) $\cos 0 + i\sin 0$; 4) 0. **2655.** 1) ± 2; 2) Решение. $\sqrt{i} = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right)$, где $k = 0$; 1. При $k=0$: $\sqrt{i} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. При $k=1$: $\sqrt{i} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; 3) $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$; 4) $\pm 2(1 - i\sqrt{3})$; 5) 1; $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; 6) -2; $1 \pm i\sqrt{3}$. **2656.** 1) ± 1; $\pm i$; 2) $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$; $\pm\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$.

2657. 1) 2; $-1 \pm i\sqrt{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}(-1 \pm i\sqrt{3})$; 3) $\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$; $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$; $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. **2658.** 2) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{6}$; 4) $-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$; $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. **2659.** 2) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$; 4) $\pm\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$; $\pm i\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$. **2660.** 1) $\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot(1 \pm i)$; 2) $\pm\frac{1}{5}\cdot(1 \pm i)$; 3) $\pm\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\cdot(1 \pm i)$; 4) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1 \pm i)\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$. **2661.** 1) ± 2; $\pm 1 \pm i\sqrt{3}$; 2) $\pm\sqrt[6]{\frac{b}{a}}$; $\frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[6]{\frac{b}{a}}$; 3) $\pm 3i$; $\frac{\pm 3(\sqrt{3} \pm i)}{2}$; 4) $\pm i\sqrt[6]{\frac{b}{a}}$; $\frac{\pm\sqrt{3} \pm i}{2}\cdot\sqrt[6]{\frac{b}{a}}$. **2662.** ± 1; $\frac{\pm i \pm i\sqrt{3}}{2}$. **2663.** 1; $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$; 2; $-1 \pm i\sqrt{3}$. **2664.** 1) 1; $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; 3; $\frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}$; 2) 2; $-1 \pm i\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{4}$; 3) ± 2; $\pm 2i$; $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)\sqrt[4]{13}$; 4) ± 1; $\pm i$; ± 2; $\pm 2i$. **2665.** 1) $\frac{1}{2}$; 3; 2) 0; $2\sqrt{2}$; $\sqrt{2} \pm 3$; 3) $\frac{11 \pm 2\sqrt{2}}{4}$; $\frac{11 \pm i\sqrt{2}}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$; $\frac{-4 \pm i\sqrt{3}}{2}$; -1; $\frac{-7 \pm i\sqrt{3}}{4}$. **2666.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 27; $-\frac{27}{8}$; 4) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{9}$. **2667.** 1); 2) не имеют.

2669. 1) $(x-1)(x+2)(x-3)$; 2) $(2x-1)(4x+3)(x-2)$; 3) $(x-a)(x-b)(x-1)$. **2670.** 1) $x(x+1)(x-2)(x+3)$; 2) $(x-1)(x+1)(x-3)(x+4)$; 3) $(x^2-4x+7)(x^2+4x+9)$; 4) $(x^2-4x+6)(x^2+4x+5)$.

2671. $a+bi$ и $a-bi$. **2673.** 4. **2674.** 1) $\frac{4ai}{1+a^2}$; 2) $2a$; 3) $-\frac{\sqrt{ax}}{4a}$; 4) $-2n^{\frac{1}{2}}$. **2675.** 1) 1; 2) 1; 3) 10; 4) 5. **2676.** 1) $-\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$; 2) $\frac{\sqrt{3} - 3i}{2}$; 3) $-i$; 4) 0. **2677.** 1) 2; 2) $-\frac{3}{8}i$; 3) $\frac{1}{2}(3+i)$; 4) 34,6. **2678.** 1) $9x^2 - 4x + 1 = 0$; 2) $7x^2 - 11x + 7 = 0$. **2679.** $x^4 + 7x^2 - 18 = 0$.

2681. 1) $2+i$; $-2+i$; 2) $1-i$; $\frac{2}{3}(1+i)$; 3) $\frac{1}{2}(1+i)$; $2-i$; 4) $-i$; $\frac{i-3}{2}$. **2682.** 1) 2; 3; 2) ± 3; ∓ 1 или $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$; $\mp\sqrt{6}$. **2683.** 1) -6; 2) $\frac{3}{2}(1+i\sqrt{3})$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{4}(1-i)$; 4) $-\frac{3}{2}(1+i\sqrt{3})$. **2684.** $4\sqrt{2}$. **2685.** $3696i$. **2686.** $x^7-21x^5+35x^3-7x$. **2687.** $-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$. **2688.** $45+55i\sqrt{3}$. **2689.** Доказательство. Векторам $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_2M_3}$ соответствуют разности комплексных чисел z_2-z_1 и z_3-z_2. Так как эти векторы лежат на одной прямой и одинаково направлены (рис. 110), то соответствующие им комплексные числа будут иметь один и тот же аргумент. Следовательно, $z_2-z_1=r_1(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $z_3-z_2=r_2(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где r_1 и r_2 — действительные числа. Значит, $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_2}=\frac{r_1}{r_2}$. **2690.** 1) 4,85; 2) 1; 3) 2; 2. **2691.** 1) 58; 2) $x^2-(3+5i)x-6+9i=0$; 3) Окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 2. **2692.** 1) $18{,}2i$; 3) $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$; 4) 4; $-2\pm 2i\sqrt{3}$. **2693.** 1) 1; 2) $1+i$, или $-1-i$; 3) $-1-i$; 4) ± 5; $\pm 5i$.

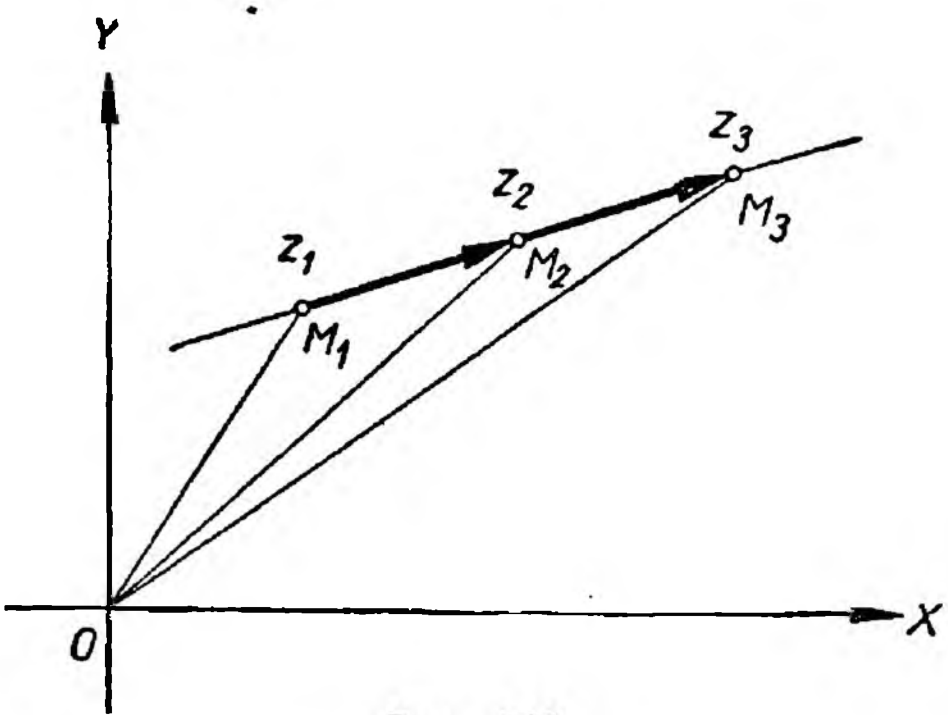


Рис. 110

XIII. Задачи на повторение курса «Алгебра и элементарные функции»

2694. 4 *м* 95 *см*. **2696.** 50 *км/ч*. **2697.** 52 коп. **2699.** 20 дн.; 30 дн.; 60 дн. **2700.** 7,5 *ч*; 5 *ч*. **2701.** 12 *км/ч*; 180 *км*. **2702.** 2; 6; 18. **2703.** 4; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$ или $\frac{1}{4}$; 1; 4; 16. **2704.** 10; 11; 34; 74; 90; 91. **2705.** 1) $(-91;\ 9)$; $(9;\ -91)$; $(11;\ 111)$; $(111;\ 11)$. Указание. $y=\frac{10x+1}{x-10}=\frac{10x-100+101}{x-10}=10+\frac{101}{x-10}$. 2) 10 юношей и 90 девушек или 60 юношей и 40 девушек. **2706.** Указание. $5^{2n}-1=25^n-1=(25-1)\cdot A=24\cdot A$. **2707.** Решение. $x^4+2x^3-x^2-2x=x(x^3+2x^2-x-2)=x[x(x^2-1)+2(x^2-1)]=x(x^2-1)(x+2)=(x-1)\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+2)$. Произведение четырех последовательных натуральных чисел кратно 24. **2710.** 1) 2; 3; $\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$. Указание. Представить уравнение в виде $(x^2-5x)^2+11(x^2-5x)+30=0$ и воспользоваться подстановкой $x^2-5x=z$; 2) 0; 5; $\frac{5\pm i\sqrt{15}}{2}$. Указание. Так как $(x-1)(x-4)=x^2-5x+4$

и $(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$, то, выполнив подстановку $x^2-5x=z$, получим: $(z+4)(z+6)=24$; 3) -1; 4; 4) ± 2; $\pm\sqrt{\frac{5}{11}}$. **2711.** Указание. Частный случай неравенства $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$. **2712.** 1) (3; 2); 2) (3; 1); (—1,5; —2); 3) (1; —3). **2713.** (0; 1); (~1,8; ~4,6). **2715.** 1) (2,5; 4,5); (3,5; 4,5); 2) (—3; 2); 3) (—2; 3; 5); (2; —3; —5); 4) $x_1=x_2=x_3=\ldots$ $\ldots=x_{15}=\pm 1$. Решение. Вычитая почленно из первого уравнения второе, затем из второго третье и т. д., получим: $x_2(x_1-x_3)=0$, $x_3(x_2-x_4)=0, \ldots, x_{15}(x_{14}-x_1)=0$, откуда находим: $x_1=x_2=x_3=\ldots$ $\ldots=x_{15}$. Но из первого уравнения вытекает $x_1^2=1$. Следовательно, $x_1=\pm 1$. **2716.** ~1,41; 3. **2717.** Решение. По условию $x_1+x_2=2-m$, $x_1x_2=-(m+3)$. Отсюда $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(2-m)^2+$ $+2(m+3)=(m-1)^2+9$. Следовательно, наименьшее значение 9 получается при $m=1$. **2618.** Наибольший периметр имеет трапеция, у которой каждая из боковых сторон и ее верхнее основание равны данному радиусу окружности. **2719.** $a_1=1$; $a_2=-2$. **2720.** $7\pm\sqrt{34}$; $\frac{7\pm i\sqrt{11}}{2}$. **2721.** $a^3-3ab+2c=0$. **2722.** $a=2$; $y=-1$. **2723.** 1) $-1\pm\sqrt{a+3}$; $1\pm\sqrt{a+1}$. Указание. Сначала решить уравнение относительно a; 2) $\frac{\pm 1\pm\sqrt{4a+49}}{2}$; 3) $-1\pm\sqrt{1+a}$; $2\pm\sqrt{4+a}$. **2724.** 1) $-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$; 2) $\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$. **2725.** 1) 81; 2) 1. **2726.** 1) 3; 2) 0; 3) 1,5. **2727.** 1) 100; 1000; 2) 10^{-4}; 10; 3) 1; 2. **2728.** $(\sqrt{2}; 2)$; $(2; \sqrt{2})$. Указание. $\log_y x=\frac{1}{\log_x y}$. **2729.** $2\frac{2}{7}$. **2731.** $\frac{2-a}{a+b}$. **2732.** 1) ~1,438; 3) ~0,5683. **2733.** 1) 1; $\frac{\sqrt[3]{abc}}{abc}$; 2) и 3) корней нет. **2736.** По той же окружности, но в противоположном направлении. **2737.** 1) $x<0$; $x>1$; 2) $-1<x<7$. **2740.** $\frac{1}{2}$. Указание. $y=1-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$. Если $x=\operatorname{tg}\varphi$, то $y=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi$. **2742.** $\frac{1}{8}$. **2744.** 1) $\frac{ab}{b-a}=\operatorname{tg}x$; 2) $a=b$ или $a+b-2ab=0$. **2747.** 1) $A=$ $=\arcsin\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\operatorname{arctg}\frac{a}{b}=\operatorname{arcctg}\frac{b}{a}$; $B=$ $=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}=\operatorname{arcctg}\frac{a}{b}$; 2) $A=$ $=2\arcsin\frac{d_1}{2a}=2\arccos\frac{d_2}{2a}$; $B=2\arcsin\frac{d_2}{2a}=2\arccos\frac{d_1}{2a}$, где диагональ d_1 лежит против углов A и C. **2749.** 1) $\frac{336}{625}$; 2) $1\frac{1}{3}$. **2752.** 1) 2; 2) $2\sqrt{2}$. **2753.** $\operatorname{ctg}\alpha$. Решение. Имеем: $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-2\operatorname{ctg}2\alpha$; $2\operatorname{tg}2\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha=-4\operatorname{ctg}4\alpha$; $4\operatorname{tg}4\alpha-4\operatorname{ctg}4\alpha=-8\operatorname{ctg}8\alpha$; ...; $2^{n-1}\operatorname{tg}2^{n-1}\alpha-2^{n-1}\operatorname{ctg}2^{n-1}\alpha=-2^n\operatorname{ctg}2^n\alpha$. Складывая почленно эти равенства, получим: $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+\ldots+2^{n-1}\operatorname{tg}2^{n-1}\alpha+$

$+ 2^n \operatorname{ctg} 2^n \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$. **2754.** 1) 1,5; 2) 2; 3) 3. **2755.** $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x}{2+3x}$; $\frac{1}{f(x)} = \frac{3+2x}{x-1}$. **2756.** 1. **2757.** $\sqrt{2}$. **2758.** 2, a) $\frac{3\pi}{4}$; б) 0; в) $\frac{\pi}{4}$; 3) 116° 34′; 63° 26′. **2759.** $\frac{\pi}{4}$. **2760.** $4y - 3x = 25$. **2761.** $x = y = -1$. **2762.** 7 *м/сек*; 6 *м/сек*^{2}. **2763.** $v = gt$. **2764.** 0,10814 $\frac{\textit{кал}}{\textit{г} \cdot \textit{град}}$. **2765.** 25 *сек*. **2766.** 50 *см*^{2}. **2767.** $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. **2768.** Если катеты с данными параллельными прямыми составляют углы по 45°. **2769.** Указание. Вначале отделить 6 шаров и взвесить их, положив на каждую чашку весов по три шара. **2770.** 68 человек. **2771.** Вере 5 лет, Боре 8 лет, Ане 13 лет и Гале 15 лет. **2774.** Решение. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ — k первых цифр числа π. Тогда $10 - \pi = 9 - a_1 + \frac{9-a_2}{10} + \frac{9-a_3}{10^2} + \ldots + \frac{9-a_k}{10^{k-1}} + \ldots$. Среднее арифметическое k первых цифр числа $10 - \pi$ будет равно: $\frac{9 - a_1 + 9 - a_2 + 9 - a_3 + \ldots + 9 - a_k}{k} = 9 - \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k}{k}$. По условию среднее арифметическое k первых цифр числа π, т. е. выражение $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k}{k}$, при возрастании числа k стремится к числу 4,5. Поэтому среднее арифметическое k первых цифр числа $10 - \pi$ при возрастании k также стремится к 4,5. **2775.** 24 нулями. **2776.** $331_{(5)} = 133_{(8)}$. Указание. Записать условие задачи в виде $25a + 5b + c = 64c + 8b + a$; выразить отсюда b через a и c и решить полученное уравнение в целых числах, учитывая, что $1 \leqslant a \leqslant 4$; $1 \leqslant c \leqslant 4$; $0 \leqslant b \leqslant 4$. **2778.** 1. Указание. $69\,133^{1966} = (69\,132 + 1)^{1966}$. Разложить по формуле бинома Ньютона и рассмотреть каждое слагаемое. **2779.** $x = \log_2 5$. **2780.** Решение. Рассмотрим три последовательных целых числа: $p - 1$, p и $p + 1$. Так как $p \geqslant 5$ простое, то $p - 1$ и $p + 1$ четные и, значит, одно из них делится на 4. Следовательно, $p^2 - 1$ делится на 8. Кроме того, одно из чисел $p - 1$, p и $p + 1$ делится на 3, а так как $p \geqslant 5$ простое, то либо $p - 1$, либо $p + 1$ делится на 3. Значит, $p^2 - 1$ делится на 24. **2781.** Указание. Разложить многочлен $n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2$ на множители. **2783.** Указание. Уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$ привести к виду: $(x - p)(y - p) = p^2$. **2784.** $90° n - (-1)^n \cdot 10° 33'$; $\pm 0,8$. **2785.** 9. **2788.** Указание. Разрезание на 10 частей одного листа бумаги увеличивает общее число листов на 9. **2789.** 1) 2 ампера; 3 ампера; 3) $\pi k - \frac{\pi}{4}$; 4) 2. **2790.** 1) $\frac{m+n+2}{mn-1}$; 2) 15; 3) $x = \log_2 (y - 1)$, где $1 < y < +\infty$; 4) $-\sqrt{2}$. **2791.** 1) $2(\sqrt{6} - 1)$; $2\sqrt{6}$ и $2(\sqrt{6} + 1)$; 2) $\log_3 10$ и $\log_3 28 - 3$; 4) -4. **2792.** 1) -1; 0; 1; 2; 2) (4; 3; 5); (3; 4; 5); (-3; -4; -5); (-4; -3; -5); $\left(\frac{7 \pm \sqrt{113}}{2}; \frac{7 \mp \sqrt{113}}{2}; 9\right)$; $\left(\frac{-7 \pm \sqrt{113}}{2}; \frac{-7 \mp \sqrt{113}}{2}; -9\right)$. **2793.** 1) 243 *л*; 4) -2. **2794.** 1) 4 *км/ч*; 2) $|x| < 1$; 3) $p^3 - 3p$; 4) 110. **2795.** 1) 1 *кг* и 7 *кг*; 4) 12 *см*. **2796.** 1) На 0,5 *мин* в сутки; 2) 4; 3) 7744; 4) 5 *см* и $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ *см*.

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Задачи и упражнения для повторения курса V—VIII классов 3
§ 1. Арифметика . . . . —
§ 2. Алгебра 6

II. Уравнения и неравенства первой степени 21
§ 3. Уравнения первой степени с одним неизвестным . . . . —
§ 4. Неравенства 23
§ 5. Системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными 33

III. Действительные числа. Квадратные уравнения 36
§ 6. Действительные числа . . . . —
§ 7. Квадратные уравнения 42
§ 8. Биквадратные уравнения 56
§ 9. Системы уравнений второй степени 59
§ 10. Неравенства второй степени . . . 72
§ 11. Иррациональные уравнения 77

IV. Степень с рациональным показателем. Степенная функция 79
§ 12. Степень с целым показателем . . —
§ 13. Степень с дробным показателем . . 86
§ 14. Преобразование корней 97
§ 15. Действия над корнями 103
§ 16. Общие свойства степенной функции . . 116

V. Тригонометрические функции любого аргумента 118
§ 17. Векторы на плоскости . . . . —
§ 18. Проекции и координаты вектора 120
§ 19. Измерение углов и дуг 122
§ 20. Единичная окружность 128
§ 21. Тригонометрические функции любого аргумента 130
§ 22. Графики тригонометрических функций 144
§ 23. Алгебраические соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента 155
§ 24. Формулы приведения 162

VI. Прогрессии . . . 163
§ 25. Числовая последовательность —
§ 26. Арифметическая прогрессия 173
§ 27. Геометрическая прогрессия 181
§ 28. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия . 185

VII. Задачи для повторения курса IX класса 189

VIII. Тригонометрические теоремы сложения и их следствия . . 213
§ 29. Тригонометрические функции суммы и разности аргументов . . —
§ 30. Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента 222

§ 31. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму; обратное преобразование 229
§ 32. Гармонические колебания 236

IX. Показательная и логарифмическая функция 248

§ 33. Показательная функция . . . . . . —
§ 34. Логарифмическая функция 254
§ 35. Логарифмы 257
§ 36. Логарифмирование и потенцирование 260
§ 37. Десятичные логарифмы 265
§ 38. Показательные и логарифмические уравнения 276

X. Функции и пределы 290

§ 39. Общие сведения о функциях . . . . —
§ 40. Обзор свойств и графиков элементарных функций 297
§ 41. Предел функции 305

XI. Производная и ее применение к исследованию функций . .

§ 42. Производная функция 310
§ 43. Дифференцирование по формулам 315
§ 44. Применение производной к исследованию функций 321

XII. Обобщение понятия числа. Комплексные числа 330

§ 45. Расширение понятия числа . . . . —
§ 46. Комплексные числа и их геометрическая интерпретация . . . 333
§ 47. Действия над комплексными числами 337
§ 48. Применение комплексных чисел к решению двучленных уравнений 345

XIII. Задачи на повторение курса «Алгебра и элементарные функции» 350

Ответы 361

Александр Иванович Худобин, Николай Иванович Худобин,
| *Михаил Филиппович Шуршалов* |

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ И ЭЛЕМЕНТАРНЫМ ФУНКЦИЯМ

Редактор *А. А. Свечников* Обложка художника *Е. А. Десятова*
Художественный редактор *В. С. Эрденко* Технический редактор *Т. Н. Зыкина*
Корректор *Т. М. Графовская*

Сдано в набор 30/XI 1965 г. Подписано к печати 7/VII 1966 г. $60\times90^1/_{16}$. Печ. л. 27,5.
Уч.-изд. л. 23,79. Тираж 100 тыс. экз. (Тем. пл. 1966 г. № 423). А15331
Заказ № 524

Цена без переплета 59 к., переплет 10 к.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР
Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Главполиграфпром Комитета по печати при Совете Министров СССР
Отпечатано в Ленинградской типографии № 1 «Печатный Двор» им. А. М. Горького, Гатчинская, 26 с матриц Ленинградской типографии № 2 им. Евгении Соколовой, Измайловский проспект, 29

ШКОЛЬНЫЕ УЧЕБНИКИ СССР

SHEBA.SPB.RU/SHKOLA